บทที่ 7
พื้นผิว
(Surfaces)

7.1 กราฟของสมการ

ในปริภูมิ 3 มิติ กราฟของสมการจะประกอบไปด้วยเซตของจุดทั้งหลายที่คล้องตามสมการ ถ้ามีฟังก์ชันของสามตัวแปร

$$f(x,y,z) = 0 \qquad .....(7.1.1)$$

เซตของจุด (x,y,z) ซึ่งคล้องตามสมการ $f(x,y,z) = 0$ เรียกว่า**พื้นผิว** (surface) สมการ (7.1.1) เรียกว่า**สมการพื้นผิว** เช่น

$$x - 2y + 3z - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

ในการเขียนกราฟของสมการพื้นผิว ก็เช่นเดียวกับการเขียนกราฟของสมการในระนาบ คือต้องหาจุดตัดแกนพิกัด สมมาตร ขอบเขต ของพื้นผิว นอกจากนั้นในปริภูมิ 3 มิติ จะต้องพิจารณาเพิ่มเติมถึงรอยตัด (trace) ของผิวกับระนาบพิกัดหรือระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด จึงจะเขียนกราฟของพื้นผิวได้ง่ายขึ้น

การหาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัดทำในทำนองเดียวกัน กับในระนาบคือถ้าหาจุดตัดแกน x ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิวค่า x ที่ได้เป็นส่วนตัดแกน x

นิยาม 7.1.1 ถ้าสมการผิวคือ $f(x,y,z) = 0$
จุดที่ผิวตัดแกน x มีพิกัด $(x,0,0)$
จุดที่ผิวตัดแกน y มีพิกัด $(0,y,0)$
จุดที่ผิวตัดแกน z มีพิกัด $(0,0,z)$

นิยาม 7.1.2 ถ้าสมการผิว $f(x, y, z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน x ด้วย $-x$, y ด้วย $-y$ และ z ด้วย $-z$ พร้อมกันจะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

ถ้าสมการผิว $f(x,y,z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน x ด้วย $-x$ จะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ yz

ในทำนองเดียวกันถ้าสมการผิว $f(x,y,z) = 0$ ไม่เปลี่ยนเมื่อแทน y ด้วย $-y$ หรือ z ด้วย $-z$ จะกล่าวว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ xz หรือระนาบ xy ตามลำดับ

สำหรับสมมาตรกับแกนพิกัด เช่นผิวมีสมมาตรกับแกน x หมายถึง ถ้าแทน y ด้วย $-y$ และ z ด้วย $-z$ พร้อมกันในสมการผิวแล้วสมการไม่เปลี่ยน แกน y แกน z ก็นิยามในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 7.1.1 จงหาจุดตัดแกนพิกัด และพิจารณาสมมาตรของสมการ

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$

วิธีทำ จุดตัดแกน x แทนค่า $y = 0$, $z = 0$ จะได้

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

จุดตัดแกน x คือ $(2,0,0)$ และ $(-2,0,0)$

จุดตัดแกน y โดยแทน $x = 0$, $z = 0$ จะได้

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

จุดตัดแกน y คือ $(0,\sqrt{2},0)$ และ $(0,-\sqrt{2},0)$

จุดตัดแกน z โดยแทน $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้

$$-3z^2 = 4$$

$$z^2 = -\frac{4}{3}$$

จะเห็นว่าไม่มีค่า z ซึ่งคล้องตามสมการดังนั้นกราฟไม่ตัดแกน z

สมมาตร

จากสมการ $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$

แทน x ด้วย -x จะได้ $(-x)^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$$

สมการไม่เปลี่ยน ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับระนาบ yz

ในทำนองเดียวกัน จะเห็นว่าผิวมีสมมาตรกับระนาบ xz และ xy ด้วย

ถ้าจะพิจารณาสมมาตรกับแกนพิกัด เช่น แกน x แทน y ด้วย -y และ z ด้วย -z จะได้

$$x^2 + 2(-y)^2 - 3(-z)^2 = 4$$

$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$ สมการไม่เปลี่ยน

ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับแกน x

ถ้าพิจารณาสมมาตรกับแกน y แทน x ด้วย -x และ y ด้วย -y จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยน ผิวมีสมมาตรกับแกน y สำหรับสมมาตรกับแกน z ก็พิจารณาได้เช่นกัน

ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับแกนพิกัด x,y และ z

นิยาม 7.1.3 สมการผิว $f(x,y,z) = 0$ ตัดกับระนาบพิกัดเรียกว่า **รอยตัด** (trace) ถ้าผิวตัดกับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด เรียกว่า **ภาคตัด** (section)

ระนาบพิกัด xy มีสมการ $z = 0$

ระนาบพิกัด xz มีสมการ $y = 0$

และ ระนาบพิกัด yz มีสมการ $x = 0$

จะเห็นว่า ระนาบที่ขนานกับ xy คือ $z = k$

ระนาบที่ขนานกับ xz คือ $y = k$

ระนาบที่ขนานกับ yz คือ $x = k$

ดังนั้นในการหารอยตัด หรือภาคตัดหาสมการของเส้นโค้งโดยการแทนค่า x,y,z ดังนิยาม

ตัวอย่าง 7.1.2 จงเขียนกราฟของสมการ $x + 2y + 3z = 6$

วิธีทำ จุดตัดแกน x ของผิว คือ (6,0,0)

จุดตัดแกน y คือ (0,3,0)

และจุดตัดแกน z คือ (0,0,2)

จากสมการผิว x,y,z มีกำลังหนึ่งดังนั้นผิวไม่สมมาตรกับแกนพิกัดหรือระนาบพิกัด

พิจารณารอยตัด กับระนาบ xy แทน $z = 0$ จะได้สมการ

$$x + 2y = 6$$ เป็นสมการเส้นตรง

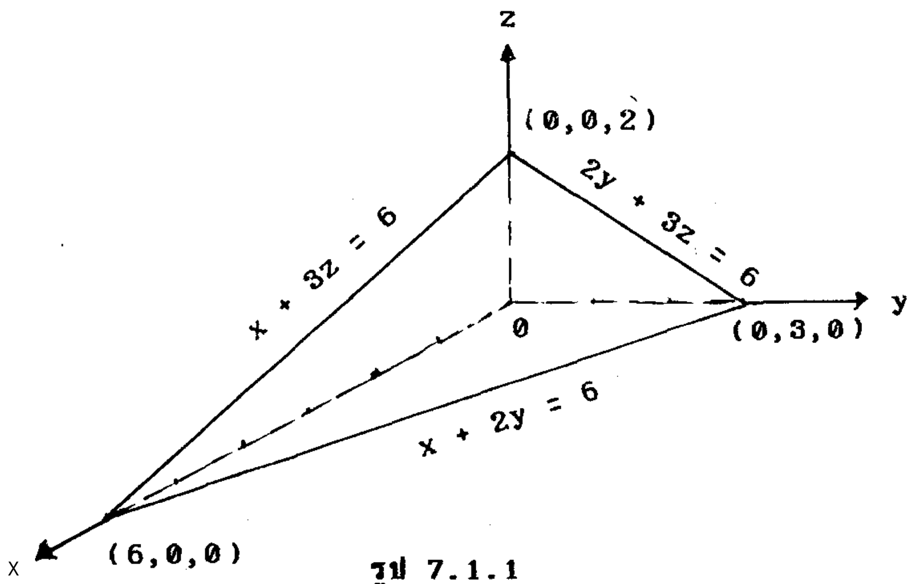
รอยตัดกับระนาบ yz แทน $x = 0$ จะได้

$$2y + 3z = 6$$

รอยตัดกับระนาบ xz แทน $y = 0$ จะได้

$$x + 3z = 6$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 7.1.1

แบบฝึกหัด 7.1

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

1. $y = 5$

2. $4x^2 + y^2 = 12$

3. $x^z = y = 1$

4. $3x + 2y + z = 6$

5. $2x^2 + 2y^2 = z$

6. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

7.2 ทรงกลม sphere)

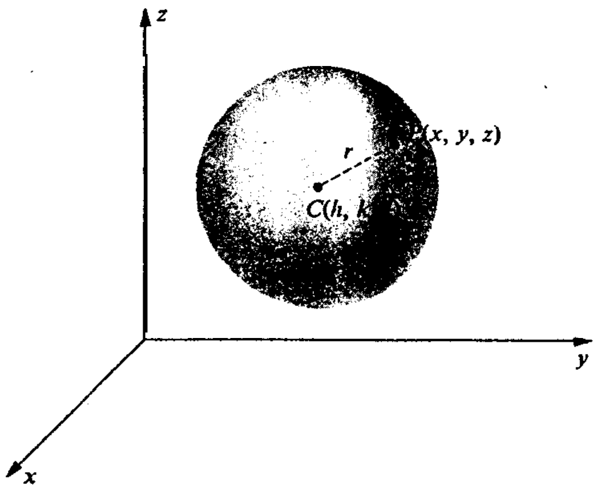
นิยาม 7.2.1 ทรงกลมคือทางเดินของจุดในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งมีระยะห่างจากจุดตรึงเป็นระยะทางคงที่
จุดตรึงคือจุดศูนย์กลางของทรงกลม และระยะทางคงที่คือรัศมี

สมการทรงกลม กำหนดให้ $C(h,k,l)$ เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมมีรัศมี r
ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดบนผิวทรงกลม

$$\overline{CP} = r$$

$$\sqrt{(x-h)^z + (y-h)^z + (z-l)^z} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$



รูป 7.2.1

สมการทรงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีรัศมี r คือ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

สมการทั่วไปของทรงกลมคือ

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

หรือ $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 + (z + \frac{F}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}{4}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{E}{2})$ และรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$

เมื่อ $D^2 + E^2 + F^2 - 4G > 0$

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาสมการทรงกลมซึ่งมีจุด (4,-8,1) และ (-2,2,3) เป็นจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลาง

วิธีทำ จุดศูนย์กลางของทรงกลมคือจุดกึ่งกลางของ (4,-8,1) และ (-2,2,3)

จุดกึ่งกลางคือ $(\frac{4-2}{2}, \frac{-8+2}{2}, \frac{1+3}{2}) = (1,-3,2)$

รัศมีของผิวทรงกลมคือ ระยะห่างระหว่างจุด (4, -8,1) และ (1, -3,2)

$$r = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-8 + 3)^2 + (1 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

สมการทรงกลมคือ

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 35$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 21 = 0$$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 2 = 0$$

วิธีทำ ใช้สูตรจุดศูนย์กลางของทรงกลมคือ $\left(\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}, \frac{10}{2}\right) = (2, -3, 5)$

รัศมีของทรงกลม $= \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 + 100 - 8}$

$= 6$

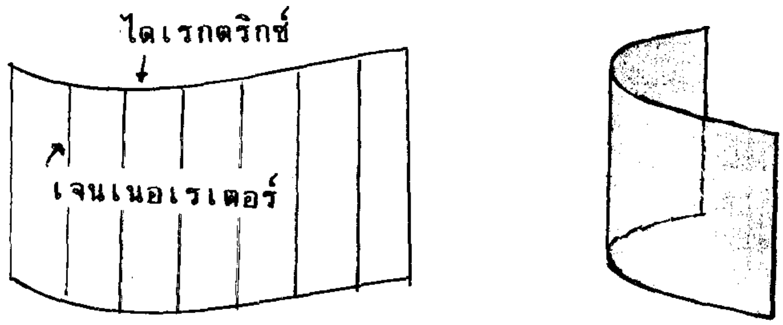
ถ้าไม่ใช้สูตร ก็อาจหารัศมีและจุดศูนย์กลางโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 10z + 25) = 4 + 9 + 25 - 2$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$$

จะได้จุดศูนย์กลางที่ $(2, -3, 5)$ รัศมี 6

7.3 ทรงกระบอก (Cylinders)

นิยาม 7.3.1 ผิวทรงกระบอกคือ เซตของจุดทั้งหลายบนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และตัดกับเส้นโค้งในระนาบเส้นหนึ่ง เส้นโค้งในระนาบเรียกว่า **ไดเรกตริกซ์** (directrix) เส้นขนานแต่ละเส้นเรียกว่า**เจนเนอเรเตอร์** (generator) ของทรงกระบอก



รูป 7.3.1

ทฤษฎี 7.3.1 กราฟของสมการที่มี 2 ตัวแปร ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นสมการทรงกระบอกซึ่งเจอเนอเรเตอร์ ขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป เช่น สมการ $x^2 + z^2 = 4$

$Y^2 = 8x$

$3y + z = 5$

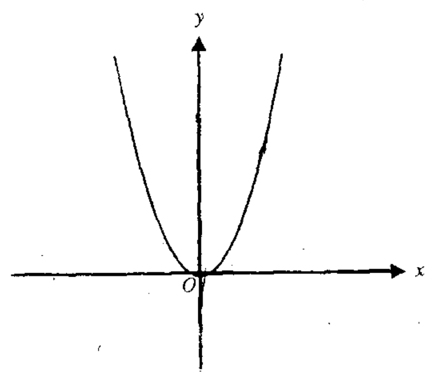
เป็นสมการผิวทรงกระบอก

ตัวอย่าง 7.3.1 จงเขียนกราฟของ $y = x^2$

วิธีทำ สมการ $y = x^2$ มีตัวแปร 2 ตัว ดังนั้นเป็นสมการทรงกระบอกซึ่งมีเจนเนอเรเตอร์

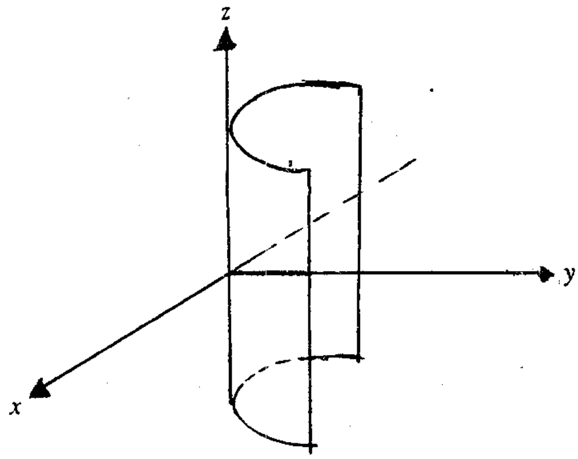
ขนานกับแกน z ในสมการไม่มีตัวแปร z

สมการ $y = x^2$ ในระนาบ จะเห็นพาราโบลาดังรูป



รูป 7.3.2

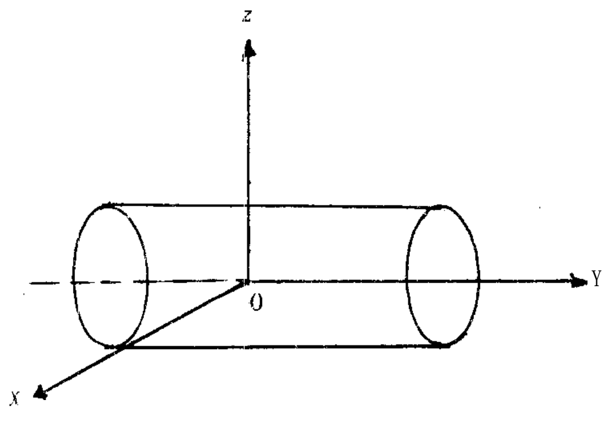
ดังนั้นวาดรูปใน 3 มิติ ได้ดังรูป



รูป 7.3.3

ตัวอย่าง 7.3.2 จงเขียนกราฟ $x^2 + z^2 = 9$

วิธีทำ สมการ $x^2 + z^2 = 9$ เป็นสมการทรงกระบอก มีเจนเนอเรเตอร์ขนานแกน y ในระนาบสมการ $x^2 + z^2 = 9$ เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี 3 ทรงกระบอกนี้เรียกว่าทรงกระบอกกลม



รูป 7.3.4

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาสมการผิวทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางและรัศมีต่อไปนี้

   1.1 $C(0,-3,1)$, $r = 4$

   1.2 $C(-5,2,-4)$, $r = 3$

2. จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลางและรัศมีของผิวทรงกลมต่อไปนี้

   2.1 $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 6y + 42 - 11 = 0$

   2.2 $x^2 + y^2 + z^2 - 4Y - a = 0$

   2.3 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 42 + 21 = 0$

   2.4 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y \cdot 4z - 4 = 0$

3. จงหาสมการผิวทรงกลมตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   3.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-5,7)$ และผ่านจุด $(2,1,-3)$

   3.2 มีจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลางเป็น $(4,0,-2)$ และ $(-8,-1,4)$

   3.3 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1,-3,5)$ และสัมผัสกับระนาบ xz

   3.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,1,-7)$ และสัมผัสกับระนาบ
   $2x - y - 2z + 6 = 0$

4. จงเขียนกราฟของผิวทรงกระบอกต่อไปนี้

   4.1 $x + y = 4$

   4.2 $x^2 + y^2 = 16$

   4.3 $z = x^2$

   4.4 $9y^2 + z^2 = 36$

   4.5 $2x + 3z = 6$

   4.6 $x^2 + (y - 3)^2 = 0$

7.4 ผิวกำลังสอง (Quadric surface)

กราฟของสมการกำลังสองเรียกว่า**ผิวกำลังสอง** สมการกำลังสองรูปทั่วไปอยู่ในรูป

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

เมื่อ A,B,C,D,E,F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในที่นี้จะพิจารณาผิวกำลังสองที่มีรูปแบบมาตรฐาน โดยพิจารณาสมการผิว การเขียนกราฟ

7.4.1 ทรงรี (Ellipsoid)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , a,b,c, > 0$$

จุดตัดแกน

จุดตัดแกน x คือ $(\pm a,0,0)$

จุดตัดแกน y คือ $(0,\pm b,0)$

จุดตัดแกน z คือ $(0,0,\pm c)$

สมมาตร จะเห็นว่าตัวแปร x,y,z ยกกำลัง 2 ทั้งหมด ดังนั้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด แกนพิกัด และระนาบพิกัด

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ xy (z = 0) ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ตัดด้วยระนาบ xz (y = 0) ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตัดด้วยระนาบ yz (x = 0) ได้วงรี $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตัดด้วยระนาบ x = k ได้วงรี $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$

ถ้า $1 - \frac{k^2}{a^2} \geq 0$ นั่นคือ $k^2 \leq a^2$

ตัดด้วยระนาบ $y = k$ ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$ ถ้า $k^2 \le b^2$

ตัดด้วยระนาบ $z = k$ ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$ ถ้า $k^2 \le c^2$

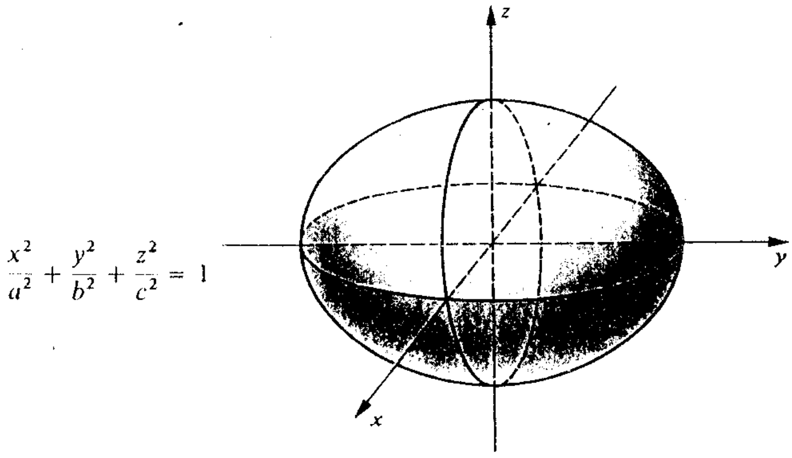
ขอบเขต

ขอบเขตของ x **คือ** $[-a,a]$

ขอบเขตของ y **คือ** $[-b,b]$

ขอบเขตของ z **คือ** $[-c,c]$

จะเห็นว่าถ้า $a = b = c$ **ทรงรีนี้คือทรงกลม**



รูป 7.4.1

7.4.2 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีชนิดชิ้นเดียว

(Elliptic hyperboloid of one sheet)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

หรือ $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

หรือ $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ เมื่อ $a, b, c > 0$

ในที่นี้จะพิจารณาผิว $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ อีก 2 รูป ทำในทำนองเดียวกัน

จุดตัดแกน

จุดตัดแกน x คือ $(\pm a, 0, 0)$

จุดตัดแกน y คือ $(0, \pm b, 0)$

ผิวไม่ตัดแกน z

สมมาตร เพราะว่าเทอม x,y,z ยกกำลังสองดังนั้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด แกนพิกัดและระนาบพิกัด

รอยตัด ตัดกับระนาบ xy ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ตัดกับระนาบ y z ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตัดกับระนาบ x z ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตัดด้วยระนาบ x = k ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$

ถ้า $k^2 < a^2$

ถ้า $k^2 > a^2$ ได้ไฮเพอร์โบลาเช่นกัน แต่ถ้า $k^2 = a^2$

ได้เส้นตรง $y = \pm\frac{b}{c} z$

ตัดด้วยระนาบ y = k ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$

ถ้า $k^2 < b^2$

ถ้า $k^2 > b^2$ ได้ไฮเพอร์โบลา แต่ถ้า $k^2 = b^2$ ได้เส้นตรง

$x = \pm\frac{a}{c} z$

ตัดด้วยระนาบ z = k ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ ทุกค่า k

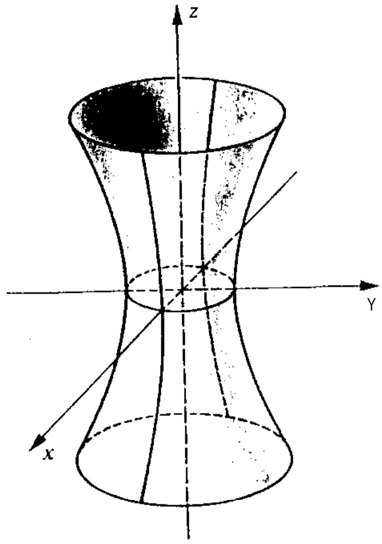
ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ R

ขอบเขตของ y คือ R

ขอบเขตของ z คือ R

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



รูป 7.4.2

7.4.3 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีชนิดสองชิ้น

(Elliptic hyperbolid of two sheets)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

หรือ $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

หรือ $$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$ เมื่อ $a,b,c > 0$

ในที่นี้จะพิจารณาสมการผิว $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

จุดตัดแกน

จุดตัดแกน x , unu z ไม่มี

จุดตัดแกน y คือ $(0,\pm b,0)$

สมมาตร

ผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด แกนพิกัด และระนาบพิกัด

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ xy ได้ไฮเพอร์โบลา $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ตัดด้วยระนบ yz ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

ตัดด้วยระนาบ xz ไม่มีรอยตัดเพราะไม่มี (x,y,z) ใดที่คล้องตามสมการ

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ตัดด้วยระนาบ x = k ได้ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{a^2}$ ทุกค่า k

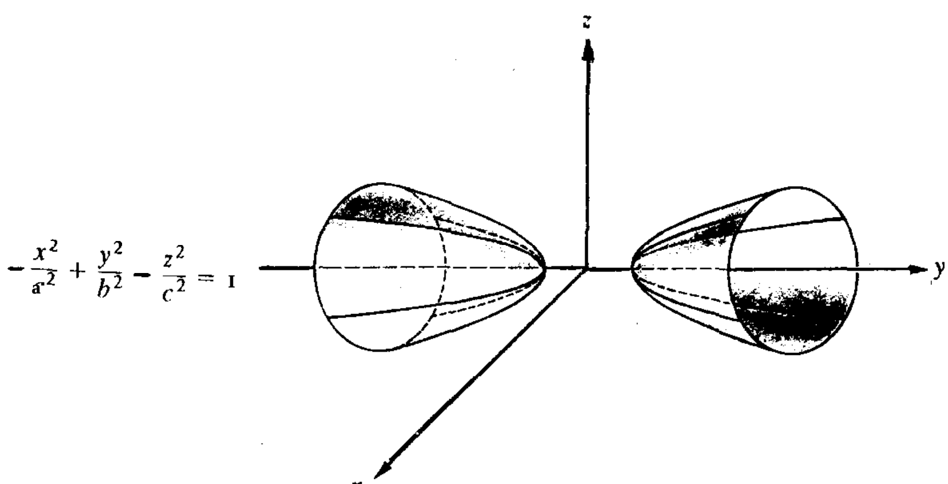
ตัดด้วยระนาบ y = k ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}-1$ ถ้า $k^2 > b^2$

ถ้า $k^2 < b^2$ ไม่มีรอยตัด ถ้า $k^2 = a^2$ ได้จุด (0,k,0)

ตัดด้วยระนาบ z = k ได้ไฮเพอร์โบลา $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ ทุกค่า k

ขอบเขต ขอบเขตของ x และ z คือ R

ขอบเขตของ y คือ $(-\infty,-b]\cup[b,\infty)$



รูป 7.4.3

7.4.4 **ทรงพาราโบลาเชิงวงรี** (Elliptic paraboloid)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \ , \ c \neq 0, \ a,b > 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} \bullet \frac{z^2}{c^2} = ax, \ a \neq 0, \ b,c > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \ , \ b \neq 0, \ a,c > 0$$

ในที่นี้จะพิจารณา $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ เมื่อ $c > 0$

จุดตัดแกน จุดตัดแกน x,y,z ที่จุด (0,0,0)

สมมาตร ผิวมีสมมาตรกับแกน z เท่านั้น

และมีสมมาตรกับระนาบ yz และ xz

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ xy ได้จุด (0,0,0)

ตัดด้วยระนาบ yz ได้พาราโบลา $y^2 = cb^2z$

ตัดด้วยระนาบ xz ได้พาราโบลา $x^2 = ca^2z$

ตัดด้วยระนาบ $x = k$ ได้พาราโบลา $y^2 = cb^2z - \frac{b^2}{a^2}k^2$

ทุกค่า k

ตัดด้วยระนาบ $y = k$ ได้พาราโบลา $x^2 = ca^2z - \frac{a^2}{b^2}k^2$

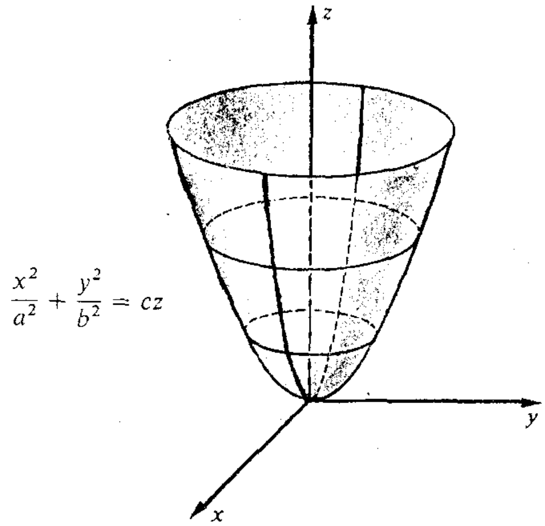
ทุกค่า k

ตัดด้วยกราฟ $z = k$ ได้วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck$ ถ้า $k > 0$

ถ้า $k < 0$ ไม่มีรอยตัด และถ้า $k = 0$ ได้จุด (0,0,0)

ขอบเขต ของ x และ y คือ R

ขอบเขตของ z คือ $[0,\infty)$



รูป 7.4.4

7.4.5 **ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา**(Hyperbolic paraboloid)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \;,\; c \neq 0,\;\; a,b > 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax \;,\; a \neq 0,\;\; b,c > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by \;,\; b \neq 0,\;\; a,c > 0$$

ในที่นี้พิจารณาผิว $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ **เมื่อ** $c < 0$

จุดตัดแกน ผิวตัดแกนพิกัดที่ (0,0,0) จุดเดียว

สมมาตร เหมือนกับ 7.4.4 คือผิวสมมาตรกับแกน z, ระนาบ yz และ xz เท่านั้น

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ xy ได้เส้นตรง 2 เส้น $y = \pm \frac{b}{a} x$

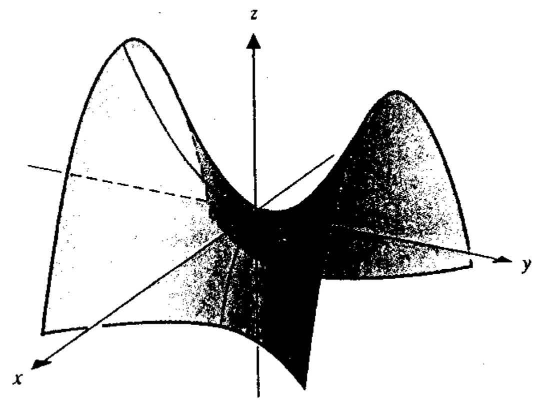
ตัดด้วยระนาบ yz และ xz ได้พาราโบลา

ตัดด้วยระนาบ x = k, y = k ได้พาราโบลา

ตัดด้วยระนาบ z = k ได้ไฮเพอร์โบลา

ขอบเขตของ x, y, z คือ R

ผิวทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า**ผิวอ้านม้า**



รูป 7.4.5

7.4.6 **กรวยเชิงวงรี** (Elliptic cone)

สมการผิวอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

หรือ $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

หรือ $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$ เมื่อ $a, b, c > 0$

ในที่นี้จะพิจารณาผิว $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

จุดตัดแกน ผิวตัดแกนพิกัดที่จุดกำเนิด

สมมาตร ผิวมีสมมาตรกับแกนพิกัด ระนาบพิกัด จุดกำเนิด

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ xy ได้จุด $(0,0,0)$

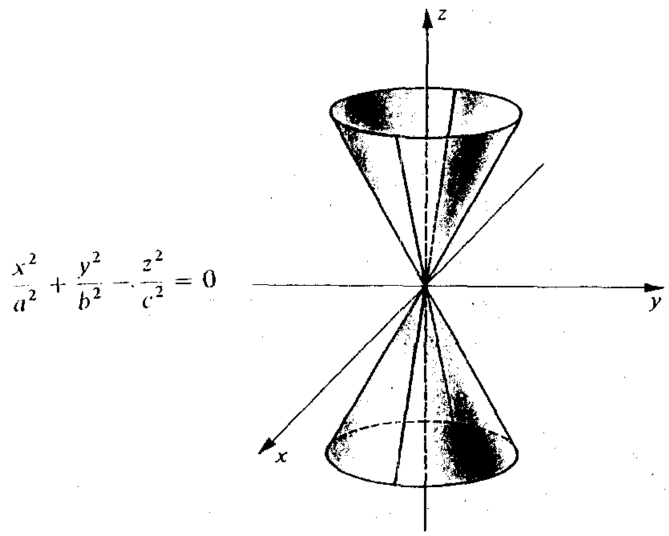
ตัดด้วยระนาบ yz ได้เส้นตรง $y = \pm \frac{b}{a} x$

ตัดด้วยระนาบ xz ได้เส้นตรง $x = \pm \frac{a}{c} z$

ตัดด้วยระนาบ $x = k$ และ $y = k$ ได้ไฮเพอร์โบลา

ตัดด้วยระนาบ $z = k$ ได้วงรี

ขอบเขต ของ x, y และ z คือ R



รูป 7.4.6

ตัวอย่าง 7.4.1 จงบอกเชื่อผิว และเขียนกราฟของผิว

$$36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่เอา 36 หารตลอด

$$x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

เป็นสมการเชิงผิว ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีชนิดสองชิ้น จุดตัดแกน x คือ $(\pm1,0,0)$ จุดตัดแกน y และ z ไม่มีผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิดแกนพิกัดระนาบพิกัด

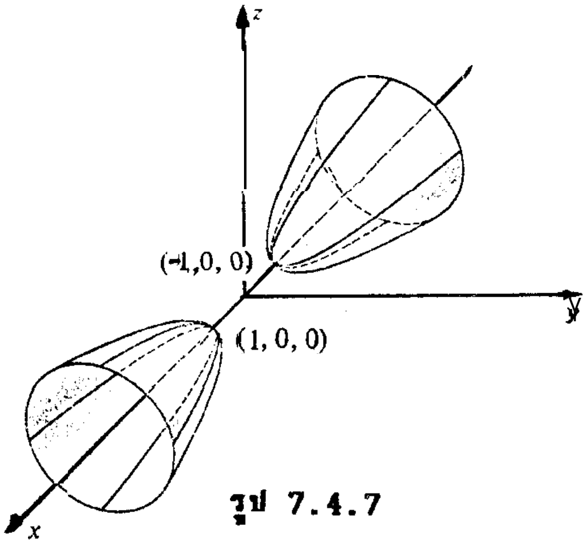
ผิวตัดระนาบ xy ได้ไฮเพอร์โบลา $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

ตัดระนาบ xz ได้ไฮเพอร์โบลา $x^2 - \frac{z^2}{9} = 1$ แต่ไม่มีรอยตัดกับระนาบ yz

ตัดด้วยระนาบ $x = k$ ได้วงรีถ้า $k^2 > 1$

ตัดด้วย $y = k$ และ $z = k$ ได้ไฮเพอร์โบลา

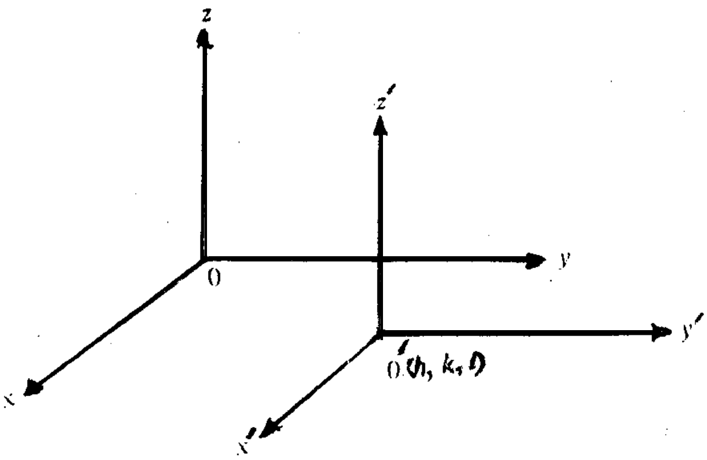
ขอบเขต ของ x คือ $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ขอบเขตของ y และ z คือ R



รูป 7.4.7

7.5 การเลื่อนแกนทางขนานในปริภูมิ

ในปริภูมิ 3 มิติ การเลื่อนแกนโดยให้แกนพิกัดขนานกับแกนพิกัดเดิมจุดกำเนิดใหม่คือ $0'$ แกนพิกัดใหม่คือ x', y' และ z' ขนานกับแกนพิกัด x, y และ z ตามลำดับให้ $0'$ มีพิกัด (h, k, l)



รูป 7.5.1

ให้ P มีพิกัด (x,y,z) เมื่อเทียบกับแกน x,y,z และมีพิกัด (x',y',z') เมื่อเทียบกับแกนใหม่ x',y',z' ในทำนองเดียวกันกับในระนาบจะได้

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$
และ
$$z' = z - l$$

จุด (h,k,l) เรียกว่าจุดศูนย์กลางของผิว แต่สำหรับทรงพาราโบลาเชิงวงรีเรียกว่าจุดยอด

ตัวอย่าง 7.5.1 จงพิจารณาว่าสมการ $x^2+2y^2-2x-8y-3z+9 = 0$ เป็นผิวชนิดใด และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$$x2 + 2y2 - 2x - 8y - 3z + 9 = 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) = 32 - 9 + 1 + 8$$
$$(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 = 3z$$

ให้ $x' \square \boxtimes - 1$

$y' \blacksquare \boxtimes$

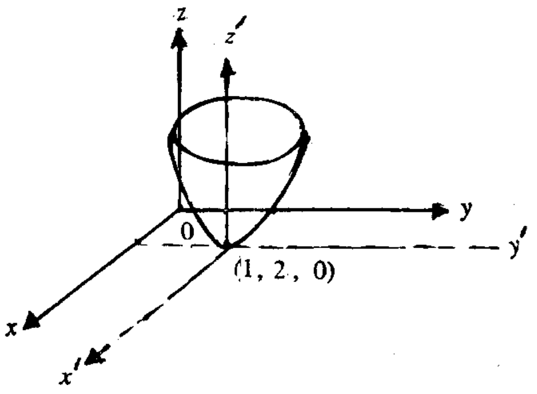
$z' \blacksquare \ast$

จะได้สมการผิว

$$x'^2 + 2y'^2 = 3z'$$

หรือ $x^2 + \frac{y'^2}{1/2} \square 3z'$ เป็นสมการผิวทรงพาราโบลาเชิงวงรี

จุดยอดอยู่ที่ $(1,2,0)$ ดังรูป



รูป 7.5.2

ตัวอย่าง 7.5.2 จงพิจารณาว่าสมการ $3x^2-2y^2+z^2-24x+12y-4z-30=0$ เป็นผิวชนิดใด จงหาจุดศูนย์กลางของผิว

วิธีทำ

$$3x^2 - 2y^2 + z^2 - 24x - 12y - 4z - 30 \; \square \; \square$$

$$(3x^2 - 24x) - (2y^2 + 12y) + (z^2 - 4z) \; \square \; 30$$

$$3(x^2 - 8x + 16) - 2(y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 42 + 4)$$

$$= 30 + 48 - 18 + 4$$

$$3(x - 4)^2 - 2(y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 64$$

ให้ $x' = x - 4,\ y/ = Y + 3,\ z' = z - 2$

สมการคือ $3x'^2 - 2y'^2 + z'^2 = 64$

$$\frac{x'^2}{64/3} - \frac{y'^2}{32} + \frac{z'^2}{64} = 0$$

เป็นสมการทรงไฮเพอร์ไบลาเชิงวงรีชนิดชิ้นเดียว จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4,-3,2)

แบบฝึกหัด 7 . 3

จงบอกชื่อผิวและเขียนรูปผิวต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$

3. $6x^2 - 2y^2 - 3z^2 \; \square \; 12$

4. $x^2 - y^2 - 2z^2 = -1$

5. $9x^2 + 4Y^2 = z^2$

6. $x^2 + z^2 = Y$

7. $x^2 - 4y^2 = -z$

a. $9y^2 + z^2 = 4z^2$

จงพิจารณาสมการผิวต่อไปนี้ว่าเป็นผิวชนิดใด และเขียนรูป

9. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y - 162 + 25 = 0$

10. $2x^2 + 3y^2 - 6x + 6y - 13 = 0$

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

12. $4y^2 + z^2 - 4x^2 - 8x - 16y + 12 = 0$

7.6 พิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม

(Cylindrical and Spherical coordinates)

ในระนาบระบบพิกัดอื่นนอกจากระบบพิกัดฉากก็คือระบบพิกัดเชิงขั้ว ในปริภูมิ 3 มิติ จะพิจารณาถึงระบบพิกัดอื่นนอกจากระบบพิกัดฉากเช่นเดียวกัน ระบบพิกัดที่มีประโยชน์มากคือระบบพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม

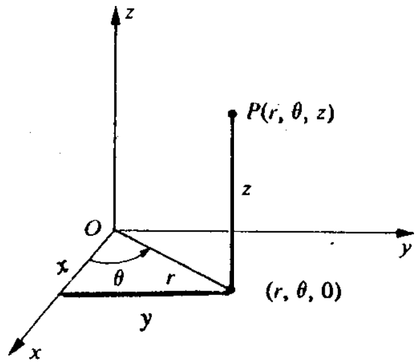
7.6.1 พิกัดทรงกระบอก

ถ้าให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติของระบบพิกัดฉาก ในระนาบ xy จุด P มีพิกัด $P(x,y,0)$ โดยที่พิกัดของ P บนระนาบ xy อาจเขียนเป็น $P(r,\theta,0)$ เมื่อ r,θ เป็นพิกัดเชิงขั้ว ดังนั้นความสัมพันธ์ของ (x,y) และ (r,θ) คือ

$$x = r\cos\theta \; , \; y = r\sin\theta$$

ดังนั้นแต่ละจุด P ในปริภูมิซึ่งมีจุดในระบบพิกัดฉากเป็น (x,y,z) จะคล้ายกับจุดในพิกัดทรงกระบอกคือ (r,θ,z) โดยความสัมพันธ์

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$



รูป 7.6.1

แต่ถ้าต้องการเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก จะใช้ความสัมพันธ์

$$r^2 = x^2 + y^2$$

r [illegible]

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

และ $z = z$

นั่นคือถ้าทราบ (x, y, z) จะหา (r, θ, z) ได้

ตัวอย่าง 7.6.1 จงหาพิกัดทรงกระบอกของจุดในระบบพิกัดฉาก $(-1, \sqrt{3}, 4)$

วิธีทำ ในที่นี้ (x, y, z) คือ $(-1, \sqrt{3}, 4)$

จาก $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

$= 180' - 60'$ (อยู่ในจตุภาค 2)

$= 120'$

$z = 4$

พิกัดทรงกระบอกคือ $(2, 120^\circ, 4)$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น $(4,150^\circ,-3)$

วิธีทำ ในที่นี้ $r = 4,\ \theta = 150^\circ,\ z = -3$

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
&= 4\cos(150^\circ) \\
&= 4\cos(180 - 30^\circ) \\
&= -4\cos 30^\circ \\
&= (-4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -2\sqrt{3} \\
y &= r\sin\theta \\
&= 4\sin(150^\circ) \\
&= 4\sin(180 - 30^\circ) \\
&= 4\sin 30^\circ \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2
\end{aligned}
$$

พิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากคือ $(-2\sqrt{3}, 2, -3)$

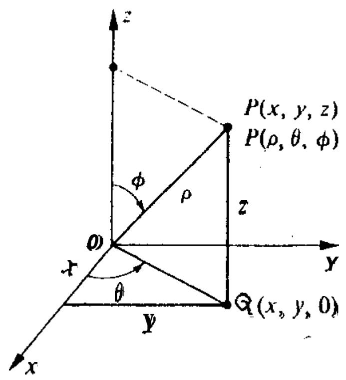
7.6.2 พิกัดทรงกลม

ถ้าให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก ให้ $P(\rho,\theta,\phi)$ เป็นพิกัดของจุดในพิกัดทรงกลม เมื่อ

ρ เป็นระยะห่างระหว่างจุด P และจุดกำเนิด

θ เหมือนกับพิกัดทรงกระบอก

ϕ เป็นมุมซึ่ง $\overline{OP}$ ทำกับแกน z ดังรูป



รูป 7.6.2

จะเห็นว่า $P\hat{O}Q = 90^\circ - \phi$

$$\overline{OQ} = \rho \cos P\hat{O}Q$$
$$= \rho \cos (90^\circ - \phi)$$
$$= \rho \sin \phi$$
$$x = \overline{OQ} \cos \theta$$
$$= \rho \sin \phi \cos \theta$$
$$y = \overline{OQ} \sin \theta$$
$$= \rho \sin \phi \sin \theta$$
$$z = \rho \cos \phi$$

ถ้ากำหนด (x, y, z) ให้ จะหา (ρ, θ, ϕ) ได้ดังนี้

$$\rho = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$
$$\phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาพิกัดทรงกลมของจุด ในระบบพิกัดฉาก $(2\sqrt{3}, 0, 2)$

วิธีทำ ในที่นี้ $x = 2\sqrt{3}$, $y = 0$, $z = 2$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{12 + 0 + 4}$$

$$= 4$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$= \arctan \frac{0}{2\sqrt{3}}$$

$$= \arctan 0 = 0^\circ$$

$$\phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \arccos \frac{2}{4}$$

$$= \arccos \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

พิกัดทรงกลม คือ $(4, 0^\circ, \frac{\pi}{3})$

ตัวอย่าง 7.6.4 จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉาก ซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น $(8, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

วิธีทำ ในที่นี้ $\rho = 8,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = \frac{\pi}{6}$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$= (8) \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2}$$

$= (8)(\frac{1}{2})(0^{\circ})$

$= 0$

$y = \rho \sin \phi \sin \theta$

$= (8) \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2}$

$= 8 (\frac{1}{2})(1)$

$= 4$

$z = \rho \cos \phi$

$= 8 \cos \frac{\pi}{6}$

$= 8 (\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= 4\sqrt{3}$

พิกัดของจุด คือ $(0, 4, 4\sqrt{3})$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นพิกัดทรงกระบอกของจุดต่อไปนี้
   1.1 $(0,4,-2)$
   1.2 $(-2\sqrt{3},2,5)$
   1.3 $(1,\sqrt{3},4)$
   1.4 $(-2,-2,3)$

2. จงเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นพิกัดทรงกลมของจุดต่อไปนี้
   2.1 $(2,2,0)$
   2.2 $(0,3\sqrt{3},3)$
   2.3 $(-2,2,4)$
   2.4 $(-1,-1,-1)$

3. จงเปลี่ยนจากระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

3.1 $(4, \frac{\pi}{4}, 3)$

3.2 $(8, \frac{2\pi}{3}, -1)$

3.3 $(1, -\frac{\pi}{2}, 5)$

4. จงเปลี่ยนจากระบบพิกัดทรงกลมเป็นพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

4.1 $(8, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

4.2 $(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$

4.3 $(6, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$

5. จงเปลี่ยนสมการจากพิกัดทรงกระบอกเป็นระบบพิกัดฉาก

5.1 $r = 5$

5.2 $\theta = \frac{2\pi}{3}$

5.3 $r = 2\cos\theta$

5.4 $r = z$

6. จงเปลี่ยนสมการจากพิกัดทรงกลมเป็นระบบพิกัดฉาก

6.1 $\rho = 3$

6.2 $\phi = \frac{\pi}{3}$

6.3 $\rho \sin\phi \cos\theta = 4$

7. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม

7.1 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

7.2 $x^2 + y^2 = 9$

7.3 $9(x^2 + y^2) + 42^2 = 36$

7.4 $x^2 + y^2 = z^2$