

บทที่ 7 พื้นผิว (Surfaces)

7.1 กราฟของสมการ

ในปริภูมิ 3 มิติ กราฟของสมการจะประกอบไปด้วยเซตของจุดทั้งหลายที่คล้อยตามสมการ ถ้ามีฟังก์ชันของสามตัวแปร

$$f(x, y, z) = 0 \quad \dots\dots(7.1.1)$$

เซตของจุด (x, y, z) ซึ่งคล้อยตามสมการ $f(x, y, z) = 0$ เรียกว่าพื้นผิว (surface) สมการ (7.1.1) เรียกว่าสมการพื้นผิว เช่น

$$x - 2y + 3z - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

ในการเขียนกราฟของสมการพื้นผิว ก็เช่นเดียวกับการเขียนกราฟของสมการในระนาบ คือต้องหาจุดตัดแกนพิกัด สมมาตร ขอบเขต ของพื้นผิวนอกจากนั้นในปริภูมิ 3 มิติ จะต้องพิจารณาเพิ่มเติมถึงรอยตัด (trace) ของผิวกับระนาบพิกัดหรือระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด จึงจะเขียนกราฟของพื้นผิวได้ง่ายขึ้น

การหาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัดทำในทำนองเดียวกัน กับในระนาบคือถ้าหาจุดตัดแกน x ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิวค่า x ที่ได้เป็นส่วนตัดแกน x

- นิยาม 7.1.1 ถ้าสมการผิวคือ $f(x, y, z) = 0$
- จุดที่ผิวตัดแกน x มีพิกัด $(x, 0, 0)$
 - จุดที่ผิวตัดแกน y มีพิกัด $(0, y, 0)$
 - จุดที่ผิวตัดแกน z มีพิกัด $(0, 0, z)$

นิยาม 7.1.2 ถ้าสมการผิว $f(x, y, z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน x ด้วย $-x, y$ ด้วย $-y$ และ z ด้วย $-z$ พร้อมกันจะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด
 ถ้าสมการผิว $f(x, y, z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน x ด้วย $-x$ จะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ yz

ในทำนองเดียวกันถ้าสมการผิว $f(x, y, z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน y ด้วย $-y$ หรือ z ด้วย $-z$ จะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ xz หรือระนาบ xy ตามลำดับ

สำหรับสมมาตรกับแกนพิกัด เช่นผิวมีสมมาตรกับแกน x หมายถึงถ้าแทน y ด้วย $-y$ และ z ด้วย $-z$ พร้อมกันในสมการผิวแล้วสมการไม่เปลี่ยน แกน y แกน z ก็นิยามในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 7.1.1 จงหาจุดตัดแกนพิกัด และพิจารณาสมมาตรของสมการ

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$

วิธีทำ จุดตัดแกน x แทนค่า $y = 0, z = 0$ จะได้

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

จุดตัดแกน x คือ $(2, 0, 0)$ และ $(-2, 0, 0)$

จุดตัดแกน y โดยแทน $x = 0, z = 0$ จะได้

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

จุดตัดแกน y คือ $(0, \sqrt{2}, 0)$ และ $(0, -\sqrt{2}, 0)$

จุดตัดแกน z โดยแทน $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้

$$-3z^2 = 4$$

$$z^2 = -\frac{4}{3}$$

จะเห็นว่าไม่มีค่า z ซึ่งคล้อยตามสมการดังนั้นกราฟไม่ตัดแกน z

สมมาตร

$$\text{จากสมการ } x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$

$$\text{แทน } x \text{ ด้วย } -x \text{ จะได้ } (-x)^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$
$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$

สมการไม่เปลี่ยน ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับระนาบ yz

ในทำนองเดียวกัน จะเห็นว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ xz และ xy ด้วย

ถ้าจะพิจารณาสมมาตรกับแกนพิกัด เช่น แกน x แทน y ด้วย $-y$ และ z ด้วย $-z$ จะได้

$$x^2 + 2(-y)^2 - 3(-z)^2 = 4$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4 \quad \text{สมการไม่เปลี่ยน}$$

ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับแกน x

ถ้าพิจารณาสมมาตรกับแกน y แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยน ผิวมีสมมาตรกับแกน y สำหรับสมมาตรกับแกน z ก็พิจารณาได้เช่นกัน

ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับแกนพิกัด x, y และ z

นิยาม 7.1.3 สมการผิว $f(x, y, z) = 0$ ตัดกับระนาบพิกัดเรียกว่า รอยตัด (trace) ถ้าผิวตัดกับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด เรียกว่า ภาคตัด (section)

$$\text{ระนาบพิกัด } xy \text{ มีสมการ } z = 0$$

$$\text{ระนาบพิกัด } xz \text{ มีสมการ } y = 0$$

$$\text{และ ระนาบพิกัด } yz \text{ มีสมการ } x = 0$$

$$\text{จะเห็นว่า ระนาบที่ขนานกับ } xy \text{ คือ } z = k$$

$$\text{ระนาบที่ขนานกับ } xz \text{ คือ } y = k$$

$$\text{ระนาบที่ขนานกับ } yz \text{ คือ } x = k$$

ดังนั้นในการหารอยตัด หรือภาคตัดหาสมการของเส้นโค้งโดยการ แทนค่า x, y, z ดั่งนิยาม

ตัวอย่าง 7.1.2 จงเขียนกราฟของสมการ $x + 2y + 3z = 6$

วิธีทำ จุดตัดแกน x ของผิว คือ $(6, 0, 0)$

จุดตัดแกน y คือ $(0, 3, 0)$

และจุดตัดแกน z คือ $(0, 0, 2)$

จากสมการผิว x, y, z มีกำลังหนึ่งดังนั้นผิวไม่สมมาตรกับแกน
พิสัยหรือระนาบพิสัย

พิจารณารอยตัด กับระนาบ xy แทน $z = 0$ จะได้สมการ

$$x + 2y = 6 \text{ เป็นสมการเส้นตรง}$$

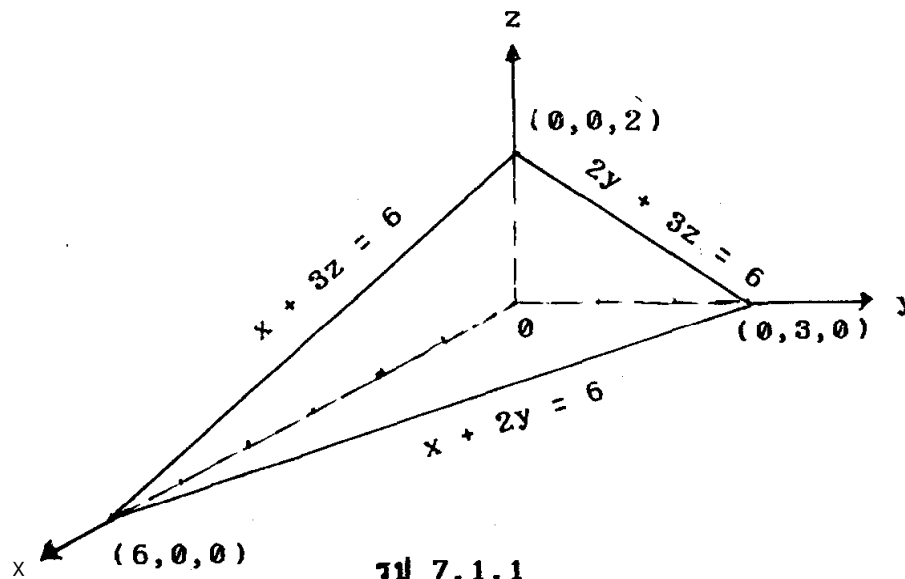
รอยตัดกับระนาบ yz แทน $x = 0$ จะได้

$$2y + 3z = 6$$

รอยตัดกับระนาบ xz แทน $y = 0$ จะได้

$$x + 3z = 6$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 7.1.1

แบบฝึกหัด 7.1

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

1. $y = 5$

2. $4x^2 + y^2 = 12$

3. $x^2 = y = 1$

4. $3x + 2y + z = 6$

5. $2x^2 + 2y^2 = z$

6. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

7.2 ทรงกลม (sphere)

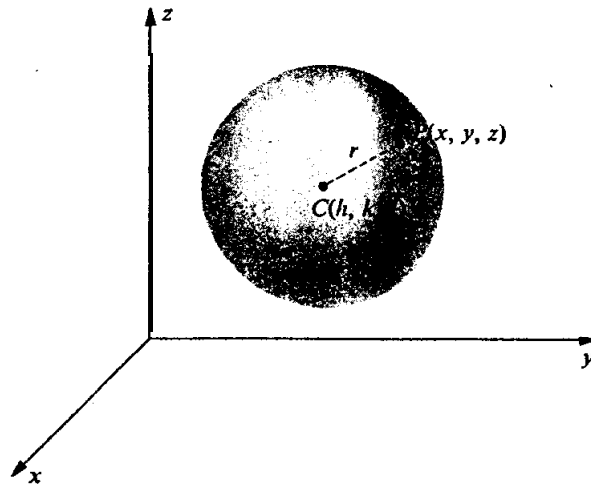
นิยาม 7.2.1 ทรงกลมคือทางเดินของจุดในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งมีระยะห่างจากจุดตรึงเป็นระยะทางคงที่ จุดตรึงคือจุดศูนย์กลางของทรงกลม และระยะทางคงที่คือรัศมี

สมการทรงกลม กำหนดให้ $C(h, k, l)$ เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมมีรัศมี r ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนผิวทรงกลม

$$\overline{CP} = r$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$



รูป 7.2.1

สมการทรงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีรัศมี r คือ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

สมการทั่วไปของทรงกลมคือ

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

$$\text{หรือ } \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}{4}$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$ และรัศมี $\frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$

เมื่อ $D^2 + E^2 + F^2 - 4G > 0$

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาสมการทรงกลมซึ่งมีจุด $(4, -8, 1)$ และ $(-2, 2, 3)$ เป็นจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลาง

วิธีทำ จุดศูนย์กลางของทรงกลมคือจุดกึ่งกลางของ $(4, -8, 1)$ และ $(-2, 2, 3)$

$$\text{จุดกึ่งกลางคือ } \left(\frac{4-2}{2}, \frac{-8+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, -3, 2)$$

รัศมีของผิวทรงกลมคือ ระยะห่างระหว่างจุด $(4, -8, 1)$ และ $(1, -3, 2)$

$$r = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-8 + 3)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

สมการทรงกลมคือ

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 35$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 21 = 0$$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 2 = 0$$

วิธีทำ ใช้สูตรจุดศูนย์กลางของทรงกลมคือ $(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{c}{2}) = (2, -3, 5)$

$$\text{รัศมีของทรงกลม} = \sqrt{\frac{1}{4} (116 + 36 + 100 - 8)}$$

$$= 6$$

ถ้าไม่ใช้สูตร ก็อาจหารัศมีและจุดศูนย์กลางโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

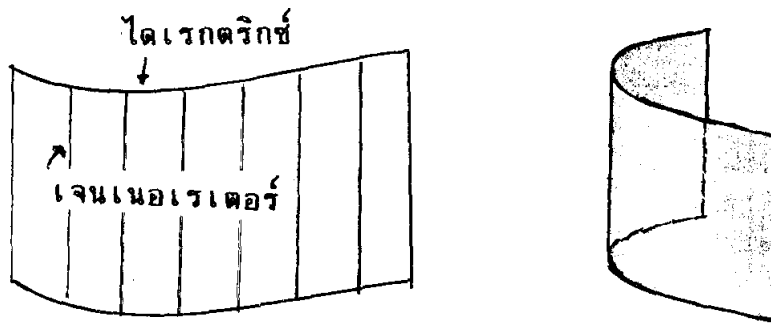
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 10z + 25) = 4 + 9 + 25 - 2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$$

จะได้จุดศูนย์กลางที่ $(2, -3, 5)$ รัศมี 6

7.3 ทรงกระบอก (Cylinders)

นิยาม 7.3.1 ผิวทรงกระบอกคือ เซตของจุดทั้งหลายบนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และตัดกับเส้นโค้งในระนาบเส้นหนึ่ง เส้นโค้งในระนาบเรียกว่า ไคเรกตริกซ์ (directrix) เส้นขนานแต่ละเส้นเรียกว่าเจนเนอเรเตอร์ (generator) ของทรงกระบอก



รูป 7.3.1

ทฤษฎี 7.3.1 กราฟของสมการที่มี 2 ตัวแปร ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นสมการทรงกระบอกซึ่งเจเนอเรเตอร์ ขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป เช่น สมการ $x^2 + z^2 = 4$

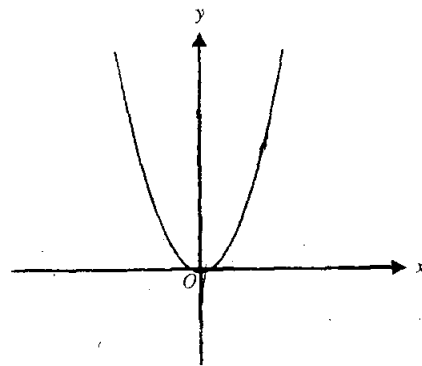
$$y^2 = 8x$$

$$3y + z = 5$$

เป็นสมการผิวทรงกระบอก

ตัวอย่าง 7.3.1 จงเขียนกราฟของ $y = x^2$

วิธีทำ สมการ $y = x^2$ มีตัวแปร 2 ตัว ดังนั้นเป็นสมการทรงกระบอกซึ่งมีเจเนอเรเตอร์ ขนานกับแกน z ในสมการไม่มีตัวแปร z สมการ $y = x^2$ ในระนาบ จะเห็นพาราโบลาดังรูป



รูป 7.3.2

