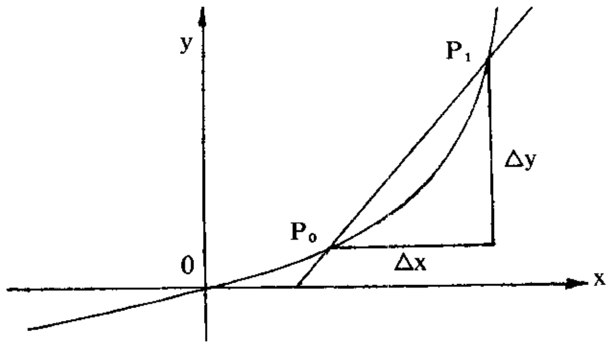
บทที่ 3
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จะศึกษาในบทที่ 3 เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

(1) ปริมาณการแปรค่า มี 2 ชนิด คือ

1. ปริมาณการแปรค่าของ x แทนด้วย Δx
2. ปริมาณการแปรค่าของ y แทนด้วย Δy



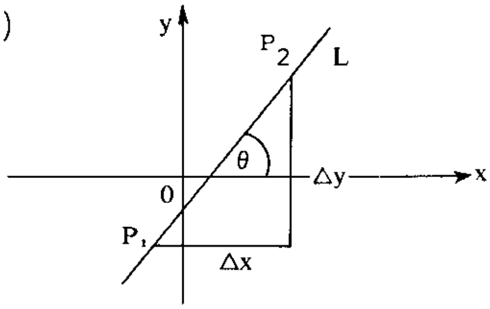
กำหนด $y = f(x), P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$ จะได้

$\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$

อัตราการแปรค่าเฉลี่ย $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด $= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

(2) ความชันของเส้นตรง คือ ค่า $\tan\theta$ ซึ่ง θ เป็นมุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน x (วัดทวนเข็มนาฬิกา)



$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

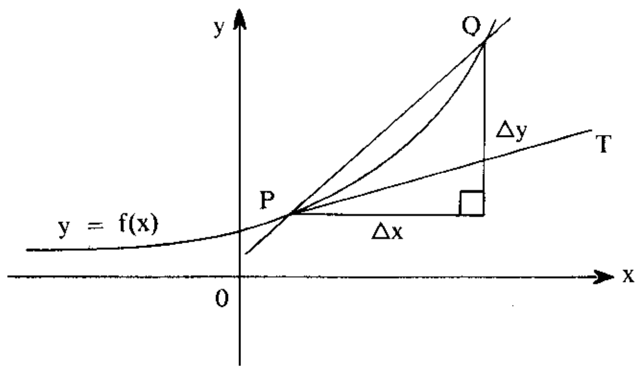
(เมื่อทราบจุดผ่าน 2 จุด)

MA 111 (H) 77

(3) ข้อสรุปเกี่ยวกับเส้นตรง

1. $L_1 /\!/ L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$
3. เส้นตรงเอียงทางขวา ความชันมีค่าบวก
4. เส้นตรงเอียงทางซ้าย ความชันมีค่าลบ
5. เส้นตรงขนานกับแกน x ความชันมีค่าเท่ากับ 0
6. เส้นตรงขนานกับแกน y ความชันไม่มีค่า (∞)

(4) ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดก็ตาม คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้น



$$M_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

เมื่อ $Q \to P$, $\Delta x \to 0$

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นโค้ง $= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

(5) อนุพันธ์ของ $y = f(x)$ แทนด้วย $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $Df(x)$, y', $\dfrac{d}{dx} f(x)$ คือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(6) การหาค่าลิมิตไม่สะดวก ดังนั้น เกี่ยวกับอนุพันธ์ จึงมีทฤษฎีบทอนุพันธ์ดังต่อไปนี้ เพื่อใช้ในการคำนวณ คือ

1. $\dfrac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
3. $\dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}\, c\, f(x) \quad = \quad c\, \frac{d}{dx}\, f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5. $\frac{d}{dx}\, [\, f(x) \pm g(x)\,] \quad = \quad \frac{d}{dx}\, f(x) \pm \frac{d}{dx}\, g(x)$

6. $\frac{d}{dx}\, f(x)\, g(x) \quad = \quad f(x)\, \frac{d}{dx}\, g(x) + g(x)\, \frac{d}{dx}\, f(x)$

7. $\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \frac{g(x)\, \frac{d}{dx}.f(x) - f(x)\, \frac{d}{dx}\, g(x)}{[\, g(x)\,]^2}$

8. $\frac{d}{dx}\, [\, f(x)\,]^n \quad = \quad n\, [\, f(x)\,]^{n-1}\, \frac{d}{dx}\, f(x)$

เพื่อสะดวกในการจำเราเขียนในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ได้ดังนี้

ให้ u, v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

1. $dc \quad = \quad 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $dx^n \quad = \quad nx^{n-1}\, dx$
3. $d\, c\, u \quad = \quad c\, d\, u$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
4. $d\, (u \pm v) \quad = \quad du \pm dv$
5. $d(uv) \quad = \quad u\, dv + v\, du$
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) \quad = \quad \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$
7. $d\, u^n \quad = \quad n\, u^{n-1}\, du$

(7) กฎลูกโซ่ ใช้แก้ปัญหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งอาจมีตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป เช่น

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ เมื่อ $y = f(u),\ u = g(x)$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ เมื่อ $y = f(u),\ u = g(x),\ x = h(t)$

(8) ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งต่อเนื่องบน [a, b] แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

(9) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง (implicit function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหา y' ในรูปของ $f(x)$ ได้ เราใช้วิธีการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ตลอด แล้วจัดรูปสมการหาค่า $\frac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ จะมีรูปเป็น $f(x, y)$

(10) $\frac{d^n y}{dx^n}$, $n > 1$ แทนอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่า 1

เช่น $\frac{d^2y}{dx^2}$ แทนอนุพันธ์อันดับ 2

$\frac{d^3y}{dx^3}$ แทนอนุพันธ์อันดับ 3

ถ้าเป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว อนุพันธ์อันดับที่ n เท่ากับ ส.ป.ส.ของ x^n คูณด้วย $n!$ แต่อนุพันธ์อันดับที่ $n + 1$ ขึ้นไป เท่ากับ 0

(11) นอกจากทฤษฎีบทของอนุพันธ์ที่เป็นสูตรที่ได้กล่าวมาแล้ว เรายังมีทฤษฎีบทสำคัญ ๆ เกี่ยวกับอนุพันธ์ที่ควรทราบดังนี้

ทฤษฎีบท 1 $f(x)$ หาค่าได้ในช่วง $[a, b]$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ - $x = c \in (a, b)$ ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ที่ $x = c$ แล้ว $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 2 $f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ แล้ว $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = a$

ทฤษฎีบท 3 $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ มีอนุพันธ์บน (a, b) ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ อย่างน้อย 1 จำนวน ซึ่ง $f'(c) = 0$

"Roll's Theorem"

ทฤษฎีบท 4 $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ มีอนุพันธ์บน (a, b) แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

"Mean Value Theorem"

แบบฝึกหัด 3.1

โจทย์ข้อ 1. ให้ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นที่กำหนด จงหา Δx, Δy ของแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y = 2x^2$ เมื่อ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_2 - x_1 \\
&= 3 - 1 = 2 \\
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(1 + 2) - f(1) \\
&= f(3) - f(1) \\
&= 2(3)^2 - 2(1)^2 \\
&= 18 - 2 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$\therefore \Delta x = 2$ และ $\Delta y = 16$

(2) $y = 3x^2 - 2$ เมื่อ $x_1 = 2$, $x_2 = 2.01$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_2 - x_1 \\
&= 2.01 - 2 = 0.01 \\
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(2.01) - f(2) \\
&= (3(2.01)^2 - 2) - (3(2)^2 - 2) \\
&= 10.12 - 10 = 0.12
\end{aligned}$$

$\therefore \Delta x = 0.01$ และ $\Delta y = 0.12$

MA 111 (H) 81

(3) $y = 2 \sin x$ เมื่อ $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_2 - x_1 \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{4} \\
&= 2(1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2 - \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

(4) $y = 3^x$ เมื่อ $x_1 = 2, x_2 = 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_2 - x_1 \\
&= 3 - 2 = 1 \\
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(3) - f(2) \\
&= 3^3 - 3^2 \\
&= 27 - 9 = 18
\end{aligned}$$

$\therefore \Delta x = 1$ และ $\Delta y = 18$

โจทย์ข้อ 2. กำหนดวัตถุเคลื่อนจาก A ไปยัง B จุด C เกิดจากเส้นตรงในแนวดิ่งที่ผ่าน B และเส้นตรงในแนวนอนที่ผ่าน A ตัดกัน จงหาจุด C, Δx, Δy และ $|AB|$ สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) A(−1, 1), B(1, 2)

วิธีทำ

จุด C คือ จุด (1, 1)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - (-1) = 2$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2 - 1 = 1$$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

(2) A(1, 2), B(−1, −1)

วิธีทำ

จุด C คือ จุด (−1, 2)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1 - 1 = -2$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -1 - 2 = -3$$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

(3) A(−3, 2), B(−1, −2)

วิธีทำ

จุด C คือ (−1, 2)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (-3) = 2$$

$\Delta y \quad = \quad y_2 - y_1$

$\quad\quad = \quad -2 - 2 = -4$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{2^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

(4) $A(-1, -2), B(-3, 2)$

วิธีทำ

จุด C คือ $(-3, -2)$

$\Delta x \quad = \quad x_2 - x_1$

$\quad\quad = \quad -3 - (-1) = -2$

$\Delta y \quad = \quad y_2 - y_1$

$\quad\quad = \quad 2 - (-2) = 4$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

(5) $A(-3, 1), B(-8, 1)$

วิธีทำ

จุด C คือ $(-8, 1)$

$\Delta x \quad = \quad x_2 - x_1$

$\quad\quad = \quad -8 - (-3) = -5$

$\Delta y \quad = \quad y_2 - y_1$

$\quad\quad = \quad 1 - 1 = 0$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{25} = 5$

(6) A(0, 4), B(0, −2)

วิธีทำ

จุด C คือ (0, 4)

$\Delta x = x_2 - x_1$

$= 0 - 0 = 0$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$= -2 - 4 = -6$

และ $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{0^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36}$

$= 6$

โจทย์ข้อ 3 อนุภาคเริ่มต้นเคลื่อนที่จาก A(−3, 5) ถ้าโคออร์ดิเนตของจุดปลาย เปลี่ยนโดยปริมาณการแปรค่า $\Delta x = 6$, $\Delta y = -4$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลาย

วิธีทำ

สมมุติให้โคออร์ดิเนตของจุดปลาย คือ $B(x_2, y_2)$

จาก $\Delta x = x_2 - x_1$

$\therefore x_2 = x_1 + \Delta x$

$= -3 + 6$

$= 3$

และ $\Delta y = y_2 - y_1$

$\therefore y_2 = y_1 + \Delta y$

$= 5 + (-4)$

$= 1$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดปลาย คือ B(3, 1)

โจทย์ข้อ 4. อนุภาคเคลื่อนที่จาก A (x,y) ไปยัง B (3, −3) ถ้ากำหนดให้ $\Delta x = 5$, $\Delta y = 6$ แล้วจงหาค่า x,y

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้ว่า

$$\Delta x = 3 - x$$

$$\therefore x = 3 - \Delta x$$

$$= 3 - 5$$

$$= -2$$

และ $\Delta y = -3 - y$

$$\therefore y = -3 - \Delta y$$

$$= -3 - 6$$

$$= -9$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $x = -2$, $y = -9$

โจทข้อ 5. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จาก A(−2, 5) ไปยังแกน y ซึ่งกำหนดให้ $\Delta y = 3\Delta x$ แล้วจงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลาย

วิธีทำ

สมมุติให้จุดปลายที่อยู่บนแกน y มีโคออร์ดิเนตเป็น B(0, y)

$$\because \Delta x = x_2 - x_1$$

$$= 0 - (-2) = 2$$

$$\Delta y = y - 5$$

แต่ $\Delta y = 3\Delta x$

$$= 3(2)$$

$$= 6$$

$$\therefore y - 5 = 6$$

$$\therefore y = 11$$

จึงได้ว่าโคออร์ดิเนตของจุดปลาย คือ B(0, 11)

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2

โจทย์ข้อ 1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนั้นด้วย

(1) (2, 1) กับ (3, 2)

วิธีทำ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1) กับ (3, 2) คือ 1 และความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นนี้ คือ -1

(2) (4, 1) กับ (−2, −1)

วิธีทำ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{-2 - 4} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, 1) กับ (−2, −1) คือ $\frac{1}{3}$ และความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ คือ -3

(3) (0, 0) กับ (2, −2)

วิธีทำ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{2 - 0} = -1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (0, 0) กับ (2, −2) คือ −1 และความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ คือ 1

(4) (3, 1) กับ (3, −4)

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-4 - 1}{3 - 3} = \frac{-5}{0}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 1) กับ (3, −4) หาค่าความชันไม่ได้ และความชันของเส้นที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ คือ 0

(5) (4, −3) กับ (−3, −3)

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3 - (-3)}{-3 - 4}$$

$$= 0$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, −3) กับ (−3, −3) คือ 0 และความชันขอเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ไม่มีค่า

(6) (a + b, b) กับ (a − b, a)

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a - b}{(a - b) - (a + b)}$$

$$= \frac{a - b}{-2b}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (a + b, b) กับ (a − b,a) คือ $-\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b}\right)$ และความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ คือ $2\left(\frac{b}{a-b}\right)$

(7) $(a - b, a + b)$ กับ $(a + b, a - b)$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a - b - a - b}{a + b - a + b}$$

$$= -1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(a - b, a + b)$ กับ $(a + b, a - b)$ คือ -1 และความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนี้ คือ 1

โจทย์ข้อ 2. จงหาความชันของเส้นตรงต่อไปนี้

(1) $L_1 : y = -x$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x}$$

$$= -\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -1$$

ดังนั้น เส้นตรง L_1 มีความชันเท่ากับ -1

(2) $L_2 : y = 4$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{4 - 4}{\Delta x}$$

$$= 0$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง L_2 คือ 0

(3) $L_3 : y = \frac{3}{2}x - 1$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(x + \Delta x) - 1 - \frac{3}{2}x + 1}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง L_3 คือ $\frac{3}{2}$

โจทย์ข้อ 3. จงหาค่าของ k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A(k, 3) และ B(1, −5) มีความชันเท่ากับ 4

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-5 - 3}{1 - k}$$

$$= \frac{-8}{1 - k}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{-8}{1 - k} = 4$$

$$-8 = 4 - 4k$$

$$\therefore k = 3$$

โจทย์ข้อ 4. จงพิจารณาว่า จุด A, B, C, D ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ ในกรณีที่เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานให้บอกด้วยว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่

(1) A(2, 0), B(3, −4), C(1, −2), D(0, 2)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ B

$$m_1 = \frac{-4 - 0}{3 - 2} = -4$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน B และ C

$$m_2 = \frac{-2 - (-4)}{1 - 3} = -1$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน C และ D

$$m_3 = \frac{2 - (-2)}{0 - 1} = -4$$

ให้ m_4 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน D และ A

$$m_4 = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

จะได้ว่า $m_1 = m_3$ แสดงว่า เส้นตรง AB กับ CD ขนานกัน

และ $m_2 = m_4$ แสดงว่า เส้นตรง BC กับ AD ขนานกัน

นั่นแสดงว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่ AB กับ BC ไม่ตั้งฉากกัน จึงกล่าวได้ว่า ABCD ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(2) A(3, 0), B(−1, 2), C(1, 7), D(5, 5)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ B

$$m_1 = \frac{2 - 0}{-1 - 3} = -\frac{1}{2}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน B และ C

$$m_2 = \frac{7 - 2}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน C และ D

$$m_3 = \frac{5 - 7}{5 - 1} = -\frac{1}{2}$$

ให้ m_4 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ D

$$m_4 = \frac{5-0}{5-3} = \frac{5}{2}$$

จะได้ว่า $m_1 = m_3$ แสดงว่า เส้นตรง AB กับ CD ขนานกัน

และ $m_2 = m_4$ แสดงว่า เส้นตรง BC กับ AD ขนานกัน

นั่นแสดงว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่ AB กับ BC ไม่ตั้งฉากกัน จึงกล่าวได้ว่า ABCD ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(3) A(3, 1), B(2, 2), C(0, 1), D(1, 0)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ B

$$m_1 = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน B และ C

$$m_2 = \frac{1-2}{0-2} = \frac{1}{2}$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน C และ D

$$m_3 = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

ให้ m_4 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ D

$$m_4 = \frac{0-1}{1-3} = \frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $m_1 = m_3$ แสดงว่า เส้นตรง AB กับ CD ขนานกัน

และ $m_2 = m_4$ แสดงว่า เส้นตรง BC กับ AD ขนานกัน

นั่นแสดงว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่ AB กับ BC ไม่ตั้งฉากกัน จึงกล่าวได้ว่า ABCD ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(4) A(−2, 2), B(1, 3), C(2, 0), D(−1, −1)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ B

$$m_1 = \frac{3-2}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน B และ C

$$m_2 = \frac{0-3}{2-1} = -3$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน C และ D

$$m_3 = \frac{-1-0}{-1-2} = \frac{1}{3}$$

ให้ m_4 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ D

$$m_4 = \frac{-1-2}{-1-(-2)} = -3$$

จะได้ว่า $m_1 = m_3$ แสดงว่า เส้นตรง AB กับ CD ขนานกัน

และ $m_2 = m_4$ แสดงว่า เส้นตรง BC กับ AD ขนานกัน

แสดงว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

นอกจากนี้ ยังได้ว่า $m_1m_2 = -1$ แสดงว่า AB กับ BC ตั้งได้ฉากกัน

$m_2m_3 = -1$ แสดงว่า BC กับ CD ตั้งได้ฉากกัน

$m_3m_4 = -1$ แสดงว่า CD กับ DA ตั้งได้ฉากกัน

และ $m_4m_1 = -1$ แสดงว่า DA กับ AB ตั้งได้ฉากกัน

แสดงว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วย

(5) A(−1, 0), B(0, −1), C(2, 0), D(3, 2)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน A และ B

$$m_1 = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน B และ C

$$m_2 = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2}$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน C และ D

$$m_3 = \frac{2-0}{3-2} = 2$$

จะได้ว่า $m_1 \neq m_3$ แสดงว่า AB กับ CD ไม่ขนานกัน
นั่นแสดงว่า ABCD ไม่เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

โจทย์ข้อ 5. จงพิจารณาว่า จุด A, B, C ในข้อใดต่อไปนี้ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(1) A(1, −2), B(6, −5), C(−10, 2)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

$$m_1 = \frac{-5-(-2)}{6-1} = -\frac{3}{5}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

$$m_2 = \frac{2-(-5)}{-10-6} = -\frac{7}{16}$$

จะได้ว่า $m_1 \neq m_2$ แสดงว่า เส้นตรง AB กับ BC ไม่ขนานกัน
นั่นคือ A, B, C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(2) A(5, 1), B(−1, −1), C(8, 2)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

$$m_1 = \frac{-1-1}{-1-5} = \frac{1}{3}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

$$m_2 = \frac{2 - (-1)}{8 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

จะได้ว่า $m_1 = m_2$ แสดงว่า AB กับ BC ขนานกัน แต่เส้นตรงทั้งสองมีจุด B ร่วมกัน ดังนั้น AB กับ BC เป็นเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ A, B, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(3) A(−2, 1), B(1, 3), C(6, −7)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

$$m_1 = \frac{3 - 1}{1 - (-2)} = \frac{2}{3}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

$$m_2 \quad \frac{-7 - 3}{6 - 1} = -2$$

จะได้ว่า $m_1 \neq m_2$ แสดงว่า เส้นตรง AB และ BC ไม่ขนานกัน

นั่นคือ A, B, C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(4) A(3, 1), B(−1, 2), C(5, 0)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

$$m_1 = \frac{2 - 1}{-1 - 3} = -\frac{1}{4}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

$$m_2 = \frac{0 - 2}{5 - (-1)} = -\frac{1}{3}$$

จะได้ว่า $m_1 \neq m_2$ แสดงว่า AB กับ BC ไม่ขนานกัน

นั่นคือ A, B, C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

โจทย์ข้อ 6 จงพิจารณาว่าจุด A, B, C ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

(1) $A(-4, 2), B(-1, -1), C(1, 1)$

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 \quad \frac{-1-2}{-1-(-4)} = -1$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง BC

$$m_2 = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$$

จะได้ว่า $m_1m_2 = -1$ แสดงว่า AB กับ BC ตั้งได้ฉากกัน

นั่นคือ $A(-4, 2), B(-1, -1)$ และ $C(1, 1)$

เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

(2) $A(4, 4), B(1, 2), C(2, 1)$

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง BC

$$m_2 = \frac{1-2}{2-1} = -1$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรง AC

$$m_3 = \frac{1-4}{2-4} = \frac{3}{2}$$

จะได้ว่า $m_1m_2 \neq -1, m_1m_3 \neq -1$ และ $m_2m_3 \neq -1$ แสดงว่า AB, BC และ ACไม่มีเส้นตรงคู่ใดตั้งได้ฉากกันเลย

นั่นคือ $A(4, 4), B(1, 2)$ และ $C(2, 1)$ ไม่ใช่จุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

(3) A(0, −1), B(4, 0), C(3, 4)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{0-(-1)}{4-0} = \frac{1}{4}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง BC

$$m_2 = \frac{4-0}{3-4} = -4$$

จะได้ว่า $m_1m_2 = -1$ แสดงว่า AB กับ BC ตั้งได้ฉากกัน

นั่นคือ A(0, −1), B(4, 0) และ C(3, 4) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

(4) A(1, 2), B(6, −3), C(9, 0)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{-3-2}{6-1} = -1$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง BC

$$m_2 = \frac{0-(-3)}{9-6} = 1$$

จะได้ว่า $m_1m_2 = -1$ แสดงว่า AB กับ BC ตั้งได้ฉากกัน

นั่นคือ A(1, 2), B(6, −3) และ C(9, 0) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(5) A(2, −1), B(4, 3), C(−1, −7)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{3-(-1)}{4-2} = 2$$

MA 111 (H) 97

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง BC

$$m_2 = \frac{-7-3}{-1-4} = 2$$

ให้ m_3 แทนความชันของเส้นตรง AC

$$m_3 = \frac{-7-(-1)}{-1-2} = 2$$

จะได้ว่า $m_1m_2 \neq -1$, $m_1m_3 \neq -1$ และ $m_2m_3 \neq -1$ แสดงว่า AB, BC และ AC ไม่มีเส้นตรงคู่ใดตั้งได้ฉากกัน

นั่นคือ A(2, −1), B(4, 3) และ C(−1, −7) ไม่เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

โจทย์ข้อ 7 จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่าน P(3, −2) และ Q(4, k)

(1) ขนานกับเส้นตรงที่มีความชัน −3

วิธีทำ

ให้ m แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P(3, −2) และ Q(4, k)

$$m = \frac{k-(-2)}{4-3} = k+2$$

จากเส้นตรงที่ผ่าน PQ นี้ ขนานกับเส้นตรงที่มีความชัน −3 จึงได้ว่า

$$k + 2 = -3$$
$$\therefore k = -5$$

(2) ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่มีความชัน −3

วิธีทำ

จาก (1) ได้ว่า ความชันที่ผ่าน P(3, −2) และ Q(4, k) คือ $k + 2$
และจากโจทย์ กำหนดให้เส้นตรง PQ นี้ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีความชัน −3 จึงได้ว่า

$$(k+2)(-3) = -1$$
$$k + 2 = \frac{1}{3}$$
$$\therefore k = -\frac{5}{3}$$

โจทย์ข้อ 8. กำหนดให้เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และ P(x, y) มีความชัน 2 และเส้นตรงที่ผ่านจุด (−1, 0) และ P(x, y) มีความชัน 1 จงหาค่า x, y

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และ P (x, y)

$$m_1 = \frac{y - 0}{x - 0}$$

$$\therefore \frac{y}{x} = 2$$

$$\therefore y = 2x \qquad \text{..........(1)}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (−1, 0) และ P(x, y)

$$m_2 = \frac{y - 0}{x - (-1)}$$

$$\therefore \frac{y}{x + 1} = 1$$

$$\therefore y = x + 1 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2x = x + 1$$

$$\therefore x = 1$$

แทน $x = 1$ ลงใน (2) ได้ $y = 2$

ดังนั้น จึงได้ว่า $x = 1, y = 2$

โจทย์ข้อ. 9 เส้นตรง L ตัดแกน X เป็นระยะ $\sqrt{3}$ หน่วยทางขวามือ และตัดแกน Y เหนือแกน X เป็นระยะ 1 หน่วย จงหามุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน X

วิธีทำ

จากโจทย์ จึงได้ว่า เส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุด ($\sqrt{3}$, 0) และตัดแกน Y ที่จุด (0, 1)

ให้ m แทนความชันของเส้นตรง L

$$m = \frac{1 - 0}{0 - \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ให้ θ เป็นมุมเอียงที่เส้นตรง L ทำกับแกน X

$$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

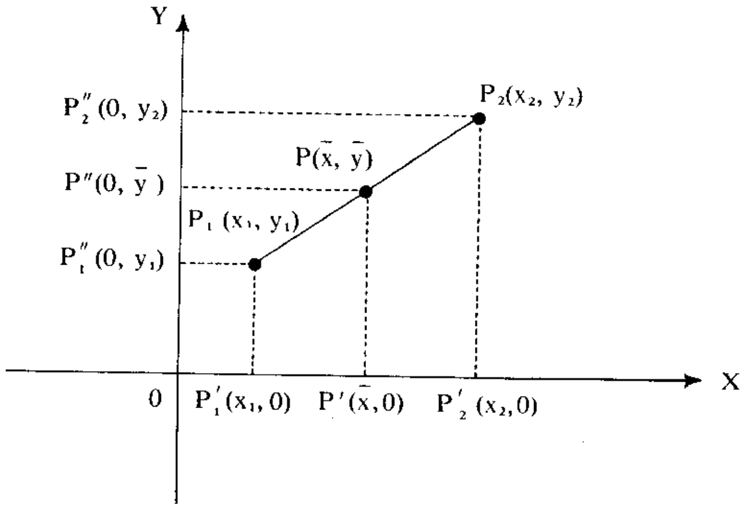
$$\therefore \theta = 150^\circ$$

ดังนั้น มุมเอียงที่เส้นตรง L ทำกับแกน X คือ 150°

โจทย์ข้อ 10. ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุด จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2

วิธีทำ

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุด ดังรูป



ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง P_1P_2 สมมุติมีโคออร์ดิเนตเป็น $(\bar{x}, \bar{y})$

โดยคุณสมบัติของเส้นขนาน จะได้ว่าจุด

$P(\bar{x}, 0)$ เป็นกึ่งกลางของ $P'_1P'_2$

ดังนั้นระยะทาง P'_1P' = ระยะทาง $P'P'_2$

$$\therefore \bar{x} - x_1 = x_2 - \bar{x}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $P''(0, \bar{y})$ ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ $P_1''P_2''$ และก็จะได้ด้วยว่า

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น จุด P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $P_1(x_1, y_1)$ กับ $P_2(x_2, y_2)$ จะมีโคออร์ดิเนตเป็น $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

แบบฝึกหัด 3.3

โจทย์ จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ และที่จุด ซึ่งกำหนดค่า x ให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $y = x^3$ ที่ $x = -1$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^3$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$$
$$= x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$= 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$= 3x^2$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x) = x^3$ ณ ที่จุด (x, y) ใด ๆ มีค่าเท่ากับ $3x^2$

ณ. ที่ $x = -1$ จะได้ว่าความชันของเส้นโค้ง $y = x^3$ มีค่าเท่ากับ 3

2. $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 1$

วิธีทำ

จาก $f(x) = \sqrt{x}$

$\therefore f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้น $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

$$= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x) = \sqrt{x}$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 1$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

3. $y = x^2 - 2x - 3$ ที่ $x = 2$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\therefore f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 3$

$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3$

และ $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x + 3}{\Delta x}$

$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 2)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x - 2$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta - 2)$$

$$= 2x - 2$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x - 3$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $2x - 2$ และความชัน ณ. ที่จุด $x = 2$ คือ 2

4. $y = x^3 - 3x$ ที่ $x = 4$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^3 - 3x$

$$\therefore f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x - x^3 + 3x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3)$$

$$= 3x^2 - 3$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ณ. ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $3x^2 - 3$ และความชัน ณ. ที่ $x = 4$ คือ $3(4)^2 - 3 = 45$

5. $y = x^2(4x + 3) + 1$ ที่ $x = 1$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2(4x + 3) + 1 = 4x^3 + 3x^2 + 1$

$$\therefore f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2 + 1$$

$$= \frac{4x^3 + 12x^2\,\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 + 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1 - 4x^3 - 3x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(12x^2 + 12x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 6x + 3\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 12x^2 + 12x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 6x + 3\Delta x$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12x^2 + 12x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 6x + 3\Delta x)$$

$$= 12x^2 + 6x$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = x^2(4x + 3) + 1$ ณ. จุด (x, y) ใด ๆ คือ $12x^2 + 6x$ และความชัน ณ.ที่ $x = 1$ คือ $12(1)^2 + 6(1) = 18$

แบบฝึกหัด 3.4

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x^4 + 10x^2 + 7x - 4$

วิธีทำ

จาก $y = x^4 + 10x^2 + 7x - 4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^4 + \frac{d}{dx}(10x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx} 4$$

$$= 4x^3 + 20x + 7$$

2. $f(x) = x^8 + 2x^6 - 4x^3 + 6x + 9$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^8 + 2x^6 - 4x^3 + 6x + 9$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 8x^7 + 12x^5 - 12x^2 + 6$$

3. $y = x^2(x^3 - 1)$

วิธีทำ

จาก $y = x^2(x^3 - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(x^3 - 1) + (x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2(3x^2 - 0) + (x^3 - 1)(2x)$$

$$= 3x^4 + 2x^4 - 2x$$

$$= 5x^4 - 2x$$

4. $y = (x - 4)(x^2 + 5)$

วิธีทำ

จาก $y = (x - 4)(x^2 + 5)$

$$\frac{dy}{dx} = (x - 4)\frac{d}{dx}(x^2 + 5) + (x^2 + 5)\frac{d}{dx}(x - 4)$$

$$= (x - 4)(2x + 0) + (x^2 + 5)(1 - 0)$$

$$= 2x^2 - 8x + x^2 + 5$$

$$= 3x^2 - 8x + 5$$

5. $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่

วิธีทำ

จาก $y = ax^2 + bx + c$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(bx) + \frac{d}{dx}c$$

$$= 2ax + b$$

6. $f(s) = (s - 1)^4(s + 2)^3$

วิธีทำ

จาก $f(s) = (s - 1)^4(s + 2)^3$

$$\frac{d}{ds} f(s) = (s-1)^4 \frac{d}{ds}(s+2)^3 + (s+2)^3 \frac{d}{ds}(s-1)^4$$

$$= (s-1)^4 (3)(s+2)^2 \frac{d}{ds}(s+2) + (s+2)^3 (4)(s-1)^3 \frac{d}{ds}(s-1)$$

$$= 3(s-1)^4 (s+2)^2 + 4(s-1)^3 (s+2)^3$$

$$= (s-1)^3 (s+2)^2 (3(s-1) + 4(s+2))$$

$$= (s-1)^3 (s+2)^2 (7s+5)$$

7. $y = (3x^2+1)^2 (x^3+2)^{-4}$

วิธีทำ

จาก $y = (3x^2+1)^2 (x^3+2)^{-4}$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2+1)^2 \frac{d}{dx}(x^3+2)^{-4} + (x^3+2)^{-4} \frac{d}{dx}(3x^2+1)^2$$

$$= (3x^2+1)^2(-4)(x^3+2)^{-5} \frac{d}{dx}(x^3+2) + (x^3+2)^{-4}(2)(3x^2+1) \frac{d}{dx}(3x^2+1)$$

$$= -4(3x^2+1)^2 (x^3+2)^{-5}(3x^2) + 2(x^3+2)^{-4}(3x^2+1)(6x)$$

$$= 12x(3x^2+1)(x^3+2)^{-4}(1 - x(3x^2+1)(x^3+2)^{-1})$$

8. $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right) \frac{(x^3+1)\frac{d}{dx}(x^3-1) - (x^3-1)\frac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3-1)}{(x^3+1)^3}\left\{(x^3+1)(3x^2) - (x^3-1)(3x^2)\right\}$$

$$= \frac{2(x^3-1)}{(x^3+1)^3}(3x^5+3x^2-3x^5+3x^2)$$

$$= \frac{2(x^3-1)(6x^2)}{(x^3+1)^3}$$

$$= \frac{12x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^3}$$

9. $s = (t^2 - t)^{-2}$

วิธีทำ

จาก $s = (t^2 - t)^{-2}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - t)^{-2}$$

$$= -2(t^2 - t)^{-3}\frac{d}{dt}(t^2 - t)$$

$$= -2(t^2 - t)^{-3}(2t - 1)$$

$$= -\frac{2(2t - 1)}{(t^2 - t)^3}$$

10. $s = (t + t^{-1})^2$

วิธีทำ

จาก $s = (t + t^{-1})^2$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t^{-1})^2$$

$$= 2(t^2 + t^{-1})\frac{d}{dt}(t^2 + t^{-1})$$

$$= 2(t^2 + t^{-1})(2t + (-1)t^{-2})$$

$$= 2(t^2 + t^{-1})(2t - t^{-2})$$

11. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^5}$

วิธีทำ

จาก $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^5}$

$$= 3x^{-2} + 5x^{-5}$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(3x^{-2}) + \frac{d}{dx}(5x^{-5})$$

$$= 3(-2x^{-3}) + 5(-5x^{-6})$$

$$= -\frac{6}{x^3} - \frac{25}{x^6}$$

12. $f(u) = 5u + \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt[3]{u^5}$

วิธีทำ

จาก $$f(u) = 5u + \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt[3]{u^5}$$

$$= 5u + u^{-1/2} + u^{5/3}$$

$$\frac{d}{du} f(u) = \frac{d}{du}(5u) + \frac{d}{du}(u^{-1/2}) + \frac{d}{du}(u^{5/3})$$

$$= 5 - \frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{5}{3}u^{2/3}$$

13. $y = (x^2 + 1)^3 (x^3 - 2x + 1)^3$

วิธีทำ

จาก $$y = (x^2 + 1)^3 (x^3 - 2x + 1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 1)^3 + (x^3 - 2x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)^3$$

$$= (x^2 + 1)^3 (3(x^3 - 2x + 1)^2) \frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 1)$$

$$+ (x^3 - 2x + 1)^3 (3(x^2 + 1)^2) \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$= 3(x^2 + 1)^3 (x^3 - 2x + 1)^2 (3x^2 - 2) + 3(x^3 - 2x + 1)^3 (x^2 + 1)^2 (2x)$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 (x^3 - 2x + 1)^2 ((x^2 + 1)(3x^2 - 2) + (x^3 - 2x + 1)(2x))$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 (x^3 - 2x + 1)^2 (3x^4 - 2x^2 + 3x^2 - 2 + 2x^4 - 4x^2 + 2x)$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 (x^3 - 2x + 1)^2 (5x^4 - 3x^2 + 2x - 2)$$

14. $y = \frac{(x^2 - 1)^3}{(x^2 + 1)^2}$

วิธีทำ

จาก $$y = \frac{(x^2 - 1)^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3 - (x^2 - 1)^3 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)^2\,(3\,(x^2-1)^2)\,\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)^3\,(2(x^2+1))\,\frac{d}{dx}\,(x^2+1)\,)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{3(x^2+1)^2\,(x^2-1)^2\,(2x) - 2(x^2-1)^3\,(x^2+1)\,(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x\,(x^2+1)\,(x^2-1)^2\left\{3\,(x^2+1) - 2\,(x^2-1)\right\}}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x\,(x^2+1)\,(x^2-1)^2\,(3x^2+3-2x^2+2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x\,(x^2+1)\,(x^2-1)^2\,(x^2+5)}{(x^2+1)^4}$$

15. $f(x)\ \frac{ax^2+b}{\sqrt{a+x}}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{ax^2+b}{\sqrt{a+x}}$

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{\sqrt{a+x}\,\frac{d}{dx}\,(ax^2+b) - (ax^2+b)\,\frac{d}{dx}\,(a+x)^{\frac{1}{2}}}{a+x}$$

$$= \frac{\sqrt{a+x}\,(2ax) - (ax^2+b)\,(\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d}{dx}\,(a+x)}{a+x}$$

$$= \frac{2ax\,(a+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}(ax^2+b)}{a+x}$$

$$= \frac{ax\,(4a+3x)+b}{2\,(a+x)^{\frac{3}{2}}}$$

โจทย์ จงหา $f'(x_0)$ เมื่อกำหนด x_0 มาให้

16. $f(x) = (2x^2+3x+4)^{\frac{3}{5}},\ x_0 = 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = (2x^2+3x+4)^{\frac{3}{5}}$

$$f'(x) = \frac{3}{5}(2x^2+3x+4)^{-\frac{2}{5}}\,\frac{d}{dx}\,(2x^2+3x+4)$$

$$= \frac{3}{5}(2x^2+3x+4)^{-\frac{2}{5}}\,4x+3)$$

$$= \frac{3\,(4x+3)}{5\,(2x^2+3x+4)^{\frac{2}{5}}}$$

MA 111 (H) 109

ดังนั้น $f'(1) = \dfrac{3(4(1)+3)}{5(2(1)^2+3(1)+4)^{\frac{2}{5}}}$

$= \dfrac{21}{5(\sqrt[5]{81})}$

17. $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}, x_0 = 2$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}$

$= \sqrt{x^4+x^6}$

$= (x^4+x^6)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^4+x^6)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^4+x^6)$

$= \dfrac{4x^3+6x^5}{2\sqrt{x^4+x^6}}$

$= \dfrac{4x+6x^3}{2\sqrt{1+x^2}}$

ดังนั้น $f'(2) = \dfrac{4(2)+6(2)^3}{2\sqrt{1+(2)^2}}$

$= \dfrac{28}{\sqrt{5}}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^3, x_0 = 4$

วิธีทำ

จาก $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(x-3}{x+3}\right)$

$= 3\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2\left(\dfrac{(x+3)-(x-3)}{(x+3)^2}\right)$

$= \dfrac{18(x-3)^2}{(x+3)^4}$

ดังนั้น $f'(4) = \frac{18(4-3)^2}{(4+3)^4}$

$= \frac{18}{2401}$

19. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x_0 = 0$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(2x-1) - (2x-1)\frac{d}{dx}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2) - (2x-1)\left(\frac{1}{2}(1+x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x(2x-1)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}$$

ดังนั้น $f'(0) = \frac{2-0}{1+0}$

$= 2$

20. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2\sqrt{3-2x}$ ที่ $x = 0$
และพิจารณาดูว่า f (x) หาอนุพันธ์ที่จุดใดไม่ได้

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^2\sqrt{3-2x}$

$$f'(x) = 2x^2 \frac{d}{dx}(3-2x)^{\frac{1}{2}} + (3-2x)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(2x^2)$$

$$= 2x\left(\frac{1}{2}(3-2x)^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{d}{dx}(3-2x) + (3-2x)^{\frac{1}{2}}(4x)$$

$$= -4x^2(3-2x)^{\frac{1}{2}} + 4x(3-2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4x\sqrt{(3-2x)} - \frac{4x^2}{\sqrt{3-2x}}$$

ดังนั้น $f'(0) = 0$

และ $f(x)$ นี้จะหาอนุพันธ์ไม่ได้ เมื่อ $3 - 2x \leqslant 0$

นั่นคือ $f(x) = 2x^2\sqrt{3-2x}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้

เมื่อ $x \geqslant \frac{3}{2}$

แบบฝึกหัด 3.5

โจทย์ข้อ 1 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดให้

(1) $y = 2u,\ u = 3x$

วิธีทำ จาก $y = 2u$ จะได้ $\frac{dy}{du} = 2$

และ $u = 3x$ จะได้ $\frac{du}{dx} = 3$

จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= (2)(3)$

$= 6$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6$

(2) $y = 2t^2 + 3t,\ t = 2x$

วิธีทำ จาก $y = 2t^2 + 3t$ จะได้ $\frac{dy}{dt} = 4t + 3$

และ $t = 2x$ จะได้ $\frac{dt}{dx} = 2$

จาก
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= (4t + 3)(2) \\ &= 2\big(4(2x) + 3\big) \\ &= 2(8x + 3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 2(8x + 3)$

(3) $y = u^3 + 2u^2,\ u = x^2 - 1$

วิธีทำ จาก $y = u^3 + 2u^2$ จะได้ $\frac{dy}{du} = 3u^2 + 4u$

และ $u = x^2 - 1$ จะได้ $\frac{du}{dx} = 2x$

จาก
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (3u^2 + 4u)(2x) \\ &= \big(3(x^2 - 1)^2 + 4(x^2 - 1)\big)(2x) \\ &= (3x^4 - 6x^2 + 3 - 4x^2 - 4)(2x) \\ &= 2x(3x^4 - 2x^2 - 1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 2x(3x^4 - 2x^2 - 1)$

(4) $y = 5t^2 + 6t + 1, t = 2x + 1$

วิธีทำ จาก $y = 5t^2 + 6t + 1$ จะได้ $\frac{dy}{dt} = 10t + 6$

และ $t = 2x + 1$ จะได้ $\frac{dt}{dx} = 2$

จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$$= (10t + 6)(2)$$

$$= 2(10(2x + 1) + 6)$$

$$= 2(20x + 10 + 6)$$

$$= 2(20x + 16)$$

โจทย์ข้อ 2 จงหา $\frac{dx}{dy}$ เมื่อกำหนดให้

(1) $y = 2x - 3$

วิธีทำ จาก $y = 2x - 3$

ได้ $\frac{dy}{dx} = 2$

จาก $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ดังนั้น $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$

(2) $y = 6\sqrt{x - 1}$

วิธีทำ จาก $y = 6\sqrt{x - 1}$

ได้ $\frac{dy}{dx} = 6 \frac{d}{dx}(x - 1)^{1/2}$

$$= 6\left(\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x-1}}$$

จาก $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$= \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}$$

ดังนั้น $\frac{dx}{dx} = \frac{\sqrt{x-1}}{3}$

(3) $y = 2x^3 - x^2 + 6x$

วิธีทำ จาก $y = 2x^2 - x^2 + 6x$

ได้ $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x + 6$

จาก $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ดังนั้น $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 - 2x + 6}$

(4) $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

วิธีทำ จาก $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

ได้ $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

จาก $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ดังนั้น $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$

โจทย์ ข้อ 3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยใช้กฎลูกโซ่

(1) $f(x) = (4x^2 - 5)^9$

วิธีทำ ให้ $u = 4x^2 - 5$

ดังนั้น $f(x) = u^9$

$\frac{d}{du} f(x) = 9u^8$

และจาก $u = 4x^2 - 5$

$\frac{du}{dx} = 8x$

ดังนั้น $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{du} f(x) \quad \frac{du}{dx}$

$= (9u^8)(8x)$

$= 9(4x^2 - 5)^8 (8x)$

$= 72x(4x^2 - 5)^8$

(2) $f(x) = (x^3 + x - \frac{1}{x})^{-2}$

วิธีทำ ให้ $u = x^3 + x - \frac{1}{x} = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}$

ดังนั้น $f(x) = u^{-2}$

$\frac{d}{du} f(x) = -2u^{-3}$

และจาก $u = x^3 + x - x^{-1}$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 1 - (-1)x^{-2}$

$= 3x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$

$= \frac{3x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}f(x) \quad \frac{du}{dx}$

$$= (-2u^{-3})\left(\frac{3x^4+x^2+1}{x^2}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{u^3}\right)\left(\frac{3x^4+x^2+1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{2x^3}{(x^4+x^2-1)^3}\left(\frac{3x^4+x^2+1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x(3x^4+x^2+1)}{(x^4+x^2-1)^3}$$

โจทย์ ข้อ 4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \frac{u^2}{u^2+1}$, $u = \sqrt{2x+1}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{u^2}{u^2+1}$

ได้ $\frac{dy}{du} = \frac{(u^2+1)\frac{d}{du}(u^2) - u^2\frac{d}{du}(u^2+1)}{(u^2+1)^2}$

$$= \frac{2u(u^2+1) - 2u^3}{(u^2+1)^2}$$

$$= \frac{2u}{(u^2+1)^2}$$

และ $u = \sqrt{2x-1}$

ได้ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2x-1)$

$$= \frac{1}{(2x-1)^{1/2}}$$

จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$= \frac{2u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$= \left(\frac{2u}{u^4+2u^2+1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x-1})^4 + 2(\sqrt{2x-1})^2 + 1} \right) \frac{1}{(\sqrt{2x-1})}$$

$$= \frac{2}{(2x-1)^2 + 2(2x-1) + 1}$$

$$= \frac{2}{(2x-1)(2x-1+2) + 1}$$

$$= \frac{2}{(2x-1)(2x+1) + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{2x^2}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2}$

โจทย์ข้อ 5. จงหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อกำหนดให้ $y = 3u^2+1$, $u = \sqrt{2x-3}$, $x = 3t - 1$

วิธีทำ

จาก $y = 3u^2+1$ ได้ $\frac{dy}{du} = 6x$

$u = \sqrt{2x-3}$ ได้ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

และ $x = 3t-1$ ได้ $\frac{dx}{dt} = 3$

จาก $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$= (6u)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)(3)$$

$$= (6\sqrt{2x-3})\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)(3)$$

$$= 18$$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.6

โจทย์ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $x^3+3y^3 = 3$

วิธีทำ จาก $x^3+3y^3 = 3$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$3x^2+9y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2}{9y^2}$$

$$= -\frac{x^2}{3y^2}$$

2. $x^3+6xy+4y^2 = 5$

วิธีทำ จาก $x^3+6xy+4y^2 = 5$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$3x^2+6x\frac{dy}{dx}+6y+8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(6x+8y)\frac{dy}{dx} = -3x^2-6y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2+2y)}{2(3x+4y)}$$

3. $y+2\sqrt{xy}+x^4 = 6$

วิธีทำ จาก $y+2\sqrt{xy}+x^4 = 6$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$\frac{dy}{dx}+2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{y}+2\sqrt{y}\frac{d}{dx}\sqrt{x}+4x^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+4x^3 = 0$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\frac{dy}{dx} = -4x^3-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(4x^3+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

4. $xy^3 + yx^3 - 4 = 0$

วิธีทำ จาก $xy^3 + yx^3 - 4 = 0$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} + y^3 + 3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3xy^2 + x^3) \frac{dy}{dx} = -y^3 - 3x^2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y\,(y^2 + 3x^2)}{x\,(3y^2 + x^2)}$$

5. $\dfrac{y}{x+y} = 3$

วิธีทำ จาก $\dfrac{y}{x+y} = 3$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$\frac{(x+y)\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{d}{dx}(x+y)}{(x+y)^2} = 0$$

$$(x+y)\frac{dy}{dx} - y\,(1 + \frac{dy}{dx}) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

6. $xy = 3$

วิธีทำ จาก $xy = 3$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

7. $y^3 - 3y + 4ax^2 = 0$, a เป็นค่าคงที่

วิธีทำ จาก $y^3 - 3y + 4ax^2 = 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} + 8ax = 0$$

$$(3y^2 - 3)\frac{dy}{dx} = -8ax$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-8ax}{3y^2 - 3}$$

8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

วิธีทำ จาก $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

9. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

วิธีทำ จาก $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$x\frac{dy}{dx}(1+y)^{\frac{1}{2}} + (1+y)^{\frac{1}{2}} + y\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}x(1+y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + (1+y)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y(1+x)^{-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}x(1+y)^{-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)\frac{dy}{dx} = -(1+y)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}\right)\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1+y} - \frac{y}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\left(\frac{x + 2\sqrt{(1+y)(1+x)}}{2\sqrt{1+y}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{(1+y)(1+x)} - y}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-4(1+y)\sqrt{1+x} - 2y\sqrt{1+y}}{2x\sqrt{1+x} + 4(1+x)\sqrt{1+y}}$$

10. $\sqrt{xy} + y^2 = x$

วิธีทำ จาก $\sqrt{xy} + y^2 = x$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\frac{d}{dx}(xy) + 2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2y\right)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 2y\right)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x} + 4\sqrt{y^3}}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{xy} - 2y}{2x + 8y\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{2\sqrt{xy} - y}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

11. $x = \dfrac{x + y}{x - y}$

วิธีทำ จาก $x = \dfrac{x + y}{x - y}$

หรือ $x^2 - xy = x + y$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$2x - x\frac{dy}{dx} + y = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} = 2x + y - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{1 + x}$$

12. $xy(x + y) = 0$

วิธีทำ จาก $xy(x + y) = 0$ ได้

$$x^2y + xy^2 = 0$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$(x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = -2xy - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y(2x + y)}{x(x + 2y)}$$

โจทย์ จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (x_0, y_0) ที่กำหนดให้

13. $x^2 - xy + y^3 = -5$ ที่จุด $(1, -2)$

วิธีทำ จาก $x^2 - xy + y^3 = -5$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$2x - x \frac{dy}{dx} - y + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 - x) \frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{3y^2 - x}$$

ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $x^2 - xy + y^3 = -5$ ที่จุด $(1, -2)$ ก็คือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = 1, y = -2} = \frac{-2 - 2(1)}{3(-2)^2 - 1}$$

$$= -\frac{4}{11}$$

14. $xy^2 - y = x + 4$ ที่จุด $(0, -4)$

วิธีทำ จาก $xy^2 - y = x + 4$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(2xy - 1)\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{2xy - 1}$$

ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy^2 - y = x + 4$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(0, -4)$ คือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\,y=-4} = \frac{1 - (-4)^2}{2(0)(-4) - 1}$$

$$= 15$$

15. $x - \sqrt{xy} = 2y$ ที่จุด $(8, 2)$

วิธีทำ จาก $x - \sqrt{xy} = 2y$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างได้

$$1 - \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\frac{d}{dx}(xy) = 2\frac{dy}{dx}$$

$$1 - \frac{x}{2\sqrt{xy}}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2\sqrt{xy}} = 2\frac{dy}{dx}$$

$$-\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - 1$$

$$\frac{(x + 4\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}}\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{xy} - y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{xy} - y}{x + 4\sqrt{xy}}$$

ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x - \sqrt{xy} = 2y$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ
ความชันเส้นโค้งที่จุด (8, 2)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=8\\y=2}} = \frac{2(4) - 2}{8 + 4(4)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

แบบฝึกหัด 3.7

โจทย์ จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 และอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^5 - x^3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^5 - x^3$

จะได้ $f'(x) = 5x^4 - 3x^2$

$f''(x) = 20x^3 - 6x$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 5) - x(2x)}{(x^2 - 5)^2}$

$= \dfrac{-x^2 - 5}{(x^2 - 5)^2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2-5)^2 \frac{d}{dx}(-x^2-5) - (-x^2-5)\frac{d}{dx}(x^2-5)^2}{(x^2-5)^4}$$

$$= \frac{(x^2-5)^2(-2x) - (-x^2-5)(2(x^2-5))(2x)}{(x^2-5)^4}$$

$$= \frac{2x(x^4+10x^2-75)}{(x^2-5)^4}$$

3. $f(x) = (x-x^2)^8$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x-x^2)^8$

จะได้ $f'(x) = 8(x-x^2)^7 \frac{d}{dx}(x-x^2)$

$$= 8(x-x^2)^7(1-2x)$$

$$f''(x) = 8\left((x-x^2)^7 \frac{d}{dx}(1-2x) + (1-2x)\frac{d}{dx}(x-x^2)^7\right)$$

$$= 8\left((x-x^2)^7(0-2) + (1-2x)(7(x-x^2)^6 \frac{d}{dx}(x-x^2)\right)$$

$$= 16(x-x^2)^7 + 7(x-x^2)^6(1-2x)^2$$

$$= (x-x^2)^6(7(1-2x)^2 - 16(x-x^2))$$

$$= (x-x^2)^6(7-44x+44x^2)$$

4. $f(x) = 2(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$= 2(x^{1/2} - x^{-1/2})$$

จะได้ $f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\right)$

$$= x^{-1/2} + x^{-3/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} - \frac{3}{2}x^{-5/2}$$
$$= -\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\right)$$
$$= -\left(\frac{x+3}{2x^2\sqrt{x}}\right)$$

5. $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x + 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x + 1$
$$= x^{5/2} + \frac{3}{2}x + 1$$
จะได้ $f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}$
$$f''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$$
$$= \frac{15\sqrt{x}}{4}$$

โจทย์ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6. $x^2 - 5y^2 = 8$

วิธีทำ จาก $x^2 - 5y^2 = 8$

จะได้ $2x - 10y\frac{dy}{dx} = 0$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{5y}$$
และ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5y - 5x\frac{dy}{dx}}{25y^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{x}{5y}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5y - \frac{x^2}{y}}{25y^2}$$

$$= \frac{5y^2 - x^2}{25y^3}$$

7. $x + xy + y = 4$

วิธีทำ

จาก $x + xy + y = 4$

จะได้ $$1 + x\frac{dy}{dx} + y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = -1 - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(y+1)}{x+1}$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)(-\frac{dy}{dx}) - (-(y+1))}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)\frac{dy}{dx} + (y+1)}{(x+1)^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{-(y+1)}{x+1}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(x+1)\left(-\frac{(y+1)}{x+1}\right) + (y+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(y+1)}{(x+1)^2}$$

8. $y^2 + 3xy = 20$

วิธีทำ จาก $y^2 + 3xy = 20$

จะได้ $$2y \frac{dy}{dx} + 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$(2y + 3x) \frac{dy}{dx} = -3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{(2y + 3x)}$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y + 3x)(-3\frac{dy}{dx}) - (-3y)(2\frac{dy}{dx} + 3)}{(2y + 3x)^2}$$

$$= \frac{-3(2y + 3x)\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} + 9y}{(2y + 3x)^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{-3y}{2y + 3x}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3(2y + 3x)(\frac{-3y}{2y + 3x}) + 6y(\frac{-3y}{2y + 3x}) + 9y}{(2y + 3x)^2}$$

$$= \frac{18y - \frac{18y^2}{2y + 3x}}{(2y + 3x)^2}$$

$$= \frac{18y^2 + 54xy}{(2y + 3x)^3}$$

$$= \frac{18y(y + 3x)}{(2y + 3x)^3}$$

9. $x^3y + xy^3 = 5x$

วิธีทำ จาก $x^3y + xy^3 = 5x$

จะได้ $$x^3 \frac{dy}{dx} + 3x^2y + 3xy^2 \frac{dy}{dx} + y^3 = 5$$

$$(x^3 + 3xy^2)\frac{dy}{dx} = 5 - y^2 - 3x^2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5 - y^3 - 3x^2y}{x^3 + 3xy^2}$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^3 + 3xy^2)\frac{d}{dx}(5 - y^3 - 3x^2y) - (5 - y^3 - 3x^2y)\frac{d}{dx}(x^3 + 3xy^2)}{(x^3 + 3xy^2)^2}$$

$$= \frac{(x^3+3xy^2)\left(-3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^2\frac{dy}{dx} - 6xy\right) - (5-y^3-3x^2y)\left(3x^2+6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\right)}{(x^3+3xy^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^3+3xy^2)^2}\ -3x^3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^5\frac{dy}{dx} - 6x^4y - 9xy^4\frac{dy}{dx} - 9x^3y^2\frac{dy}{dx} - 18x^2y^3 - 15x^2 - 30xy\frac{dy}{dx}$$

$$-15y^2 + 3x^2y^3 + 6xy^4\frac{dy}{dx} + 3y^5 + 9x^4y + 18x^3y^2\frac{dy}{dx} + 9x^2y^3)$$

$$= \frac{1}{(x^3 + 3xy^2)^2}\left(-12x^3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^5\frac{dy}{dx} + 3x^4y - 3xy^4\frac{dy}{dx} - 6x^2y^3 - 15x^2 - 30xy\frac{dy}{dx}\right.$$

$$\left.-15y^2 + 3y^5\right)$$

$$= \frac{3x^4y - 6x^2y^3 - 15x^4 - 15y^2 + 3y^5 - (12x^3y^2 + 3x^5 + 3xy^4 + 30xy)\frac{dy}{dx}}{(x^3 + 3xy^2)^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{5 - y^3 - 3x^2y}{x^3 + 3xy^2}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^4y - 6x^2y^3 - 15x^4 - 15y^2 + 3y^5 - (12x^3y^2 + 3x^5 + 3xy^4 + 30xy)\frac{(5 - y^3 - 3x^2y)}{x^3 + 3xy^2}}{(x^3+3xy^2)^2}$$

$$= \frac{(x^3+3xy^2)(3x^4y - 6x^2y^3 - 15x^4 - 15y^2 + 3y^5) - (12x^3y^2 + 3x^5 + 3xy^4 + 30xy)(5 - y^3 - 3x^2y)}{(x^3+3xy^2)^3}$$

10. $xy + x^2y^2 + y = 5$

วิธีทำ จาก $xy + x^2y^2 + y = 5$

จะได้ $$x\frac{dy}{dx} + y + 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 2x^2y + 1)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + 2x^2y + 1}$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2x^2y + 1)(-\frac{dy}{dx}) - (-y)(1 + 2x^2\frac{dy}{dx} + 4xy)}{(x + 2x^2y + 1)^2}$$

$$= \frac{-(x + 2x^2y + 1)\frac{dy}{dx} - (-y - 2x^2y\frac{dy}{dx} - 4xy^2)}{(x + 2x^2y + 1)^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{-y}{x + 2x^2y + 1}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(x + 2x^2y + 1)\left(\frac{-y}{x + 2x^2y + 1}\right) + y + 2x^2y^2\left(\frac{-y}{x + 2x^2y + 1}\right) + 4xy^2}{(x + 2x^2y + 1)^2}$$

$$= \frac{2y + 4xy^2 - \frac{2x^2y^3}{x + 2x^2y + 1}}{(x + 2x^2y + 1)^2}$$

$$= \frac{(2y + 4xy^2)(x + 2x^2y + 1) - 2x^2y^3}{(x + 2x^2y + 1)^3}$$

โจทย์ข้อ 11. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ $y = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + 1)\frac{d}{dx}(3x^2 + 2x) - (3x^2 + 2x)\frac{d}{dx}(x + 1)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)(6x + 2) - (3x^2 + 2x)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 10x + 2}{(x + 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)^2 \frac{d}{dx}(3x^2+10x+2) - (3x^2+10x+2)\frac{d}{dx}(x+1)^2}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)^2(6x+10) - 2(3x^2+10x+2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-4x^2-4x+6}{(x+1)^4}$$

และ $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(x+1)^4 \frac{d}{dx}(-4x^2-4x+6) - (-4x^2-4x+6)\frac{d}{dx}(x+1)^4}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{(x+1)^4(-8x-4) - 4(-4x^2-4x+6)(x+1)^3}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{(x+1)^3((x+1)(-8x-4) - 4(-4x^2-4x+6))}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{-8x^2-4x-8x-4+16x^2+16x-24}{(x+1)^5}$$

$$= \frac{8x^2+4x-28}{(x+1)^5}$$

$$= \frac{4(2x^2+x-7)}{(x+1)^5}$$

โจทย์ข้อ 12. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $y = \sqrt{3x-1}$

วิธีทำ จาก $y = (3x-1)^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x-1)^{-1/2}(3)$$

$$= \frac{3}{2}(3x-1)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4}(3x-1)^{-3/2}(3)$$

$$= -\frac{9}{4}(3x-1)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{27}{8}(3x-1)^{-5/2}(3)$$

$$= \frac{81}{8}(3x-1)^{-5/2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{405}{16}(3x-1)^{-7/2}(3)$$

$$= -\frac{1215}{16}(3x-1)^{-7/2}$$

$$= -\frac{1215}{16(3x-1)^{7/2}}$$

โจทย์ข้อ 13. กำหนดให้ $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

วิธีทำ จาก $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8$

ได้ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

ให้ $4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$

$$4x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$4x\ (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$4x\ (x-2)\ (x-1) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

โจทย์ข้อ 14. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ $x^2 - y^2 = 4$

วิธีทำ จาก $x^2 - y^2 = 4$

จะได้ $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

MA 111 (H) 133

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

แทน $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{x}{y}$

ได้ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{y^3}$$

และ $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y^3 \frac{d}{dx}(y^2 - x^2) - (y^2 - x^2)\frac{d}{dx}y^3}{y^6}$$

$$= \frac{y^3 (2y\frac{dy}{dx} - 2x) - (y^2 - x^2)(3y^2\frac{dy}{dx})}{y^6}$$

แทน $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $\frac{x}{y}$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y^3 (2y(\frac{x}{y}) - 2x) - (y^2 - x^2)(3y^2(\frac{x}{y}))}{y^6}$$

$$= \frac{2xy^3 - 2xy^3 - 3xy^3 + 3x^3 y}{y^6}$$

$$= \frac{3xy(x^2 - y^2)}{y^6}$$

$$= \frac{3x(x^2 - y^2)}{y^5}$$

โจทย์ข้อ 15. จงหา n ซึ่ง $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ เมื่อกำหนด $y = 3x^2 - 4x^3 + 7x^4 - 11x^5$

วิธีทำ

จาก $y = 3x^2 - 4x^3 + 7x^4 - 11x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 12x^2 + 28x^3 - 55x^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 - 24x + 84x^2 - 220x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -24 + 168x - 660x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 168 - 1320x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -1320$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = 0$$

จึงได้ว่า เมื่อกำหนด $y = 3x^2 - 4x^3 + 7x^4 - 11x^5$ แล้ว $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ เมื่อ $n = 6$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.8

โจทย์ข้อ 1. สำหรับ $f(x) = 3x^2 + 6x$ บนช่วง $[-3, 0]$ จงหาจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของ f

วิธีทำ

จาก $f(x) = 3x^2 + 6x$

$\therefore f'(x) = 6x + 6$

ให้ $f'(x) = 0$

นั่นคือ $6x + 6 = 0$

$\therefore x = -1$

พิจารณาว่า ณ. ที่จุด $x = -1$ ค่าของ $f(x)$ จะให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (โดยพิจารณาตามนิยาม 3.3 และ 3.4)

พิจารณา $f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1)$

$= -3$

และ $f(-1+h) = 3(-1+h)^2 + 6(-1+h)$

$$= 3(1-2h+h^2) + 6(-1+h)$$

$$= 3 - 6h + 3h^2 - 6 + 6h$$

$$= 3h^2 - 3$$

จะเห็นว่า $3h^2 - 3 - (-3) \geqslant 0$ สำหรับ h ที่เข้าใกล้ศูนย์

นั่นคือ $f(-1+h) - f(-1) \geqslant 0$ สำหรับ h ที่เข้าใกล้ศูนย์

หรือ $f(-1) \leqslant f(-1+h)$ สำหรับ h ที่เข้าใกล้ศูนย์

จึงกล่าวได้ว่า f มีค่าต่ำสุดที่ $x = -1$

โจทย์ข้อ 2. จงแสดงว่าข้อต่อไปนี้สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ และหาค่า c บนช่วงที่กำหนด ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์

2.1) $f(x) = 2x(x-1), [0, 1]$

วิธีทำ

จาก $f(x) = 2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

จะได้ว่า $f(0) = 2(0)^2 - 2(0) = 0$

และ $f(1) = 2(1)^2 - 2(1) = 0$

และเพราะว่า $f'(x) = 4x - 2$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x \in [0, 1]$

ดังนั้น f(x) มีความต่อเนื่องบน [0, 1] และหาอนุพันธ์ได้บน [0, 1]

เพราะฉะนั้น f สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ในช่วงปิด [0, 1]

จึงต้องมี $x = c$ อย่างน้อยหนึ่งค่า ซึ่ง $c \in (0, 1)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

พิจารณา $f'(c) = 4(c) - 2 = 0$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของ f(x) มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \frac{1}{2}$

2.2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8, [-2, 2]$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

จะได้ว่า $f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 - 8$
$= 16 - 8 - 8$
$= 0$

และ $f(2) = 2^4 - 2(2)^4 - 8$
$= 16 - 8 - 8$
$= 0$

และเพราะว่า $f'(x) = 4x^3 - 4x$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ ค่า $x \in [-2, 2]$
ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[-2, 2]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(-2, 2)$
เพราะฉะนั้น f สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ในช่วงปิด $[-2, 2]$
จึงต้องมี $x = c$ อย่างน้อยหนึ่งค่า ซึ่ง $c \in (-2, 2)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

$$\therefore f'(c) = 4c^3 - 4c = 0$$
$$4c(c^2 - 1) = 0$$
$$\therefore c = 0, 1, -1$$

เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)$มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = -1, x = 0$ และ $x = 1$

โจทย์ข้อ 3. สำหรับแต่ละ $f(x)$ ต่อไปนี้ จงแสดงว่าสอดคล้องกับข้อสมมุติของทฤษฎีบทค่ากลางบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่า c ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทด้วย

3.1) $f(x) = x^2 + 2x - 1, [0, 1]$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$\therefore f'(x) = 2x + 2$ หาค่าได้ทุกค่าของ $x \in [0, 1]$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(0, 1)$

เพราะว่า $f(1) = (1)^2 + 2(1) - 1 = 2$

และ $f(0) = 0^2 + 2(0) - 1 = -1$

$$\therefore \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = 3$$

ให้ $f'(c) = 3$

ดังนั้น $2c + 2 = 3$

$$c = \frac{1}{2}$$

โดย $\frac{1}{2} \in (0, 1)$

ดังนั้น จึงได้ว่าค่า c ที่สอดคล้องคือ $c = \frac{1}{2}$

3.2) $f(x) = x^{2/3}$, $[0, 1]$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^{2/3}$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(0, 1)$

$\because \quad f(1) = 1$ และ $f(0) = 0$

$$\therefore \quad \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

ให้ $f(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = 1$

ดังนั้น $\sqrt[3]{c} = \frac{2}{3}$

$$\therefore c = \frac{8}{27}$$

โดย $\frac{8}{27} \in (0, 1)$

ดังนั้น จึงได้ว่า ค่า c ที่สอดคล้องคือ $c = \frac{8}{27}$

3.3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 5}, [-1, 4]$

วิธีทำ

จาก $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 5}$

$$= x - 8 + \frac{36}{x + 5}$$

$$\therefore \quad f'(x) = 1 - \frac{36}{(x + 5)^2}$$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 4]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(-1, 4)$

$$\because \quad f(4) = \frac{4^2 - 3(4) - 4}{4 + 5}$$

$$= 0$$

และ $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 3(-1) - 4}{-1 + 5}$

$$= 0$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{0}{5}$$

$$= 0$$

ให้ $f'(c) = 1 - \dfrac{36}{(c + 5)^2} = 0$

$$(c + 5)^2 - 36 = 0$$

$$(c + 5)^2 = 36$$

$$c + 5 = \pm 6$$

$$\therefore c = 1, -11$$

โดย $1 \in (-1, 4)$ แต่ $-11 \notin (-1, 4)$

ดังนั้น ค่า c ที่สอดคล้องคือ $c = 1$