# บทที่ 1
# ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานเบื้องต้นที่เคยศึกษามาแล้วทั้งสิ้น โดยจะแยกกล่าวโดยย่อดังนี้

## 1.1 เซต (Set)

(1) เซตต้องบอกได้ว่าอะไรเป็นสมาชิกหรือไม่เป็น : well-defined

(2) การเขียนเซต มี 2 แบบ

1. แจกแจงสมาชิก

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

2. บอกเงื่อนไขสมาชิก

$A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนนับน้อยกว่า $5\}$

(3) เซตจำกัด คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกได้ว่ามีสมาชิกจำนวนเท่าใด

(4) เซตอนันต์ คือ เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด

(5) เซตว่าง คือ เซตซึ่งไม่มีสมาชิก

(6) เซตจักรวาล (เอกภพสัมพัทธ์) คือ เซตซึ่งทุก ๆ เซตที่กำลังศึกษาหรือพิจารณาเป็นสับเซตของเซตนี้ทั้งสิ้น

(7) A เป็นเซตย่อยของ B : $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

(9) A เป็นเซตย่อยแท้ของ B : $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$

(10) $P(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$

= เซตของสับเซตทั้งหมดของ A

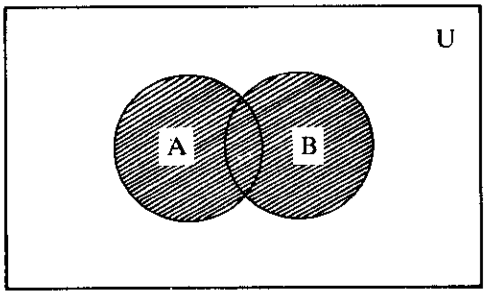


MA 111 (H) 1

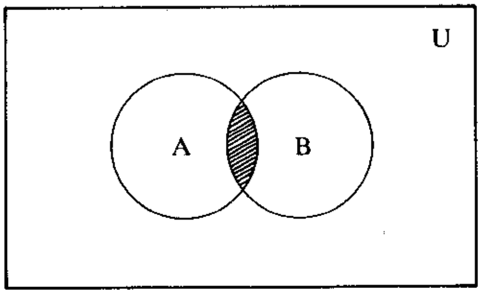
(11) จำนวนสมาชิกของ P (A) = $2^{n(A)}$ เมื่อ n (A) แทนจำนวนสมาชิกของ A

(12) การดำเนินการของเซต มี 4 แบบ

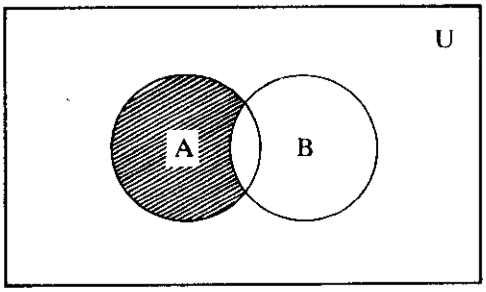
1. ผลผนวก (union) : $A \cup B$
2. ผลตัด (intersection) : $A \cap B$
3. ผลต่าง (difference) : $A - B$
4. ส่วนเติมเต็ม (complement) : $A' = U - A$



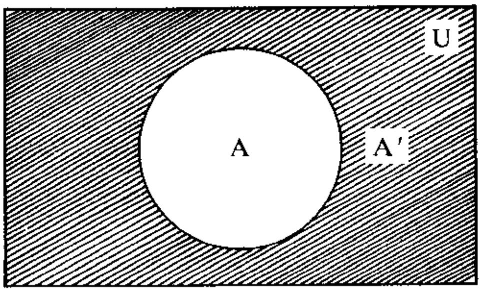

$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ หรือ $x \in B \}$




$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ และ $x \in B \}$




$A - B = \{ x \mid x \in A$ และ $x \notin B \}$




$A \;\; = \{ x \mid x \notin A \} = U - A$

(13) ถ้า $A \cap B = \varnothing$ เรียก A, B เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set)

(14) กฎที่ควรทราบ สำหรับ A, B, C เป็นเซตใด ๆ

1. **ปิด** : $A \cup B$, $A \cap B$ เป็นเซต
2. **เปลี่ยนกลุ่มได้** : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **สลับที่** : $A \cup B = B \cup A$ , $A \cap B = B \cap A$

4. **เอกลักษณ์** : $A \cup \varnothing = A$ , $A \cap \varnothing = \varnothing$

   $A \cup U = U$ , $A \cap U = A$

5. **ไอเดมโพเทนต์** : $A \cup A = A$ , $A \cap A = A$

6. ส่วนเติมเต็ม : $A \cup A' = U$ , $A \cap A' = \varnothing$ , $(A')' = A$

   $\varnothing = U$ , $U' = \varnothing$

(15) $A \cup B \cap C$ ไม่มีความหมาย

การดำเนินการที่ต่างกันต้องมีวงเล็บกำกับ เช่น

$(A \cup B) \cap C$ หรือ $A \cup (B \cap C)$

(16) ข้อสรุปเกี่ยวกับเซต

1. $\varnothing$ เป็นเซตจำกัด
2. $\varnothing \in P(A)$ , $A \in P(A)$
3. $\varnothing \subseteq A$ , $A \subseteq A$ , $\varnothing \subseteq P(A)$
4. ถ้า $A \subseteq \varnothing$ แล้ว $A = \varnothing$
5. $A \subseteq A \cup B$ , $B \subseteq A \cup B$
6. $A \cap B \subseteq A$ , $A \cap B \subseteq B$
7. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
8. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$
9. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \varnothing$
10. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B' = \varnothing$
11. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subseteq A'$
12. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A \subseteq B'$ และ $B \subseteq A'$
13. ถ้า $A \cup B = \varnothing$ แล้ว $A = B = \varnothing$
14. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$
15. $A - B = A \cap B'$
16. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $n(A) \leqslant n(B)$
17. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subseteq P(B)$

18. $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

19. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ แต่ $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

20. $P(A - B) \neq P(A) - P(B)$

## 1.2 ระบบจำนวน (Number System)

(1) จำนวนนับ (จำนวนธรรมชาติ)

$N = \{ 1, 2, 3, .... \}$

(2) จำนวนเต็ม : $I = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, .... \}$

แบ่งเป็น $I^+$ , $\{ 0 \}$ และ $I^-$

(3) จำนวนตรรกยะ : $Q = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in I , b \neq 0 \}$

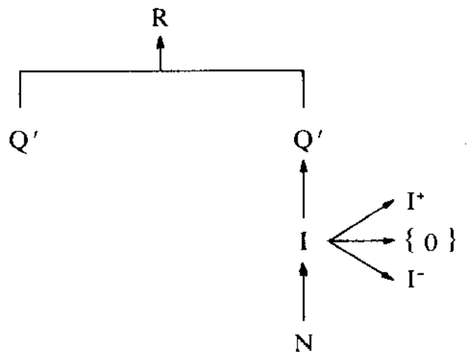
ทศนิยมรู้จบ ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ เป็นจำนวนตรรกยะ เช่น

$$0.\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99} \qquad 0.3\dot{7} = \frac{37 - 3}{90} = \frac{17}{45}$$

(4) จำนวนอตรรกยะ : $Q'$ คือ จำนวนที่เขียนเป็นเศษส่วนไม่ได้

(5) จำนวนจริง : $R$

(6) แผนภาพแสดงระบบจำนวน




**ข้อสรุป** 1. $N \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$

2. $Q' \subseteq R$

3. $R = Q \cup Q'$ และ $Q \cap Q' = \emptyset$

(7) คุณสมบัติจำนวนจริงที่ควรทราบ

1. **ปิด** สำหรับ การบวก การคูณ

   สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ , $x + y \in R$ , $xy \in R$

2. **สลับที่**

   สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ , $x + y = y + x$ , $xy = yx$

3. **การเปลี่ยนกลุ่มได้**

   สำหรับทุก $x, y, z \in R$ , $x + (y + z) = (x + y) + z$

   $x(yz = (xy)z$

4. **เอกลักษณ์**

   สำหรับการบวก คือ 0

   สำหรับการคูณ คือ 1

5. **อินเวอร์ส** (ตัวผกผัน)

   สำหรับการบวกของ $x$ คือ $-x$

   สำหรับการคูณของ $x \neq 0$ คือ $\frac{1}{x}$

6. **การกระจาย**

   สำหรับ $x, y, z \in R$ , $x(y + z) = xy + xz$

   $(x + y)z = xz + yz$

(8) อสมการ มี 2 แบบ คือ

1. $P(x) \leqslant Q(x)$
2. $P(x) < Q(x)$

(9) ช่วง ที่ควรทราบ มี 4 แบบ คือ

1. **ช่วงปิด** : $[a, b] = \{ x \mid a \leqslant x \leqslant b \}$
2. **ช่วงเปิด** : $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$
3. **ช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด** : $[a, b) = \{ x \mid a \leqslant x < b \}$ และ $(a, b] = \{ x \mid a < x \leqslant b \}$
4. **ช่วงอนันต์**

   $(a, \infty) = \{ x \mid x > a \}$ $(-\infty, b) = \{ x \mid x < b \}$

   $[a, \infty) = \{ x \mid x \geqslant a \}$ $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$

   $(-\infty, \infty) = R$ = เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

(10) ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

(11) คุณสมบัติที่ควรทราบ

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
5. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
6. $|x-y| \geqslant |x| - |y|$
7. $|x-y| \geqslant |y| - |x|$
8. ถ้า $a > 0$, $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$

   $|x| \geqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geqslant a$ หรือ $x \leqslant -a$

(12) **ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง**

1. ถ้า $S \subseteq R$ แล้วเรียก $u \in R$ ว่าขอบเขตบนของ S ก็ต่อเมื่อ $x \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$
2. ถ้า $S \subseteq R$ แล้วเรียก $\ell \in R$ ว่าขอบเขตล่างของ S ก็ต่อเมื่อ $\ell \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$
3. ขอบเขตบนต่ำสุด : $\ell$.u.b.S

   ขอบเขตล่างสูงสุด g.l.b.S

(14) กำหนด $S \subseteq R$ และ $S \neq \varnothing$

1. S มีขอบเขตบนแล้วมีขอบเขตบนต่ำสุด
2. S มีขอบเขตล่างแล้วมีขอบเขตล่างสูงสุด

## 1.3 ความสัมพันธ์ (Relation)

(1) คู่อันดับ : $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

(2) A×B : ผลคูณคาร์ทีเซียน

$A \times B : \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$

(3) ข้อสรุปสำหรับ $A \times B$

1. ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$
2. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$
3. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ เมื่อ $n(A)$ คือ จำนวนสมาชิกในเซต A
4. $n(A \times A) = [n(A)]^2$

(4) ถ้า $r \subseteq A \times B$ แล้วเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

ถ้า $r \subseteq A \times A$ แล้วเรียก r ว่าความสัมพันธ์ใน A

(5) $r : A \rightarrow B$ (นั่นคือ $r \subseteq A \times B$) จะได้

$D_r = \{ a \mid (a,b) \in r \}$ : โดเมนของ r

$R_r = \{ b \mid (a,b) \in r \}$ : เรนจ์ของ r

(6) $r^{-1}$ : อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

$r^{-1} = \{ (b,a) \mid a \in A, b \in B, (a,b) \in r \}$

(7) $D_r = R_{r^{-1}}$

$D_{r^{-1}} = R_r$

## 1.4 ฟังก์ชัน (Function)

(1) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ จะได้ $y = z$

(2) f เป็นฟังก์ชัน มีวิธีพิจารณาดังนี้

1. **รูปคู่อันดับ** "ตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน"
2. **รูป** x,y "x 1 ค่าได้ค่า y เพียงค่าเดียว"
3. **กราฟ** "ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟ 1 จุด"

(3) ฟังก์ชันค่าจริง : $R_f \subseteq R$

ฟังก์ชันของจำนวนจริง : $D_f \subseteq R$

ฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง : $D_f \subseteq R, R_f \subseteq R$

ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B : $D_f = A, R_f \subseteq B$

ฟังก์ชันจาก A ไปบน B : $D_f = A, R_f = B$

(4) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 ฟังก์ชัน) คือฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติว่า $(x_1,y) \in f$ และ $(x_2,y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

(5) พีชคณิตของฟังก์ชัน

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2. $(cf)(x) = cf(x)$
3. $fg(x) = f(x)\,g(x)$
4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

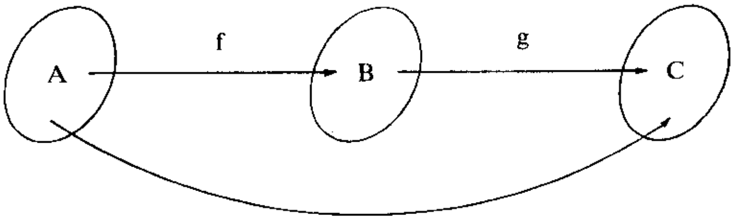
$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

$D_{fg} = D_f \cap D_g$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) \neq 0\}$

(6) ฟังก์ชันประกอบ

$g o f = \{(x,z) \in A \times C \mid y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in f$ และ $(y,z) \in g\}$




$gof(x) = g(f(x))$

(7) ชนิดของฟังก์ชัน มี 2 พวกใหญ่ ๆ คือ

1. ฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic function)
2. ฟังก์ชันอดิสัย (Trancendental function)

## แบบฝึกหัด 1.1

**โจทย์ข้อ 1** จงเขียนบรรยายสัญลักษณ์ต่อไปนี้

(1) $P \subseteq Q$ (2) $X \in A$ (3) $Y \notin Q$

(4) $\varnothing$ (5) $\{0\}$

**วิธีทำ**

(1) $P \subseteq Q$

เซต P เป็นสับเซตของ Q

(2) $x \in A$

x เป็นสมาชิกของ A

(3) $y \notin Q$

y ไม่เป็นสมาชิกของ Q

(4) $\varnothing$

เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์เรียกว่า เซตว่าง

(5) $\{0\}$

เซตซึ่งมีสมาชิกเพียงตัวเดียว คือ 0 #

**โจทย์ข้อ 2** ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกหรือผิด

(1) $2 \in \{1,2,3\}$

(2) $\{2,3\} = \{3,2\}$

(3) $\{2,3\} = \{2,2,3,2,3\}$

(4) $\{2\} \in \{1,2,3\}$

**วิธีทำ**

(1) ถูก

(2) ถูก

(3) ถูก

(4) ผิด

**โจทย์ข้อ 3** จงเขียนเซตต่อไปนี้ ในรูปแจงแจงสมาชิก

(1) { x| x เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 30 แต่น้อยกว่า 50 }

(2) { x | x เป็นชื่อวันในรอบสัปดาห์ }

(3) $\{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

(4) { x | x เป็นจำนวนนับที่เป็นเลขคู่และน้อยกว่า 14 }

(5) { y | $y^2 - 2y + 1 = 0$ }

**วิธีทำ**

(1) { 31,32,33,...,49 }

(2) { อาทิตย์ จันทร์ อังคาร พุธ พฤหัส ศุกร์ เสาร์ }

(3) { 1,2 }

(4) { 2,4,6,8,10,12 }

(5) { 1 }

**โจทย์ข้อ 4** จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปบอกเงื่อนไข

(1) { 1,2,3,4,5,6,7,8,9 }

(2) { ม่วง,คราม,น้ำเงิน,เขียว,เหลือง,แสด,แดง }

(3) { a,e,i,o,u }

(4) { $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}$ }

(5) { 20,40,60,... }

**วิธีทำ**

(1) { x | x เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 10 }

(2) { x | x เป็นสีรุ้ง }

(3) { x | x เป็นสระในภาษาอังกฤษ }

(4) { x | x เป็นจำนวนตักยะ ซึ่ง $x = \frac{1}{5n}$ , n = 1,2,3,4,5 }

(5) { x | x เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง x = 20n, n = 1,2,3,... }

**โจทย์ข้อ 5** กำหนดให้

A = { 1,2,3,4,5,6,7 }

B = { 1,2,3,5 }

C = { 4,6,8 }

และ U = { 1,2,3,...,10 }

จงหาค่าของ

(1) $A \cap (B \cup C)$ (2) $A \cup (B \cap C)$

(3) $(A \cup B) \cup C$ (4) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

(5) $A - B$ (6) $B - C$

(7) $(A \cap B)'$ (8) $C'$

(9) $(A - B) \cap C$ (10) $(A \cup B) - C$

**วิธีทำ**

(1)
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8\}$$
$$\therefore A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

(2)
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B \cap C = \emptyset$$
$$\therefore A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

(3)
$$(A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$C = \{4,6,8\}$$
$$\therefore (A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

(4)
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8\}$$
$$\therefore (A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

(5)
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B = \{1,2,3,5\}$$
$$\therefore A - B = \{4,6,7\}$$

(6)
$$B = \{1,2,3,5\}$$
$$C = \{4,6,8\}$$
$$\therefore B - C = \{1,2,3,5\}$$

(7)
$$\because (A \cap B) = \{1,2,3,5\}$$
$$\text{และ } U = \{1,2,3,\ldots,10\}$$
$$\therefore (A \cap B)' = \{4,6,7,8,9,10\}$$

(8) $\because C = \{ 4,6,8 \}$

และ $U = \{ 1,2,3,\ldots,10 \}$

$\therefore C' = \{ 1,2,3,5,7,9,10 \}$

(9) $\therefore A - B = \{ 4,6,7 \}$

และ $C = \{ 4,6,8 \}$

$\therefore (A - B) \cap C = \{ 4,6 \}$

(10) $\because A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

และ $C = \{ 4, 6, 8 \}$

$(A \cup B) - C = \{ 1,2,3,5,7 \}$ #

**โจทย์ข้อ 6** กำหนดให้ $U = \{ 1,2,3,\ldots,9 \}$

$A = \{ 1,2,3,4 \}$

$B = \{ 2,4,6,8 \}$

จงหาค่าของ (1) $A'$ (2) $B'$ (3) $(A \cup B)'$

**วิธีทำ**

(1) $A' = \{ 5,6,7,8,9 \}$

(2) $B' = \{ 1,3,5,7,9 \}$

(3) $\because A \cup B = \{ 1,2,3,4,6,8 \}$

$\therefore (A \cup B)' = \{ 5,7,9 \}$ #

**โจทย์ข้อ 7** จงเขียนสับเซตทั้งหมดของเซตที่กำหนดให้

(1) $A = \{ 1,3,5 \}$

(2) $B = \} 0,1,2,3,4 \}$

และจงหา $P(A)$

**วิธีทำ**

(2) สับเซตทั้งหมดของ A ได้แก่

$\varnothing$, { 1,3,5 },{ 1,3 },{ 1,5 },{ 3,5 },{ 1 },{ 3 },{ 5 }

(2) สับเซตทั้งหมดของ B ได้แก่

∅, {0, 1, 2, 3, 4}

{0, 1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, {0, 2, 3, 4}, {0, 1, 2, 4}, {0, 1, 3, 4}

{0, 1, 2}, {0, 1, 3}, {0, 1, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}

{0, 2, 3}, {0, 2, 4}, {0, 3, 4}, {2, 3, 4}

{0, 1}, {0, 2}, {0, 3}, {0, 4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}

{2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {0}, {1}, {2}, {3}, {4}

และ P(A) = { ∅,A,{ 1,3 },{ 1,5 },{ 3,5 },{ 1 },{ 3 },{ 5, } }

**โจทย์ข้อ 8** กำหนดให้ A = $\{ x \mid x^2-3x+2=0 \}$

B = { x | x เป็นเลขคู่ระหว่าง 0 กับ 4 }

C = $\{ x \mid x = 2+n, n=0,1,2 \}$

D = { x | x เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 5 }

จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

| | | |
|---|---|---|
| (1) $A \subseteq B$ | (2) $B \subseteq C$ | (3) $A \subseteq C$ |
| (4) $A \subseteq D$ | (5) $B \subseteq D$ | (6) $A = C$ |
| (7) $B = D$ | (8) $A = D$ | (9) $B \subsetneq A$ |

**วิธีทำ**

เขียน เซต A B C D เสียใหม่ในรูปแจกแจงสมาชิกจะได้

A = { 1,2 }

B = { 2 }

C = { 2,3,4 }

D = { 1,2,3,4 }

| | | |
|---|---|---|
| (1) ผิด | (4) ถูก | (7) ผิด |
| (2) ถูก | (5) ถูก | (8) ผิด |
| (3) ผิด | (6) ผิด | (9) ถูก # |

**โจทย์ข้อ 9** จงยกตัวอย่างเซต A,B,C ซึ่ง

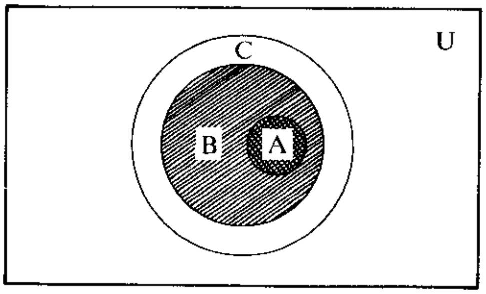
(1) $A \subseteq B \subseteq C$ (3) $A \cap B \subset C$

(2) $A \subseteq B, B \cap C \neq \emptyset, A \not\subseteq C$ (4) $A \cap = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \subset C$

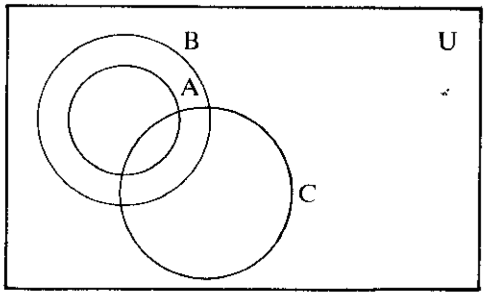
ให้เขียนภาพเวนน์ประกอบ

**วิธีทำ**

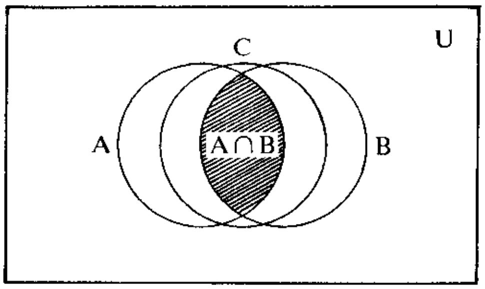
**(1)** $A \subseteq B \subseteq C$



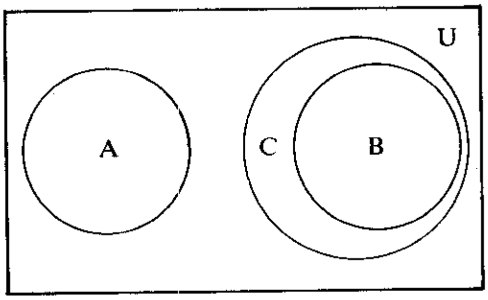

(2) $A \subseteq B, B \cap C \neq ,\emptyset, A \not\subseteq C$




(3) $A \cap B \subseteq C$



(4) $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \subseteq C$




#

**โจทย์ข้อ** 10. กำหนดให้ $A \cap B = \{2, 4\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \cap C = \{2, 3\}$

และ $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$

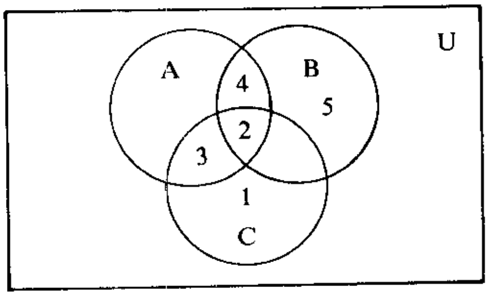
จงหาเซต A, B, C

**วิธีทำ**

$A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{2, 4, 5\}$

$C = \{1, 2, 3\}$ ดังรูป



## แบบฝึกหัด 1.2

**โจทย์ข้อ 1** จงยกตัวอย่างต่อไปนี้

(1) จำนวนจริง ซึ่งไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

(2) จำนวนเต็ม ซึ่งไม่ใช่จำนวนธรรมชาติ

(3) จำนวนตรรกยะ ซึ่งไม่ใช่จำนวนเต็ม

**วิธีทำ**

(1) **เช่น** $\sqrt{2}$, $\ell$, $\pi$, $\sqrt{3}$

(2) $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

(3) เช่น $\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{9}$, $0.7^{\circ}$, $3.5$ #

**โจทย์ข้อ 2** กำหนดให้ N = เซตของจำนวนธรรมชาติ

I = เซตของจำนวนเต็ม

Q = เซตของจำนวนตรรกยะ

R = เซตของจำนวนจริง

แล้วข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $I \subseteq N$ (2) $Q \subseteq R$ (3) $I \subseteq R$

(4) $N \subseteq Q'$ (5) $I \subseteq Q'$ (6) $Q' \subseteq R$

(7) $N \cap Q = \varnothing$ (8) $N \cap Q' = \varnothing$

**วิธีทำ**

(1) ผิด (5) ผิด

(2) ถูก (6) ถูก

(3) ถูก (7) ผิด

(4) ผิด (8) ถูก

**โจทย์ข้อ 3** จงบอกว่าจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นสมาชิกของเซตใดบ้างในระบบจำนวน

(1) $3\frac{1}{7}$ (2) 3.1416 (3) $\sqrt[3]{5}$

(4) $0.1\dot{3}\dot{7}$ (5) 0.12012301234,...

(6) 0.121212 (7) $\sqrt[3]{-8}$ (8) $\sqrt{-8}$

**วิธีทำ**

(1) จำนวนตรรกยะ

(2) จำนวนตรรกยะ

(3) จำนวนอตรรกยะ

(4) จำนวนตรรกยะ

(5) จำนวนอตรรกยะ

(6) จำนวนตรรกยะ

(7) จำนวนเต็ม

(8) จำนวนเชิงซ้อน #

**โจทย์ข้อ 4** ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้สอดคล้องกับกฎข้อใดของระบบจำนวน

(1) ถ้า $A = p(1 + rt)$ แล้ว $p(1 + rt) = A$

(2) ถ้า $2(x - 3) + 4x = 2x - 6 + 4x$ และ

$2x - 6 + 4x = 6x - 6$ แล้ว

$2(x - 3) + 4x = 6x - 6$

(3) $az = za$

(4) $(12a)b = 12(ab)$

(5) $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

(6) $cx$ เป็นจำนวนจริง

(7) $5 + (a + b) = (5 + a) + b$

(8) $y + z$ เป็นจำนวนจริง

**วิธีทำ**

(1) คุณสมบัติการสมมาตร (symmetric property)

(2) คุณสมบัติการถ่ายทอด (transitive property)

(3) คุณสมบัติสลับที่ของการคูณ

(4) คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

(5) คุณสมบัติการกระจาย (distributive law)

(6) คุณสมบัติปิดของการคูณ

(7) คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้

(8) คุณสมบัติปิดของการบวก #

**โจทย์ข้อ 5** จงเขียนเซตเพียงเซตเดียวแทนเซตต่อไปนี้

(1) $[2, 8] \cup [3, 9]$ (2) $(0, 7) \cup (3, 6)$

(3) $[0, \pi] \cap (3, 5]$ (4) $(-\pi, \pi) \cap (3, 4)$

(5) $(-1, \sqrt{2}) \cap (1.2, \sqrt{5})$

**วิธีทำ**

(1) $[2, 9]$

(2) $(0, 7)$

(3) $(3, \pi]$

(4) $[3, \pi)$

(5) $(1.2, \sqrt{2})$ #

**โจทย์ข้อ 6** กำหนดให้

$A = \{x \mid 0 \leqslant x < 7\}$

$B = [0, 1) \cup (2, 3)$

C = {x | x เป็นจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง 1 กับ 5}

จงหา $(A \cup B) \cap C$ และ $(A - B) \cap C$

**วิธีทำ**

เขียนใหม่เป็น

$A = [0, 7)$

$B = [0, 1) \cup (2, 3)$

$C = (1, 5)$

จะได้ $A \cup B = [0,7)$

$\therefore (A \cup B) \cap C = [0, 7) \cap (1, 5) = (1, 5)$

และ $A - B = (1, 2) \cup (3, 7)$

$\therefore \quad (A - B) \cup C = (1, 7)$ #

**โจทย์ข้อ 7** จงแก้อสมการต่อไปนี้

(1) $3x + 1 \leqslant 0$

**วิธีทำ**

$3x + 1 \leqslant 0$

$3x \leqslant -1$

$x \leqslant -\frac{1}{3}$ #

(2) $2x - 3 > 1$

**วิธีทำ** $2x - 3 > 1$

$2x > 1 + 3$

$2x > 4$

$x > 2$ #

(3) $2x - x^2 \leqslant -8$

**วิธีทำ** $8 + 2x - x^2 \leqslant 0$

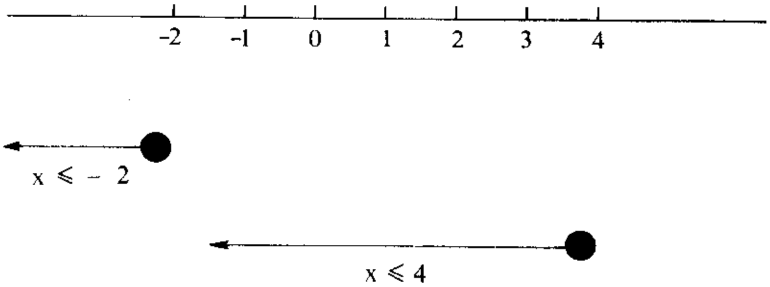
$(4 - x)(2 + x) \leqslant 0$

ดังนั้น $(4 - x), (2 + x)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันหรือเท่ากับ 0

**กรณีที่ 1**

$4 - x \geqslant 0$ และ $2 + x \leqslant 0$

$x \leqslant 4$ และ $x \leqslant -2$



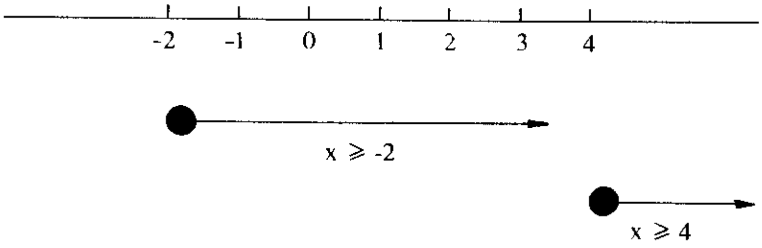

คำตอบคือ $x \leqslant 4$ และ $x \leqslant -2$

นั่นคือ $x \leqslant -2$

**กรณีที่ 2** $4 - x \leqslant 0$ และ $2 + x \geqslant 0$

$x \geqslant 4$ และ $x \geqslant -2$

คำตอบคือ $x \geqslant 4$




จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า คำตอบคือ $x \leqslant -2$ หรือ $x \geqslant 4$ #

(4) $\frac{3x}{x-1} \leqslant 5 - \frac{x}{x-4}$

**วิธีทำ** $\frac{3x}{x-1} + \frac{x}{x-4} - 5 \leqslant 0$

$$\frac{3x(x-4) + x(x-1) - 5(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \leqslant 0$$

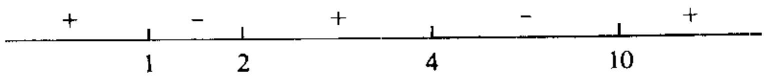
$$\frac{3x^2 - 12x + x^2 - x - 5x^2 + 25x - 20}{(x-1)(x-4)} \leqslant 0$$

$$\frac{-x^2 + 12x - 20}{(x-1)(x-4)} \leqslant 0$$

$$\frac{x^2 - 12x + 20}{(x-1)(x-4)} \geqslant 0$$

$$\frac{(x-2)(x-10)}{(x-1)(x-4)} \geqslant 0$$

พิจารณา




เซตคำตอบ คือ กรณีที่เป็นบวก คือ

$x < 1$ หรือ $2 \leqslant x < 4$ หรือ $x \geqslant 10$

หรือเขียนได้ในรูป

$(-\infty, 1) \cup [2, 4) \cup [10, \infty)$

(5) $(x-2)^2 \leqslant 7$

**วิธีทำ** $|x-2| \leqslant \sqrt{7}$

ดังนั้น

$-\sqrt{7} \leqslant x - 2 \leqslant \sqrt{7}$

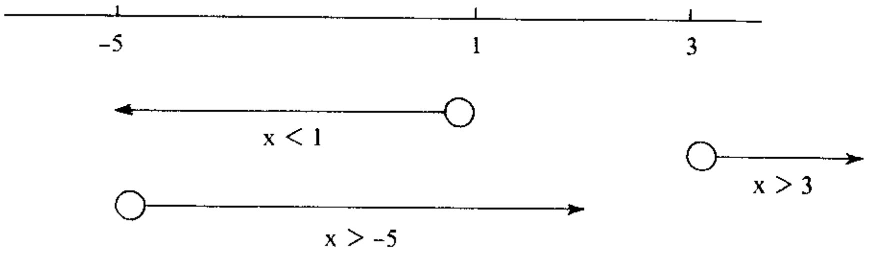
$2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{7}$

เซตคำตอบคือ ช่วงปิด $[2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}]$ #

(6) $(x-3)(x+5)(x-1) < 0$

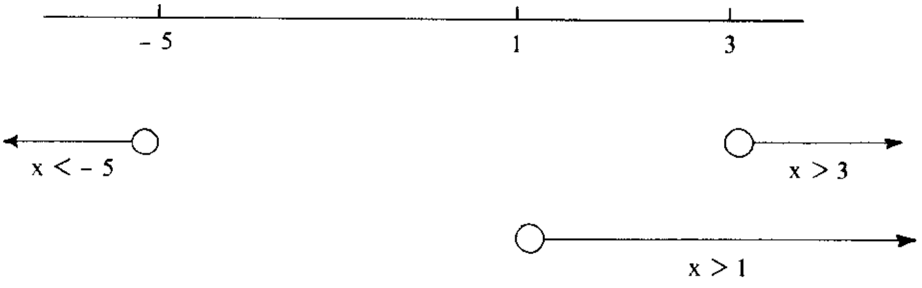
**วิธีทำ แสดงว่ามีตัวประกอบตัวหนึ่งเป็นลบ**
**อีก 2 ตัวเป็นบวกหรือลบทั้งหมด**

**กรณีที่ 1** $x-3>0$ , $x+5>0$ , และ $x-1<0$
เพราะฉะนั้น $x>3$ , $x>-5$ และ $x<1$




จากรูปจะเห็นว่าไม่มี x ค่าใดที่มีคุณสมบัติดังกล่าวพร้อมกัน

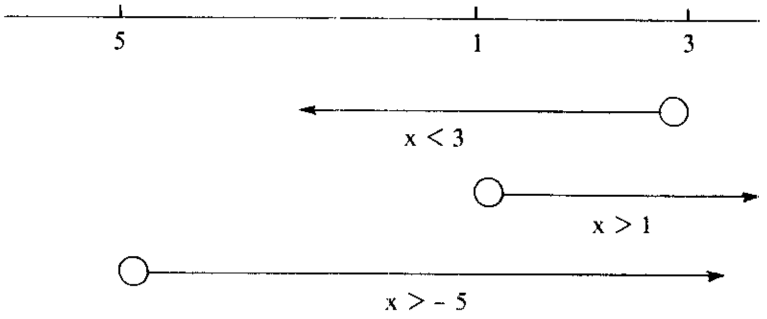
**กรณีที่ 2** $x-3>0$ , $x+5<0$ และ $x-1>0$
เพราะฉะนั้น $x>3$ , $x<-5$ และ $x>1$




จากรูปจะเห็นว่าไม่มี x ค่าใดที่มีคุณสมบัติดังกล่าวพร้อมกัน

**กรณีที่ 3** $x - 3 < 0, x + 5 > 0$ และ $x - 1 > 0$

$x < 3$ , $x > -5$ และ $x > 1$

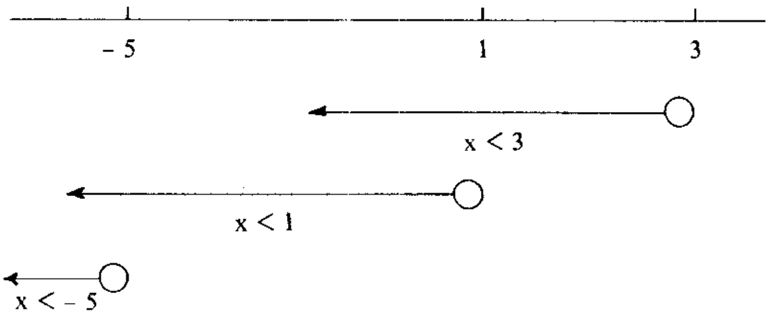



คำตอบที่สอดคล้องคือ $x > 1$ และ $x < 3$

นั่นคือ $1 < x < 3$

**กรณีที่ 4** $x - 3 < 0, x + 5 < 0$ และ $x - 1 < 0$

$x < 3$ , $x < -5$ และ $x < 1$




คำตอบที่สอดคล้องคือ $x < -5$

เซตคำตอบของอสมการคือ $\{ x \mid x < -5$ หรือ $1 < x < 3 \}$

(7) $\frac{x+1}{x-1} \leqslant 1$

**วิธีทำ**

$\frac{x+1}{x-1} - 1 \leqslant 0$

$\frac{x+1-(x-1)}{x-1} \leqslant 0$

$\frac{x+1-x+1}{x-1} \leqslant 0$

$\frac{2}{x-1} \leqslant 0$

แสดงว่า $x - 1$ ต้องมีเครื่องหมายเป็นลบ แต่ $x \neq 1$

ดังนั้น

$x - 1 < 0$

$x < 1$

เซตคำตอบคือ $\{ x \mid x < 1 \}$ #

(8) $(x-6)(x-10) < (x-9)(x-7)$

**วิธีทำ** $(x-6)(x-10) < (x-9)(x-7)$

$x^2 - 16x + 60 < x^2 - 16x + 63$

$60 < 63$

แสดงว่าสำหรับ x ใด ๆ ค่า x จะสอดคล้องกับอสมการเสมอ

เซตคำตอบคือ R #

**โจทย์ข้อ 8** จงหาค่าของ

(1) $|3 - 7|$ (2) $|0.5 - 3.2|$

(3) $|-3| + |3|$ (4) $\left|\frac{-3}{12}\right|$

**วิธีทำ**

(1) $|3-7| = |-4| = 4$

(2) $|0.5-3.2| = |-2.7| = 2.7$

(3) $|-3| + |3| = 3 + 3 = 6$

(4) $\left|\frac{-3}{12}\right| = \frac{|-3|}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ #

9. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(1) $|x-3| < 1$

**วิธีทำ** จากคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า

$-1 < x-3 < 1$

เอา 3 บวกตลอดจะได้ $-1+3 < x < 1+3$

นั่นคือ $2 < x < 4$

เซตคำตอบคือ ช่วงเปิด $(2, 4)$ #

(2) $|x+1| > 3$

**วิธีทำ** จากคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า

$(x+1) > 3$ หรือ $(x+1) < -3$

$x > 2$ หรือ $x < -4$

เซตคำตอบคือ $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ #

(3) $|2x-3| \geqslant |x+2|$

**วิธีทำ**

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$|2x-3|^2 \geqslant |x+2|^2$$

$$(2x-3)^2 \geqslant (x+2)^2$$

$$4x^2-12x+9 \geqslant x^2+4x+4$$

$$3x^2-16x+5 \geqslant 0$$

$$(3x-1)(x-5) \geqslant 0$$

**กรณีที่ 1**

$(3x - 1) \geq 0$ และ $(x - 5) \geq 0$

$x \geq \frac{1}{3}$ และ $x \geq 5$

**กรณีที่ 2**

$(3x - 1) \leq 0$ และ $(x - 5) \leq 0$

$x \leq \frac{1}{3}$ และ $x \leq 5$

เซตคำตอบคือ $(-\infty, \frac{1}{3}] \cup [5, \infty)$ #

(4) $|x| < 3 - 2x$

**วิธีทำ**

$|x|^2 < (3 - 2x)^2$

$x^2 < 9 - 12x + 4x^2$

$3x^2 - 12x + 9 > 0$

$x^2 - 4x + 3 > 0$

$(x - 1)(x - 3) > 0$

**กรณีที่ 1**

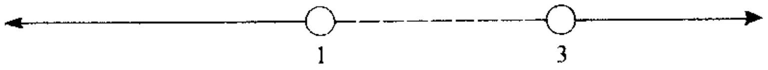
$(x - 1) > 0$ และ $(x - 3) > 0$

$x > 1$ และ $x > 3$

**กรณีที่ 2**

$(x - 1) < 0$ และ $(x - 3) < 0$

$x < 1$ และ $x < 3$




เซตคำตอบคือ $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

(5) $\left| \frac{x-2}{x} \right| \leqslant 2$

$\therefore -2 \leqslant \frac{x-2}{x} \leqslant 2$

**กรณีที่ 1**

ถ้า $x > 0$ จะได้

$-2x \leqslant x - 2 \leqslant 2x$

$-2x \leqslant x - 2$ และ $x - 2 \leqslant 2x$

$3x \geqslant 2$ และ $x \geqslant -2$

$x \geqslant \frac{2}{3}$ และ $x \geqslant -2$

นั่นคือ $x \geqslant \frac{2}{3}$

**กรณีที่ 2**

ถ้า $x < 0$ จะได้

$2x \leqslant x - 2 \leqslant -2x$

$2x \leqslant x - 2$ และ $x - 2 \leqslant -2x$

$x \leqslant -2$ และ $3x \leqslant 2$

$x \leqslant -2$ และ $x \leqslant \frac{2}{3}$

$\therefore x \leqslant -2$

คำตอบของอสมการคือ $x \leqslant -2$ หรือ $x \geqslant \frac{2}{3}$

เซตคำตอบคือ $(-\infty, -2] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$ #

**โจทย์ข้อ 10** จงยกตัวอย่างเซตซึ่งเป็นสับเซตของจำนวนจริงและมีคุณสมบัติ

(1) มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

(2) มีเฉพาะขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตล่าง

(3) มีเฉพาะขอบเขตล่าง แต่ไม่มีขอบเขตบน

(4) ไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

(5) มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างเป็นลบทั้งคู่

(6) มีขอบเขตบนเป็นบวกขอบเขตล่างเป็นลบ

**วิธีทำ** ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a < b$

(1) $A = (a, b)$

(2) $B = (-\infty, b)$

(3) $C = (a, \infty)$

(4) $A = (-\infty, \infty)$

(5) $B = [-b, -a]$

(6) $C = [-a, b)$ #

## แบบฝึกหัด 1.3

**โจทย์ข้อ** 1. กำหนดให้ $A = \{-1, -2\}$ $B = \{3, 4, 5\}$ และ $C = \{7, 8\}$ จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้

(1) $A \times B$ (2) $A \times C$

(3) $B \times C$ (4) $C \times B$

**วิธีทำ**

(1) $A \times B = \{(-1, 3), (-1, 4), (-1, 5), (-2, 3), (-2, 4), (-2, 5)\}$

(2) $A \times C = \{(-1, 7), (-1, 8), (-2, 7), (-2, 8)\}$

(3) $B \times C = \{(3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8)\}$

(4) $C \times B = \{(7, 3), (7, 4), (7, 5), (8, 3), (8, 4), (8, 5)\}$ #

**โจทย์ข้อ** 2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์

(1) $r_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(2) $r_2 = \{(-2, 0), (0, 2), (2, 0)\}$

(3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = x + 3, x \in \{-3, -1, 0, 2\}\}$

(4) $r_4 = \{(x, y) \in I \times I \mid |y| \leq x, -2 \leq x \leq 2\}$

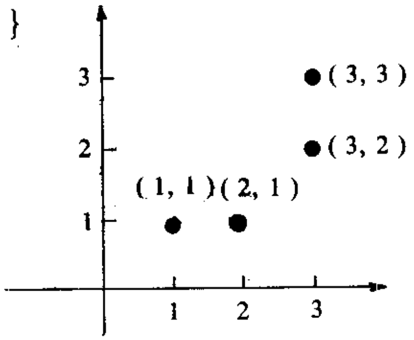
(5) $r_5 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \leq x\}$

**วิธีทำ**

(1) $r_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$D_r = \{1, 2, 3\}$

$R_r = \{1, 2, 3\}$

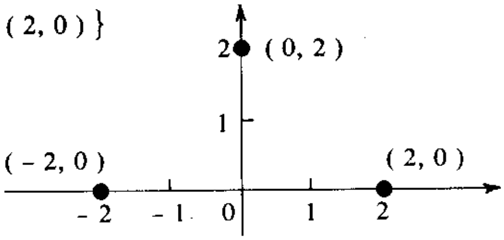



#

(2) $r_2 = \{(-2, 0), (0, 2), (2, 0)\}$

$D_r = \{-2, 0, 2\}$

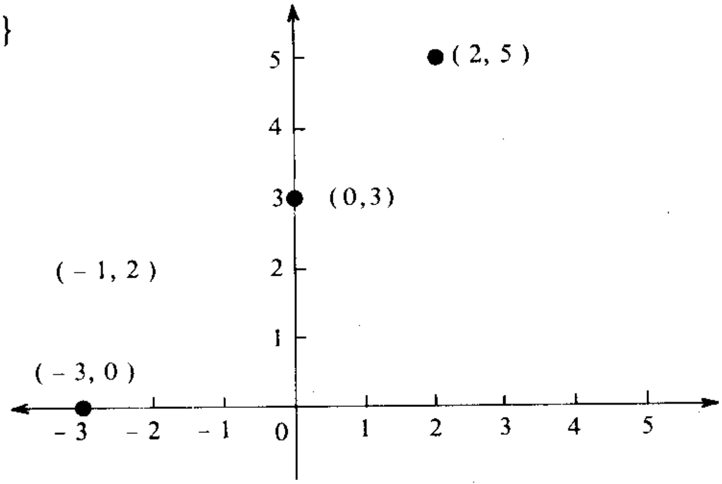
$R_r = \{0, 2\}$




(3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = (x + 3), x \in \{-3, -1, 0, 2\}\}$

$D_r = \{-3, -1, 0, 2\}$

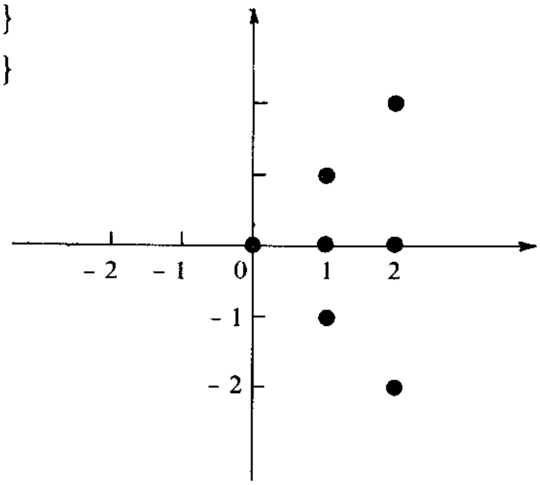
$R_r = \{0, 2, 3, 5\}$



(4) $r_4$ $\{(x, y) \in I \times I \mid |y| \leqslant x, -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

$D_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

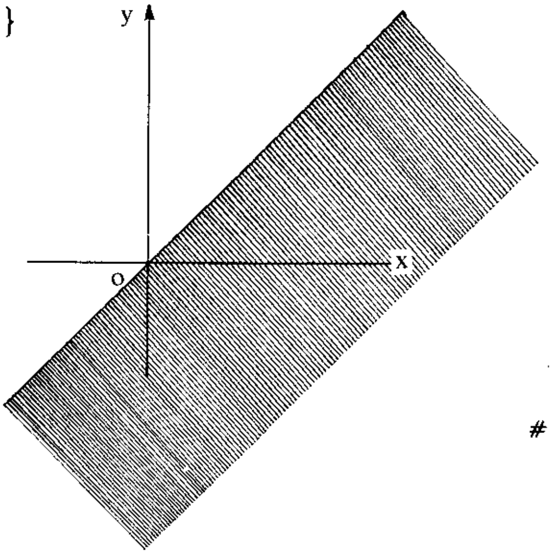
$R_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$




(5) $r_5 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \leqslant x\}$

$D_r = \{x \mid x \in R\}$

$R_r = \{y \in R \mid y \leqslant x\}$




#

**โจทย์ข้อ 3.** จงบอกว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ด้วย

(1) $f = \{(-3, 0), (0, 3), (3, 0)\}$

(2) $g = \{(1, 1), (1, 4), (1, -3), (0, 0), (2, 0)\}$

(3) $h = \{(x, y) \mid y = 6 - 2x, 0 \leq x \leq 6\}$

(4) $i = \{(x, y) \mid y^2 = 4x\}$

(5) $j = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$

**วิธีทำ**

(1) $f = \{(-3, 0), (0, 3), (3, 0)\}$ เป็นฟังก์ชัน

$D_r = \{-3, 0, 3\}$

$R_r = \{0, 3\}$

(2) $g = \{(1, 1), (1, 4), (1, -3), (0, 0), (2, 0)\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน

$D_r = \{0, 1, 2\}$

$R_r = \{-3, 0, 4\}$

(3) $h = \{(x, y) \mid y = 6 - 2x, 0 \leq x \leq 6\}$

เป็นฟังก์ชัน

$D_r = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 6\}$

$R_r = \{y \in R \mid -6 \leq y \leq 6\}$

(4) $i = \{(x, y) \mid y^2 = 4x\}$

ไม่เป็นฟังชัน

$D_r = \{x \in R \mid x \geq 0\}$

$R_r = \{y \in R \mid -\infty < y < +\infty\}$

(5) $j = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$

เป็นฟังก์ชั่น

$D_r = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$

$R_r = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 2\}$ #

**โจทย์ข้อ 4**

กำหนด $f(x) = 10x - 7$

$g(t) = 6 - 2t$

$h(u) = 3u^2$

$k(v) = v - v^2$

จงหาค่าของ

(1) $f(1), g(2), h(-1), k(3)$

(2) $f(3) + g(2), h(3) - k(4)$

(3) $\dfrac{f(2)\, g(4)}{k(-2)}$

(4) $4f(-2) - 2g(-3)$

**วิธีทำ**

(1) $f(1) = 10(1) - 7 = 10 - 7 = 3$

$g(2) = 6 - 2(2) = 6 - 4 = 2$

$h(-1) = 3(-1)^2 = 3(1) = 3$

$k(3) = 3 - 3^2 = 3 - 9 = -6$

(2) $\because f(3) = 10(3) - 7 = 30 - 7 = 23$

และ $g(2) = 2$

$\therefore f(3) + g(2) = 23 + 2 = 25$

$\because h(3) = 3(3)^2 = 3(9) = 27$

และ $k(4) = 4 - (4)^2 = 4 - 16 = -12$

$\therefore h(3) - k(4) = 27 - (-12) = 27 + 12 = 39$

(3) $\because f(2) = 10(2) - 7 = 20 - 7 = 13$

$g(4) = 6 - 2(4) = 6 - 8 = -2$

$k(-2) = -2 - (-2)^2 = -2 - 4 = -6$

$\therefore \dfrac{f(2)\, g(4)}{k(-2)} = \dfrac{(13)(-2)}{-6} = \dfrac{13}{3} = 4\dfrac{1}{3}$

(4) $\because f(-2) = 10(-2) - 7 = -20 - 7 = -27$

$4f(-2) = 4(-27) = -108$

$\because g(-3) = 6 - 2(-3) = 6 + 6 = 12$

$2g(-3) = 2(12) = 24$

$\because 4f(-2) - 2g(-3) = -108 - 24 = -132$ #

**โจทย์ข้อ 5**

กำหนด

$g(x) = 3 - 2x$

$f(x) = 3x + 5$

$Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$P(x) = 2x^2 + 3$

จงหาค่าของ

(1) $g[f(-1)]$

(2) $g \circ f(x)$ และ $g \circ f(-1)$

(3) $f \circ g(x)$ และ $f \circ g(-1)$

(4) $Q \circ P(x)$ และ $Q \circ P(2)$

(5) $P \circ Q(x)$ และ $P \circ Q(-3)$

(1) $g[f(-1)]$

**วิธีทำ**

$\because g(x) = 3 - 2x$ และ $f(x) = 3x + 5$

$\therefore g[f(x)] = 3 - 2(3x + 5)$

$= 3 - 6x - 10$

$= -6x - 7$

และ $g[f(-1)] = -6(-1) - 7 = 6 - 7 = 1$

(2) $g \circ f(x) = g(f(x)) = -6x - 7$

$g \circ f(-1) = g(f(-1)) - 6(-1) - 7 = -1$

$$
\begin{aligned}
(3)\ fog(x) &= f(g(x)) \\
&= 3(3-2x)+5 \\
&= 9-6x+5 \\
&= 14-6x \\
fog(-1) &= f(g(-1) \\
&= 14-6(-1) \\
&= 14+6 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

(4) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ และ $P(x) = 2x^2 + 3$

$$
\begin{aligned}
QoP(x) &= Q(P(x)) \\
&= (2x^2+3)^2 - 2(2x^2+3) + 1 \\
&= 4x^4 + 12x^2 + 9 - 4x^2 - 6 + 1 \\
&= 4x^4 + 8x^2 + 4 \\
QoP(2) &= 4(2)^4 + 8(2)^2 + 4 \\
&= 64 + 32 + 4 \\
&= 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\ PoQ(x) &= P(Q(x)) \\
&= 2(x^2 - 2x + 1)^2 + 3 \\
&= 2(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + 3 \\
&= 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 2 + 3 \\
&= 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 5 \\
P \circ Q(-3) &= P(Q(-3)) \\
&= 2(-3)^4 - 8(-3)^3 + 12(-3)^2 - 8(-3) + 5 \\
&= 2(81) - 8(-27) + 12(9) + 24 + 5 \\
&= 162 + 216 + 108 + 24 + 5 \\
&= 515
\end{aligned}
$$