บทที่ 2
ลิมิต และ ความต่อเนื่อง

(1) ค่าของลิมิตต่างกับค่าของฟังก์ชัน คือ f (a) หมายถึง การแทนค่า $x = a$ ของ f (x) แต่ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเข้าใกล้ค่าอะไร ซึ่งอาจเท่ากับ f (a) หรือไม่เท่ากันก็ได้

ถ้าเท่ากันเรียกว่า f ต่อเนื่องที่ a

(2) **นิยามของลิมิต**

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง ทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

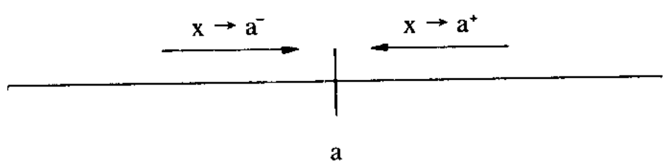
ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \in$

(3) **ลิมิตขวา ลิมิตซ้าย**

พิจารณา $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ แยกได้ 2 แบบ คือ

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$: ลิมิตทางขวา

2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$: ลิมิตทางซ้าย



MA 111 (H) 35

(4) ทฤษฎีบทของลิมิตที่ควรทราบ

1. ถ้าลิมิตมีค่าแล้ว จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น
2. $\lim\limits_{x \to a} C = C$
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} C f(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] \left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]$
6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

(5) การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันพีชคณิต นอกจากจะใช้ทฤษฎีบทแล้วเรายังแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีใหญ่ ๆ คือ

1. x เข้าใกล้ค่าคงที่
2. x เข้าใกล้ค่าอนันต์

x เข้าใกล้ค่าคงที่

1. ถ้าเป็นฟังก์ชันพหุนามแล้วหาได้เสมอ
2. ถ้าเป็นเศษส่วนแล้ว เมื่อทดสอบจะได้ว่าเศษเข้าใกล้ 0 ส่วนเข้าใกล้ 0 คือลักษณะ $\frac{0}{0}$ แล้วแก้ปัญหาโจทย์ได้โดย

   2.1 แยกตัวประกอบ (factor)

   2.2 ใช้ตัวคอนจูเกต (conjugate)

x **เข้าใกล้ค่าอนันต์**

1. ถ้าเป็นฟังก์ชันพหุนาม ลิมิตอาจหาค่าไม่ได้เสมอ (คือ ค่าลิมิตอาจเป็น ∞ หรือ $-\infty$)
2. **ถ้าเป็นเศษส่วน พิจารณากำลังสูงสุดของเศษและส่วน จะได้ว่า**

   2.1 กำลังสูงสุดของเศษ > กำลังสูงสุดของส่วน
   ค่าลิมิตหาค่าไม่ได้

   2.2 กำลังสูงสุดของเศษ < กำลังสูงสุดของส่วน
   ค่าลิมิต = 0

   2.3 **กำลังสูงสุดของเศษ = ส่วน**

   $$\text{ค่าลิมิต} = \frac{\text{ส.ป.ส.ของกำลังสูงสุดของเศษ}}{\text{ส.ป.ส.ของกำลังสูงสุดของส่วน}}$$

(6) **ลิมิตหาค่าไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ**

1. ค่าลิมิตเป็นอนันต์ (∞ หรือ $-\infty$)
2. ค่าลิมิตมีมากกว่า 1 ค่า
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

(7) **ฟังก์ชันตรีโกณ ปัญหาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณ แก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทที่สำคัญ คือ**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(8) **ข้อสังเกตที่ได้จากลิมิตฟังก์ชันตรีโกณ**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{mx} = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{m}$
4. **ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปอื่นเปลี่ยนเป็น sin, cos ก่อนที่จะแก้ปัญหาจะสะดวก**

(9) $f(x)$ **ต่อเนื่องที่** $x = a$ **ก็ต่อเมื่อ**

1. $f(x)$ **หาค่าได้ที่** a
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **หาค่าได้**
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

แบบฝึกหัด 2.1

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาลิมิตได้หรือไม่ ถ้าฟังก์ชั่นใดหาลิมิตได้จงบอกค่าลิมิตนั้น

โจทย์ ข้อ 1 $\lim\limits_{x\to 0}(2x - 1)$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x\to 0^+}(2x - 1) = -1$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}(2x - 1) = -1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x - 1) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x - 1)$

แสดงว่า ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ -1 #

โจทย์ ข้อ 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|} =$ หาค่าไม่ได้

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|} =$ หาค่าไม่ได้

สรุป $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$ หาค่าไม่ได้ #

โจทย์ ข้อ 3 $\lim\limits_{x\to 1}(2 + 5x)$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x\to 1^+}(2 + 5x) = 7$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-}(2 + 5x) = 7$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+}(2 + 5x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2 + 5x)$

แสดงว่า ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 7 #

โจทย์ ข้อ 4 $\lim_{x\to 1} \frac{3}{x+1}$

วิธีทำ $\because \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2}$

$\because \lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x+1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x+1}$

แสดงว่า ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{2}$ #

โจทย์ ข้อ 5 $\lim_{x\to 2} \frac{1}{3x-6}$

วิธีทำ $\because \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{3x-6}$ = หาค่าไม่ได้

$\because \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{3x-6}$ = หาค่าไม่ได้

แสดงว่า ลิมิตหาค่าไม่ได้

โจทย์ ข้อ 6 $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x-3}$

วิธีทำ เพราะว่า $x\to 3$ แสดงว่า $x \neq 3$ ดังนั้น

$$\frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} 2$

และ $\lim_{x\to 3^+} 2 = 2$

$\lim_{x\to 3^-} 2 = 2$

แสดงว่า ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 2 #

โจทย์ ข้อ 7 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - 3)}{x - 3}$

$= \lim_{x \to 3} x - 3$

$\because \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$ และ $\lim_{x \to 3^-} (x - 3) = 0$

แสดงว่า ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 0 #

โจทย์ ข้อ 8 $\lim_{x \to 0} (x + \frac{1}{x})$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0} (x + \frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0} (\frac{x^2 + 1}{x})$

$\because \lim_{x \to 0^+} (\frac{x^2 + 1}{x}) =$ หาค่าไม่ได้

$\lim_{x \to 0^-} (\frac{x^2 + 1}{x}) =$ หาค่าไม่ได้

แสดงว่า ลิมิตหาค่าไม่ได้ #

โจทย์ ข้อ 9 $\lim_{x \to 1} (x + \frac{1}{x})$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to 1} (x + \frac{1}{x}) = \lim_{x \to 1} (\frac{x^2 + 1}{x})$

และ $\lim_{x \to 1^+} (\frac{x^2 + 1}{x}) = 2$

$\lim_{x \to 1^-} (\frac{x^2 + 1}{x}) = 2$

แสดงว่า ลิมิตทางขวาและทางซ้ายเท่ากัน

เพราะฉะนั้น ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 2 #

โจทย์ ข้อ 10 $\lim_{x \to -2} x^2$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to -2^+} x^2 = 4$

และ $\lim_{x \to -2^-} x^2 = 4$

แสดงว่า $\lim_{x \to -2^+} x^2 = \lim_{x \to -2^-} x^2$

เพราะฉะนั้น ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 4 #

โจทย์ ข้อ 11 $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x + 1}$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x + 1} = 4$

และ $\lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x + 1} = 4$

แสดงว่า $\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x + 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x + 1}$

เพราะฉะนั้น ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 4 #

โจทย์ ข้อ 12 $\lim_{x \to 0} \frac{2x - 5x^2}{x}$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to 0} \frac{x(2 - 5x)}{x} = \lim_{x \to 0} (2 - 5x)$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} (2 - 5x) = 2$

และ $\lim_{x \to 0^-} (2 - 5x) = 2$

แสดงว่าลิมิตทางขวาและทางซ้ายเท่ากัน

สรุปว่าลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 2 # #

โจทย์ข้อ 13 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ = หาค่าไม่ได้

และ $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^+-1}$ = หาค่าไม่ได้

แสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 14 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^2+x+1$$

$\because \lim\limits_{x \to 1^+} x^2+x+1 = 3$

และ $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2+x+1 = 3$

แสดงว่าลิมิตทางขวาและทางซ้ายเท่ากัน

นั่นคือ ลิมิตหาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 3 #

โจทย์ข้อ 15 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} x+1$$

$\because \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 2$

และ $\lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2$

แสดงว่าลิมิตทางขวาและทางซ้ายเท่ากัน

นั่นคือลิมิตหาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 3 #

โจทย์ข้อ 16 $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{9-x^2}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{9-x^2} =$ หาค่าไม่ได้

(เพราะว่าค่าเป็นค่าลบซึ่งถอดรากไม่ได้)

และ $\lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$

แสดงว่าลิมิตห่าค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 17 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2$

$= 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x^2$

$= 0$

$\therefore$ ลิมิตทางขวาและทางซ้ายเท่ากัน แสดงว่าลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 0 #

โจทย์ข้อ 18 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1+x$

$= 1$

$\because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2$

$= 0$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

นั่นคือ ลิมิตหาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 19 $\lim_{x \to 4} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 4 \\ 0, x = 4 \end{cases}$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} x^2$

$= 16$

$\because \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^2$

$= 16$

แสดงว่าลิมิตทางขวาและทางซ้ายมีค่าเท่ากัน

ดังนั้น ลิมิตหาค่าได้ มีค่าเท่ากับ 16 #

โจทย์ข้อ 20 $\lim_{x \to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 ; x \text{ เป็นตรรกยะ} \\ -2 ; x \text{ เป็นอตรรกยะ} \end{cases}$

วิธีทำ $\because \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -2$

$= -2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2$

$= -2$

แสดงว่าลิมิตหาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ -2 #

แบบฝึกหัดที่ 22

โจทย์ข้อ 1 จงพิสูจน์ $\lim_{x \to 3} 5x - 8 = 7$ โดยอาศัยนิยามของลิมิต

พิสูจน์ เราต้องแสดงให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(5x-8)-7| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \frac{\in}{5}$

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$

พิจารณา $|(5x-8)-7| = |5x-15|$

$= |5(x-3)|$

$= |5|\,|x-3|$

$= 5|x-3|$

แต่ $|x-3| < \delta$

$\therefore |(5x-8)-7| < 5\delta$

แต่ $\delta = \frac{\in}{5}$

$\therefore |(5x-8)-7| < 5\left(\frac{\in}{5}\right) = \in$

ดังนั้นจึงได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(5x-8)-7| < \in$

$\lim_{x \to 3} (5x-8) = 7$

โจทย์ข้อ 2 จงพิสูจน์ $\lim_{x \to 2} x+5 = 7$ โดยอาศัยนิยามลิมิต

พิสูจน์ จะต้องแสดงให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้ว $|(x+5)-7| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \in$

ถ้า $0 < |x-2| < \delta$

พิจารณา $|(x+5)-7| = |x-2|$

แต่ $|x-2| < \delta$

$\therefore |(x+5)-7| < \delta$

แต่ $\delta = \in$

$\therefore |(x+5)-7| < \in$

ดังนั้นจึงได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\in < 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้ว $|(x+5)-7| < \in$

$\therefore \lim_{x \to 2} X+5 = 7$

โจทย์ข้อ **3** จงพิสูจน์ $\lim\limits_{x \to 2} 5x+1 = 11$ โดยอาศัยนิยามลิมิต

พิสูจน์ จะต้องแสดงให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้ว $|(5x + 1) - 11| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\in}{5}$

ถ้า $0 < |x-2| < \delta$

พิจารณา $|(5x+1)-11| = |5x-10|$

$$= |5(x-2)|$$

$$= |5|\,|x-2|$$

$$= 5|x-2|$$

แต่ $|x-2| < \delta$

$\therefore |(5x+1)-11| < 5\delta$

แต่ $\delta = \dfrac{\in}{5}$

$\therefore |(5x+1)-11| < \in$

ดังนั้นจึงได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้ว $|(5x+1)-11) < \in$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} 5x+1 = 11$ #

โจทย์ข้อ 4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x+1} = 1$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าทุก ๆ $\in > 0$ **จะมี** $\delta > 0$ **ซึ่งถ้า** $0 < |x - 0| < \delta$ แล้ว

$\left|\dfrac{1}{2x+1} - 1\right| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แบ่งการพิจารณาออกเป็น

กรณีที่ 1 $\in = 1$

เลือก $\delta = \frac{1}{4}$

ให้ $0 < | x - 0 | < \frac{1}{4}$

$$-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} < 2x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < 2x + 1 < \frac{3}{2}$$

ดังนั้น $\frac{1}{|2x + 1|} < 2$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\left| \frac{1}{2x+1} - 1 \right| = \left| \frac{1 - 2x - 1}{2x + 1} \right|$$

$$= \frac{|2x|}{|2x + 1|} < \frac{1}{2}(2) = 1$$

เพราะฉะนั้น $\left| \frac{1}{2x + 1} - 1 \right| < \in$

กรณีที่ 2 $\in > 1$ (ทำนองเดียวกับกรณีที่ 1)

กรณีที่ 3 $\in < 1$

เลือก $\delta = \frac{\in}{4}$

ให้ $0 < | x - 0 | < \delta = \frac{\in}{4} < \frac{1}{4}$

ทำนองเดียวกับตอนที่ 1 จะได้

$$\left| \frac{1}{2x + 1} - 1 \right| < \in$$

สรุปได้ว่าทั้งสามกรณีไม่ว่า $\in > 0$ จะมีค่า มากกว่า 1 น้อยกว่า 1 หรือเท่ากับ 1 ก็ตาม สามารถเลือก δ ซึ่งทำให้

$$0 < | x - 4 | < \delta \text{ แล้ว } \left| \frac{1}{2x + 1} - 1 \right| < \in \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 5 จงพิสูจน์ $\lim\limits_{x \to -2} x - 3 = -5$ โดยอาศัยนิยามลิมิต

พิสูจน์ เราต้องแสดงให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า

$0 < | x + 2 | < \delta$ แล้ว $| (x - 3) - (-5) | < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \in$

ถ้า $0 < | x + 2 | < \delta$

พิจารณา $| (x - 3) - (-5) | = | (x - 3) + 5 |$

$= | x + 2 |$

แต่ $| x + 2 | < \delta$

$\therefore | (x - 3) - (-5) | < \delta$

แต่ $\delta = \in$

$\therefore | (x - 3) - (-5) | < \in$

ดังนั้น จึงได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < | x + 2 | < \delta$ แล้ว $| (x - 3) - (-5) | < \in$

$\lim\limits_{x \to -2} (x - 3) = -5$ #

โจทย์ข้อ 6 จงพิสูจน์ $\lim\limits_{x \to -3} x^2 + 1 = 10$ โดยใช้นิยามลิมิต

วิธีทำ จะต้องแสดงให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า

$0 < | x - (-3) | < \delta$ แล้ว $| (x^2 + 1) - 10 | < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

พิจารณา $|(x^2 + 1) - 10| = |x^2 - 9|$

$= |x - 3||x + 3|$

เนื่องจาก $0 < |x - (-3)| < \delta$

$|x + 3| < \delta$

$-\delta < x + 3 < \delta$

$-\delta - 3 < x < \delta - 3$

$-\delta - 6 < x - 3 < \delta - 6$

$-(\delta + 6) < x - 3 < \delta - 6 < \delta + 6$

$|x - 3| < \delta + 6$

ดังนั้น $|x^2 - 9| < (\delta + 6)\delta$

ต้องการให้ $|x^2 - 9| < \in$

$\therefore$ เลือก $\delta = -3 + \sqrt{9 + \in}$ หารจาก $\delta(\delta + 6) = \in$)

จะได้ $|x^2 - 9| < (-3 + \sqrt{9 + \in} + 6)(-3 + \sqrt{9 + \in}) = \in$

$\therefore \quad |x^2 - 9| < \in$

ดังนั้นได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\in < 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - (-3)| < \delta$ แล้ว $|(x^2 + 1) - 10| < \in$

$\therefore \lim\limits_{x \to -3} x^2 + 1 = 10$ #

โจทย์ข้อ 7 จงพิสูจน์ $\lim\limits_{x \to -3} 2x + 9 = 3$ โดยใช้นิยามของลิมิต

พิสูจน์ จะต้องแสดงให้ได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - (-3)| < \delta$ แล้ว $|(2x + 9) - 3| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \frac{\in}{2}$

ถ้า $0 < |x - (-3)| < \delta$

พิจารณา $|(2x+9)-3| = |(2x+6)|$

$= |2(x+3)|$

$= |2||x+3|$

$= |2||x-(-3)|$

$= 2|x-(-3)|$

แต่ $|x-(-3)| < \delta$

$\therefore \ |(2x+9)-3| < 2\delta$

แต่ $\delta = \dfrac{\in}{2}$

$\therefore \ |(2x+9)-3| < \in$

ดังนั้น จึงได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-(-3)| < \delta$ แล้ว $|(2x+9)-3| < \in$

$\therefore \ \lim\limits_{x \to -3} 2x + 9 = 3$

โจทย์ข้อ 8 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-2} = -1$

วิธีทำ จะต้องแสดงให้เห็นจริงว่า ทุกค่า $\in > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$

ที่ทำให้ $\left|\dfrac{1}{x-2} + 1\right| < \in$ ถ้า $0 < |x-1| < \delta$

$$\left|\frac{1}{x-2} + 1\right| = |x-1| \frac{1}{|x-2|}$$

โดยการทดลอง สมมติว่า $|x-1| < \dfrac{1}{2}$ ....(1)

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < |x-2|$$

$$\frac{1}{|x-2|} < 2 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} < 1$$

$$\left|\frac{1}{x-2} + 1\right| = \frac{|x-1|}{|x-2|} < 1 \qquad \text{..........(3)}$$

สมมติว่า ถ้ากำหนด $\in > 0$ มาให้ เราแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $\in \geqslant 1$ เราให้ $\delta = \frac{1}{2}$

ถ้า $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$ เราได้ $|x - 1| < \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{1}{x + 2} + 1 \right| < 1$$

แต่ $1 \leqslant \in$

$$\therefore \quad \left| \frac{1}{x + 2} + 1 \right| < \in$$

กรณีที่ 2 ถ้า $\in < 1$ เราให้ x กับ 1 ใกล้กันมากกว่าเดิม โดยที่

$0 < |x - 1| < \delta$ และ $\delta < \frac{1}{2}$

$\therefore \quad |x - 1| < \frac{1}{2}$

แต่จากข้างต้นเราพิสูจน์แล้วว่า

ถ้า $|x - 1| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{|x - 2|} < 2$ แล้ว $|x - 1| < \delta < \frac{1}{2}$

$$\because \quad \frac{1}{|x - 2|} < 2$$

$$\frac{|x - 1|}{|x - 2|} < 2\delta$$

$$\left| \frac{1}{x + 2} + 1 \right| < 2\delta$$

ถ้าให้ $\delta = \frac{\in}{2}$ เราได้ $\left| \frac{1}{x + 2} + 1 \right| < \in$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

ถ้า $\in < 1$ เราให้ $\delta = \frac{\in}{2}$

ถ้า $\in \geqslant 1$ เราให้ $\delta = \frac{1}{2}$

แบบฝึกหัด 2.3

โจทย์ข้อ 1 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 5} -30$

วิธีทำ $\lim_{x \to 5} (-30) = -30$ #

โจทย์ข้อ 2 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} 5x$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} 5x &= 5 \lim_{x \to 2} x \\ &= 5(2) \\ &= 10 \end{aligned}$$ #

โจทย์ข้อ 3 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} &= \frac{(3)-2}{(3)+2} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$ #

โจทย์ข้อ 4 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} 2x + 3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} 2x + 3 &= 2 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 \\ &= 2(2) + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$ #

โจทย์ข้อ 5 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} x^2 - 4x + 1$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 4x + 1 = \lim_{x \to 2} x^2 - 4 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= (2)^2 - 4(2) + 1$$

$$= 4 - 8 + 1$$

$$= -3 \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 6 จงหาค่าของ $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \to -2} x^2 - 4}{\lim_{x \to -2} x^2 + 2}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^2 + 2}$$

$$= \frac{0}{6}$$

$$= 0 \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 7 จงหาค่าของ $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 + 2t + 4}{t + 2}$

วิธีทำ

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^2 + 2t + 4}{t + 2} = \frac{\lim_{t \to 2} t^2 + 2t + 4}{\lim_{t \to 2} t + 2}$$

$$= \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{(2) + 2}$$

$$= \frac{4 + 4 + 4}{4}$$

$$= 3 \qquad \#$$

MA 111 (H) 53

โจทย์ข้อ 8 จงหาค่าขอ $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t + 3}{t + 2}$

วิธีทำ

$$\lim_{t \to 2} \frac{t + 3}{t + 2} = \frac{\lim\limits_{t \to 2} t + 3}{\lim\limits_{t \to 2} t + 2}$$

$$= \frac{(2) + 3}{(2) + 2}$$

$$= \frac{5}{4} \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{25} + x^2$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{25} + x^2 = \lim_{x \to 4} \sqrt{25} + \lim_{x \to 4} x^2$$

$$= \sqrt{25} + (4)^2$$

$$= 5 + 16$$

$$= 21 \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - x - 12}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x + 3)}$$

$$= \frac{1}{4 + 3}$$

$$= \frac{1}{7} \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)}{(x + 3)}$$

$$= \frac{(3)^2 + 3(3) + 9}{(3) + 3}$$

$$= \frac{9 + 9 + 9}{6}$$

$$= \frac{27}{6}$$

#

โจทย์ข้อ 12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x^2 - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)}{(x - 3)}$$

$$= \frac{(2) + 2}{(2) - 3}$$

$$= \frac{4}{-1}$$

$$= -4$$

#

โจทย์ข้อ 13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x^2 + 1|}{x + 1}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 + 1|}{x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$= \frac{(1)^2 + 1}{(1) + 1}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

#

MA 111 (H) ยกที่ 5

โจทย์ข้อ 14 กำหนดให้ $f(x) = 4x^3$ จงหาค่าของ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

วิธีทำ $\because f(x) = 4x^3$

$\therefore f(x+h) = 4(x+h)^3$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4\{(x+h)(x^2 + 2xh + h^2)\} - 4x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4\{x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3\} - 4x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x^2 + 4xh + 4x^2 + 8xh + 4h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 8x^2 + 4xh + 4x^2 + 8xh + 4h^2$$

$$= 12x^2$$ #

โจทย์ข้อ 15 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{2x+3}$ จงหาค่าของ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

วิธีทำ $\because f(x) = \sqrt{2x+3}$

$\therefore f(x+h) = \sqrt{2(x+h)+3}$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+3} - \sqrt{2x+3}}{h}$$

คูณตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + 3 - 2x + 3}{h(\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+3}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$ #

แบบฝึกหัดที่ 2.4

โจทย์ข้อ 1 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 4}{3x - 1}$

วิธีทำ เอา x หารตลอดทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 4}{3x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{3 - \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2 + 0}{3 - 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$ #

โจทย์ข้อ 2 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 - 6x + 1}$

วิธีทำ เอา x^2 หารตลอดทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 - 6x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0 + 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$ #

โจทย์ข้อ 3 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$

วิธีทำ เอา x^3 หารตลอดทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0}$$

$$= 0$$ #

โจทย์ข้อ 4 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 5}$

วิธีทำ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^3 จะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} 3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3} = 3 - 0 + 0$

$$= 3$$

แต่ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^3} = 0 - 0 - 0$

$$= 0$$

จะเห็นว่าลิมิตของเศษเป็น $3 \neq 0$ และลิมิตของส่วน $\to 0$ ทางค่าบวก จึงได้ว่า

$\lim \dfrac{3x^3 + - 2x + 1}{x^2 - 3x - 5}$ หาค่าไม่ได้

#

โจทย์ข้อ 5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{2}$$ #

โจทย์ข้อ 6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{1}$$

$$= 1$$ #

MA 111 (H) 59

โจทย์ข้อ 7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2} + a^2 - x$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2} + a^2 - x = \lim\limits_{x \to +\infty} |x| + a^2 - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x + a^2 - x$

$= a^2$ #

โจทย์ข้อ 8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \neq 0$

และ $\lim\limits_{x \to 1} 1 - x^2 = 1 - (1^2) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$ หาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{4 - x^2}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 2} 4 = 4 \neq 0$

และ $\lim\limits_{x \to 2} 4 - x^2 = 4 - (2)^2 = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{4 - x^2}$ หาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$

วิธีทำ $\because \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 + x} = \sqrt{1 - 0} = 1$

และ $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x} =$ หาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x^3}{x - 3}$

วิธีทำ หารตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย x^3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x^3}{x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}$$

จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 2 = 2 \neq 0$$

และ $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x^3}{x - 3} = \text{หาค่าไม่ได้}$$ #

โจทย์ข้อ 12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

วิธีทำ หารตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย x

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{1 - \frac{2}{x}}$$

จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{1 - \frac{4}{x}} = 1 \neq 0$$

และ $$\lim_{x \to 2^+} 1 - \frac{2}{x} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad \text{หาค่าไม่ได้}$$

#

โจทย์ข้อ 13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x}$$

= หาค่าไม่ได้ #

โจทย์ข้อ 14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}}{\sqrt{(2 - x)(3 - x)}}$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 + x}}{\sqrt{3 - x}} = \frac{4}{1}$$

$$= 4$$ #

โจทย์ข้อ 15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{|x|}$

วิธีทำ เขียน $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$ ใหม่ได้เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x} & \text{ถ้า } x > 0 \\ -\left(\dfrac{x + 1}{x}\right) & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + 1}{x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0^+} x + 1}{\lim\limits_{x \to 0^+} x}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} (-x-1)}{\lim\limits_{x\to 0^-} x}$$

$$= \infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ #

แบบฝึกหัด 2.5

โจทย์ข้อ 1 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

วิธีทำ สมมติให้ $u = 5x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u/5} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \sin u}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} 5 \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}$$

$$= 5 \times 1$$

$$= 5$$

#

โจทย์ข้อ 2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to 1} \frac{\sin 2(\theta - 1)}{\theta - 1}$

วิธีทำ สมมติให้ $u = 2(\theta - 1)$

$$\lim_{\theta\to 1} \frac{\sin 2(\theta - 1)}{\theta - 1} = \lim_{u\to 0} \frac{2 \sin u}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} 2 \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}$$

$$= 2 \times 1$$

$$= 2$$

#

โจทย์ข้อ 3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 5x}$$

$$= 2 \lim \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{5} \lim \frac{5x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{2}{5} \lim \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\lim \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{2}{5} (1)(1)$$

$$= \frac{2}{5}$$

#

โจทย์ข้อ 4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \quad \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} \quad \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= \frac{1}{1} (1)$$

$$= 1$$

#

โจทย์ข้อ 5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{4\theta^2}$

วิธีทำ
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{4\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\theta^2}$$
$$= \frac{2}{4} \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta} \quad \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta} \right)$$
$$= \frac{2}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}$$

#

โจทย์ข้อ 6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1}{\theta\cot\theta}$

วิธีทำ
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta\cot\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta \frac{\text{Cos}\,\theta}{\sin\theta}}$$
$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta\,\text{Cos}\,\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\text{Cos}\,\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \frac{1}{\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta}$$
$$= 1\left(\frac{1}{1}\right)$$
$$= 1$$

#

โจทย์ข้อ 7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2} - \theta}$

วิธีทำ $$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}\,\theta}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\frac{\pi}{2} - \theta}$$

$$= 1$$

#

โจทย์ข้อ 8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{cosec}^2 x}$

วิธีทำ $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{cosec}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin^2 x$$

$$= \lim_{x \to 0} x \quad \lim_{x \to 0} \sin^2 x$$

$$= (0)\,(0)$$

$$= 0$$

#

โจทย์ข้อ 9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot^2 x}{4x^2}$

วิธีทำ $$\lim_{x \to 0} \frac{\cot^2 x}{4x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{4x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{4x^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot^2 x}{4x^2}$ หาค่าไม่ได้

#

โจทย์ข้อ 10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3 3x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\tan^3 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\dfrac{\sin^3 3x}{\cos^3 3x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cos^3 3x}{\sin^3 3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin^3 3x} \cdot \cos^3 3x$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{x^3}} \cdot \lim_{x \to 0} \cos^3 3x$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3 \sin 3x}{3x} \right)^3} \lim_{x \to 0} \cos^3 3x$$

$$= \frac{1}{27} (1)^3 (1)^3$$

$$= \frac{1}{27}$$ #

แบบฝึกหัดที่ 2.6

โจทย์ข้อ 1 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x < 1 \\ 0 & \text{ถ้า } x \geq 1 \end{cases}$ ต่อเนื่องหรือไม่ พร้อมเขียนรูปกราฟของฟังก์ชัน

วิธีทำ

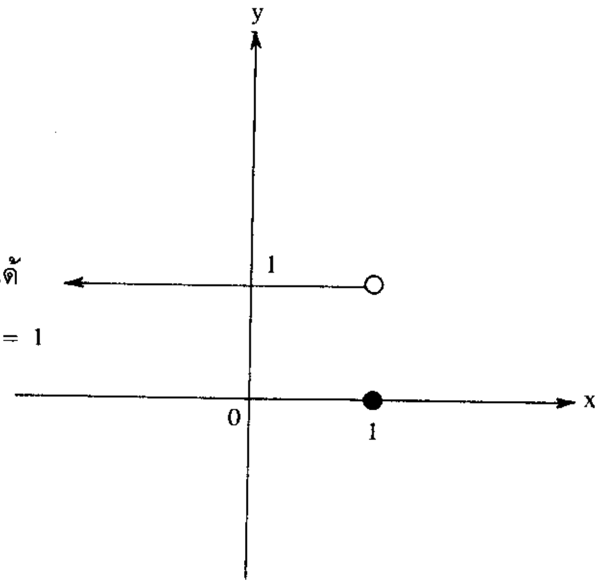
$\because$ $f(1) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1_-} f(x) = 1$

$\therefore$ $\lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$



โจทย์ข้อ 2 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{ถ้า } x \neq 3 \\ 4 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$ ต่อเนื่องหรือไม่

พร้อมเขียนกราฟของฟังก์ชัน

วิธีทำ $\because$ $f(3) = 4$

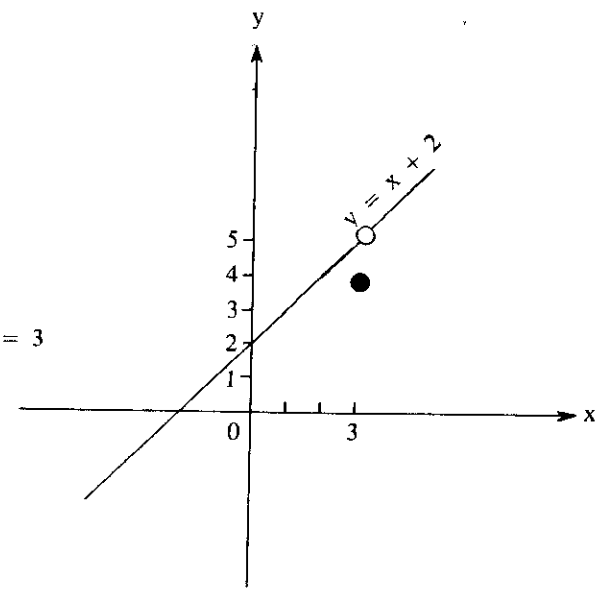
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$

$\therefore$ $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

$\because$ ค่าลิมิต $\neq$ ค่าฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$



โจทย์ข้อ 3 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0.9x + 1 & \text{ถ้า } x > 10 \end{cases}$$

ต่อเนื่องหรือไม่ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ

$\because \quad f(10) = 10$

$$\lim_{x \to 10^+} f(x) = (0.9)(10) + 1$$

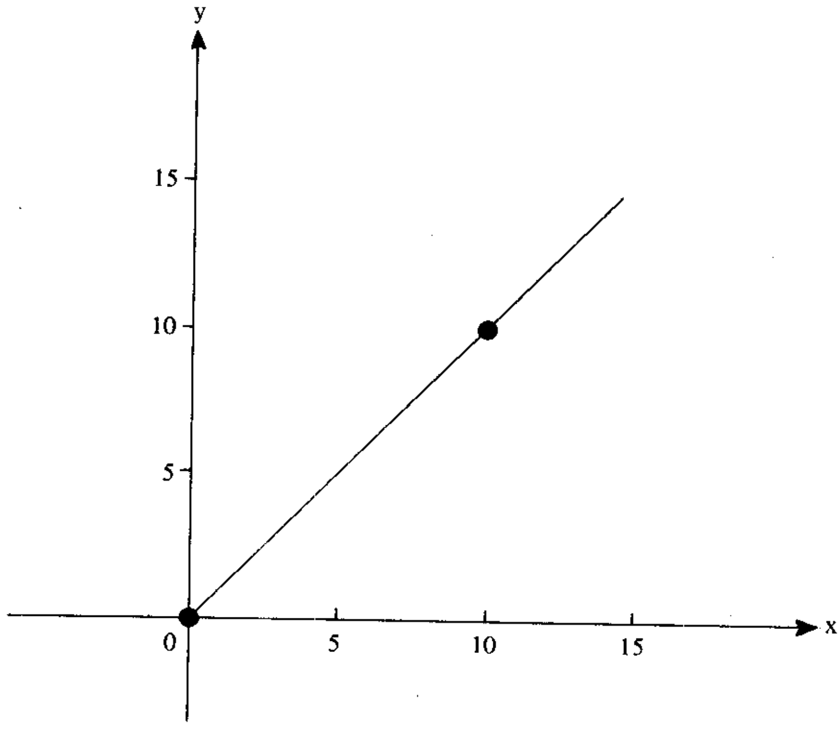
$$= 10$$

$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = 10$$

$$\because \quad \lim_{x \to 10} f(x) = 10$$

ค่าลิมิต = ค่าฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องทุกค่าของ $x \in \subset 0, \infty)$



โจทย์ข้อ 4 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{ถ้า } x \leq 1 \\ 3x & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

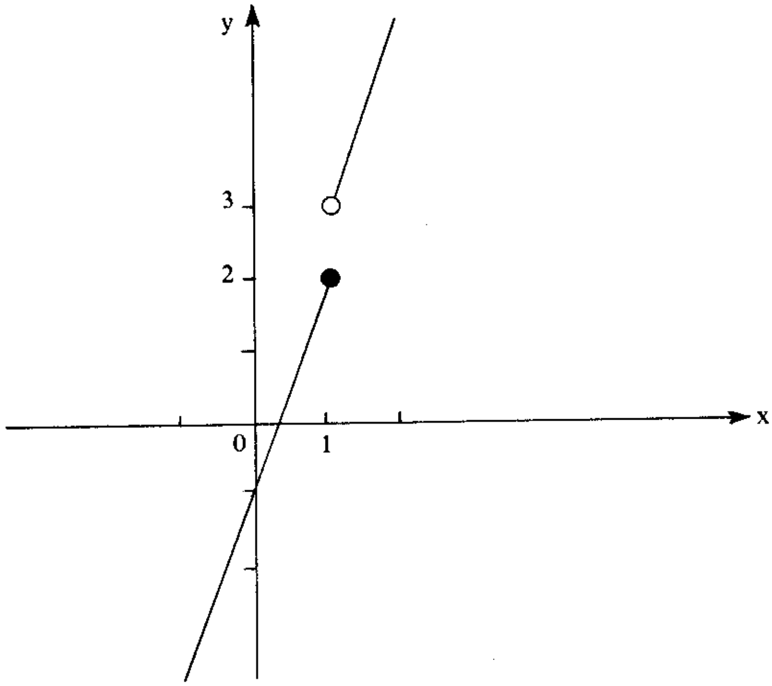
ต่อเนื่องหรือไม่พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ

$$\because \quad f(1) = 3(1) - 1$$
$$= 2$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3(1) = 3$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3(1) - 1 = 2$$

$\because \lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$



#

โจทย์ข้อ 5 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases} \quad \text{ต่อเนื่องหรือไม่}$$

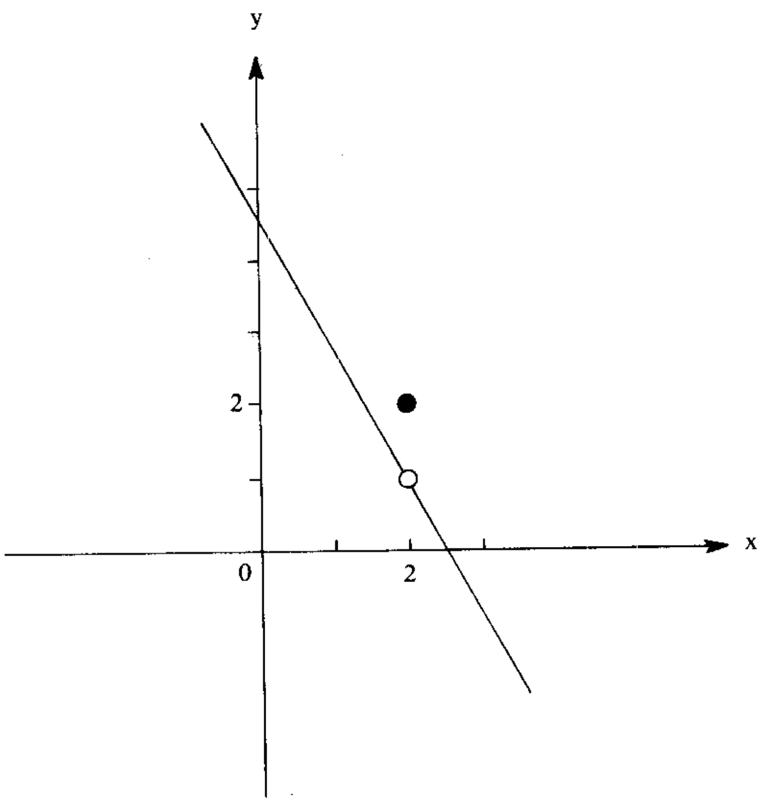
พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $f(2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

$\because$ ค่าลิมิต $\neq$ ค่าฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



โจทย์ข้อ 6 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 4 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

ต่อเนื่องหรือไม่พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $f(2) = 4$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} (x + 2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

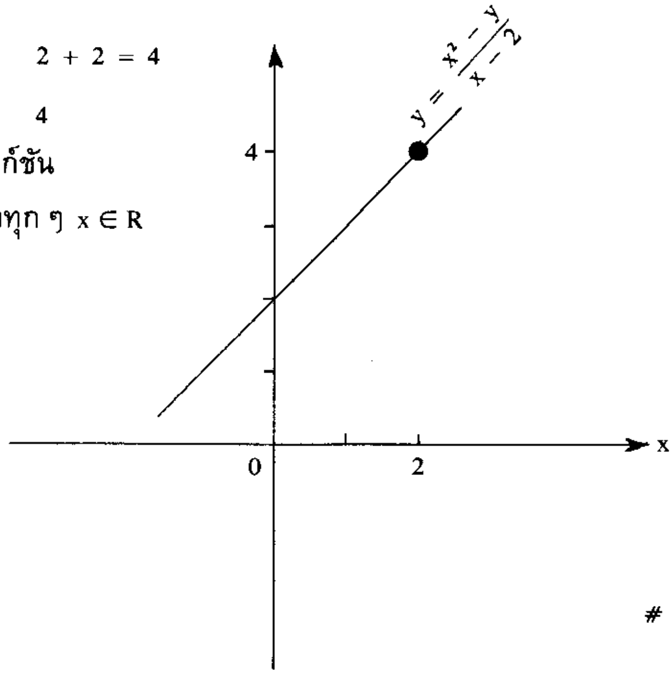
$$= \lim_{x\to 2^-} (x + 2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$\because$ $\lim f(x) = 4$

ค่าลิมิต = ค่าฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องทุก ๆ $x \in R$



#

โจทย์ข้อ 7 จงพิจารณาฟังก์ชัน

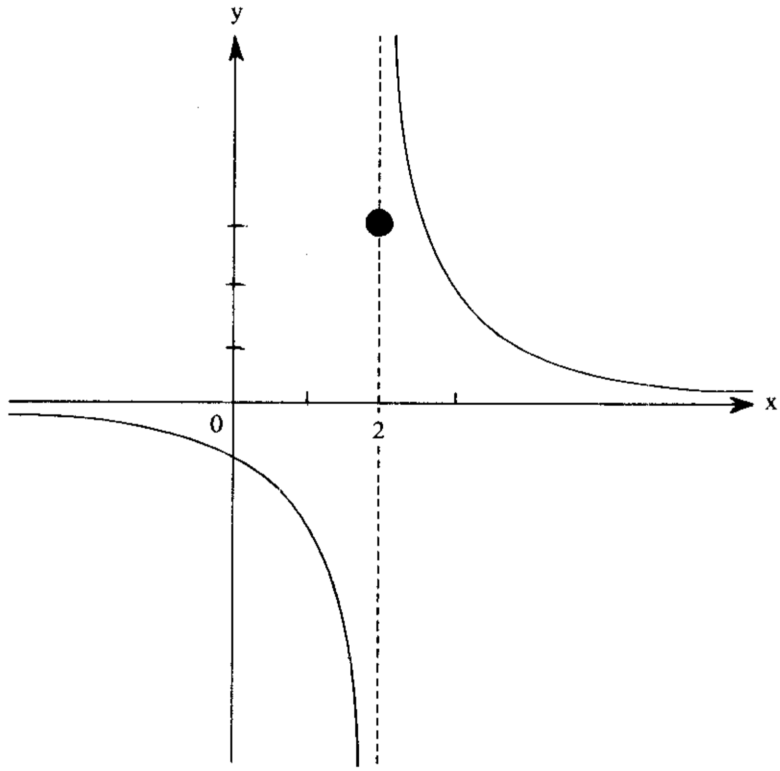
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$ ต่อเนื่องหรือไม่

พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



โจทย์ข้อ 8 จงพิจารณาฟังก์ชัน

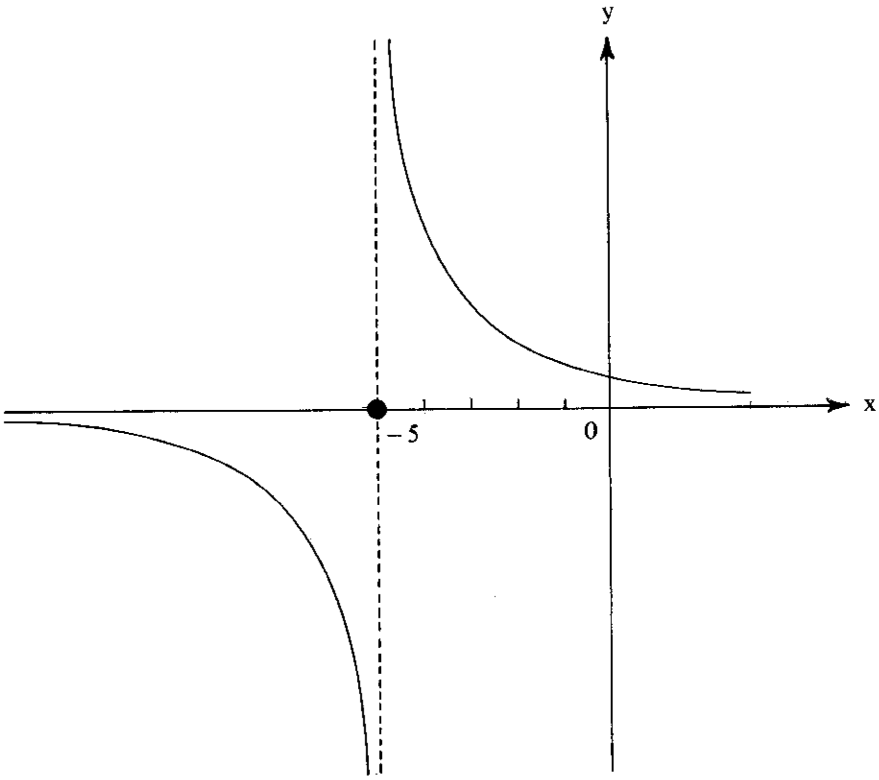
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+5} & \text{ถ้า } x \neq -5 \\ 0 & \text{ถ้า } x = -5 \end{cases}$$ ต่อเนื่องหรือไม่

พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $\because \; f(-5) = 0$

$$\lim_{x \to -5} f(x) = \lim_{x \to -5} \frac{2}{x+5}$$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -5$



โจทย์ข้อ 9 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

ต่อเนื่องหรือไม่พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $\because$ $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 1$$

$$= 0 + 1$$

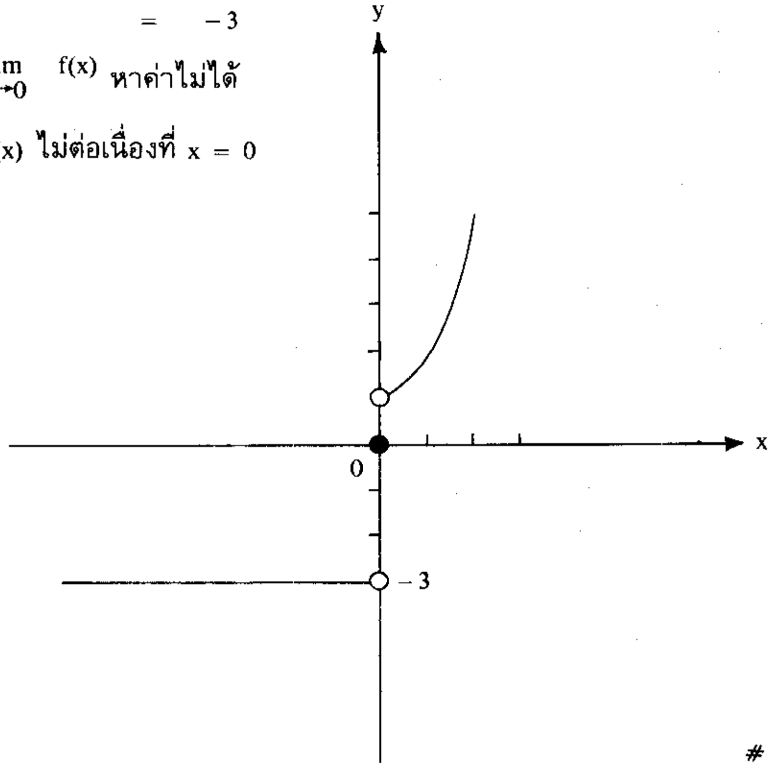
$$= 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -3$$

$$= -3$$

$\because$ $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$



#

โจทย์ข้อ 10 จงพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{ถ้า } x \leqslant -2 \\ 3 - x & \text{ถ้า } -2 < x \leqslant 2 \\ 4x - 1 & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$$

ต่อเนื่องหรือไม่พร้อมเขียนกราฟประกอบ

วิธีทำ $\because$ $f(-2) = 2 + (-2) = 0$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 3 - x = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} 2 + x = 0$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -2$

และเนื่องจาก

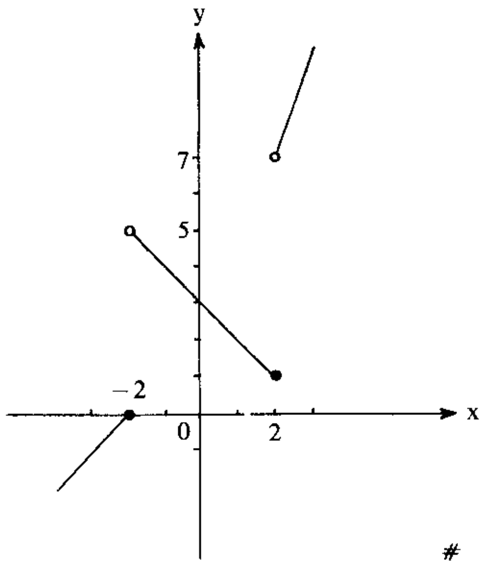
$f(2) = 3 - 2 = 1$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 4x - 1 = 4(2) - 1 = 7$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3 - x = 3 - (2) = 1$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



#