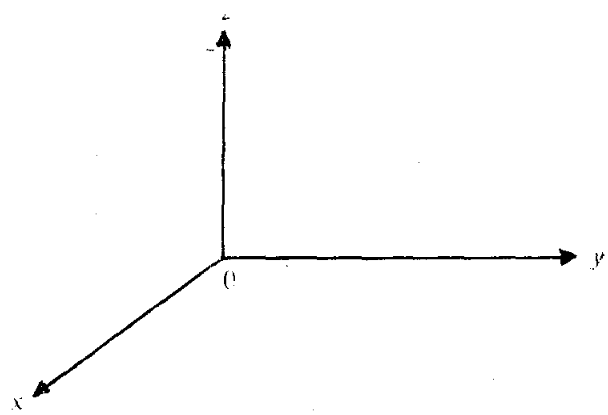
บทที่ 6
เรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ
(Solid Analytic Geometry)

ในบทนี้จะศึกษาถึงปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งพื้นฐานความรู้จะมาจากในระนาบนั่นเอง รูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ที่ศึกษามาในระนาบเช่นวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ก็จะขยายมาสู่ปริภูมิ 3 มิติ ดังนั้นในบทนี้จะทราบเกี่ยวกับสมการเส้นตรง สมการระนาบ และสมการผิวต่าง ๆ

6.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ

พิจารณาเส้นตรงสามเส้นตัดตั้งฉากกันที่จุด 0 ซึ่งเรียกว่าจุดกำเนิด (origin) เส้นตรงทั้งสามนั้นเรียกว่า**แกนพิกัด** (coordinate axes) ให้แกนพิกัดนั้นคือแกน x แกน y และแกน z ระบบพิกัดซึ่งมีแกน y และ z อยู่บนระนาบของกระดาษและมีแกน x ตั้งฉากออกจากระนาบ ดังรูปเรียกว่า

ระบบมือขวา (right-handed system)



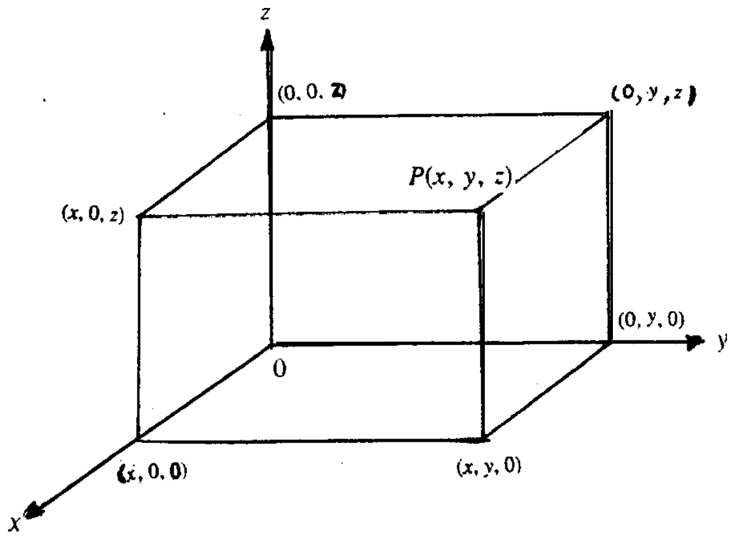
รูป 6.1.1

แต่ถ้าแกน x และแกน y สลับกันจะเรียกว่า**ระบบมือซ้าย** (left-handed system) โดยทั่วไปจะใช้ระบบมือขวาในการเขียนรูป

ระนาบพิกัด (coordinate plane) **เกิดจากแกนพิกัด** 2 **แกน ดังนั้น ระนาบที่เกิดจากแกน** x **และแกน** y **จะเรียกว่าระนาบ xy (xy-plane) และระนาบที่เกิดจากแกน y และแกน** z **เรียกว่าระนาบ yz (yz-plane) ระนาบที่เกิดจากแกน** x **และแกน** z **เรียกว่าระนาบ** xz **(xz-plane)**

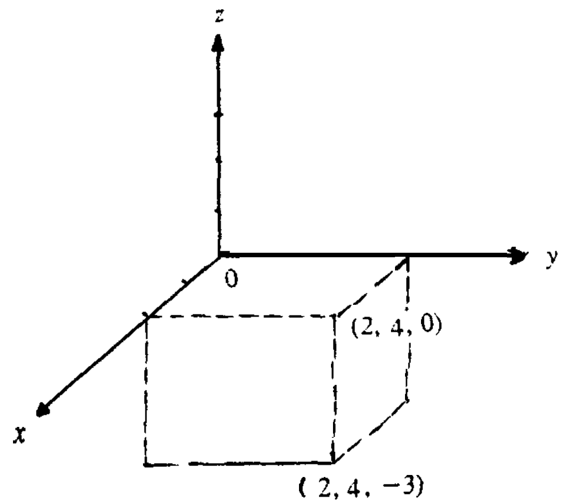
พิกัดของจุด P **ในปริภูมิ** 3 **มิติ กำหนดโดยระยะห่างจากระนาบพิกัด ระยะห่างของจุด** P **จากระนาบ** yz **เรียกว่าพิกัด** x (x-coordinate) **ระยะห่างจากระนาบ** xz **เรียกว่าพิกัด** y (y-coordinate) **และระยะห่างจากระนาบ** xy **คือ**

พิกัด z (z-coordinate) **พิกัดของจุด** P **เขียนแทนด้วย**P(x,y,z)



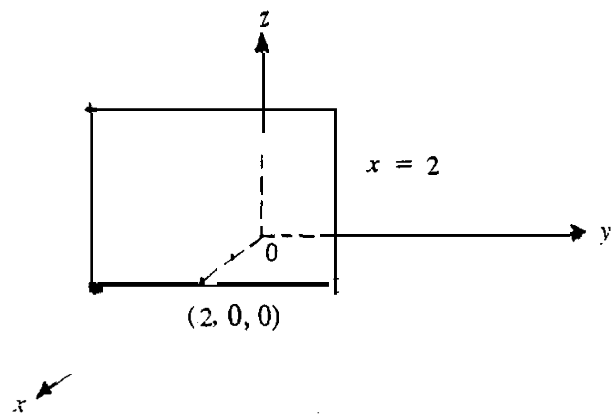
รูป 6.1.2

ถ้าต้องการกำหนดจุด P(2,4,-3) เราจะวัดจากจุดกำเนิดไปตามแกน x 2 หน่วย ไปตามแกน y 4 หน่วย จะได้จุดที่ระนาบ xy มีพิกัด (2,4,0) แล้ววัดขนานแกน z **ไปทางลบอีก 3 หน่วยจะได้ตำแหน่งของจุด P(2,4,-3) ดังรูป**



รูป 6.1.3

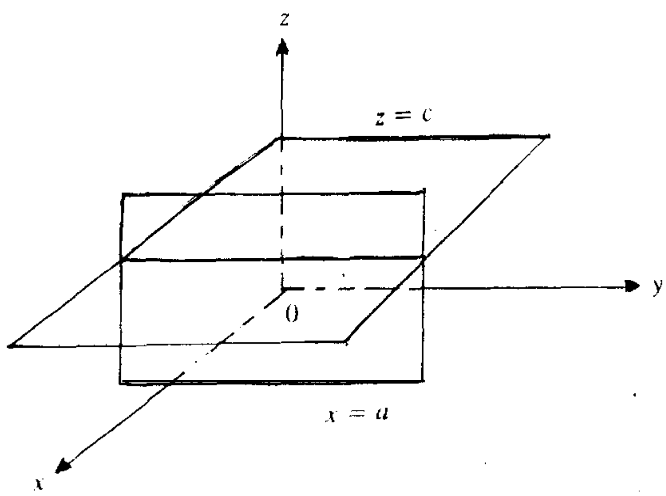
ระนาบพิกัดจะแบ่งปริภูมิออกเป็น 8 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่าอัฐภาค (octant) ถ้าพิกัดของจุด $P(x,y,z)$ ซึ่ง $x > 0$, $y > 0$ และ $z > 0$ จะอยู่ในอัฐภาคหนึ่ง ในระนาบสมการ $x = 2$ เป็นสมการเส้นตรงขนานแกน y แต่สำหรับปริภูมิ 3 มิติ สมการ $x = 2$ ไม่เป็นสมการเส้นตรง แต่ทางเดินของจุดจะอยู่บนระนาบซึ่งขนานกับระนาบ yz และผ่านจุด (2,0,0) ดังรูป



รูป 6.1.4

ดังนั้นสมการเช่น $x = a$ หรือ $y = b$ หรือ $z = c$ จะเป็นสมการระนาบซึ่งขนานกับระนาบพิกัด

ถ้าระนาบซึ่งไม่ขนานกัน 2 ระนาบ ตัดกันจะได้เส้นตรง เช่น ระนาบ $x = a$ และ $z = c$ ตัดกันจะได้เส้นตรงที่ขนานกับแกน y

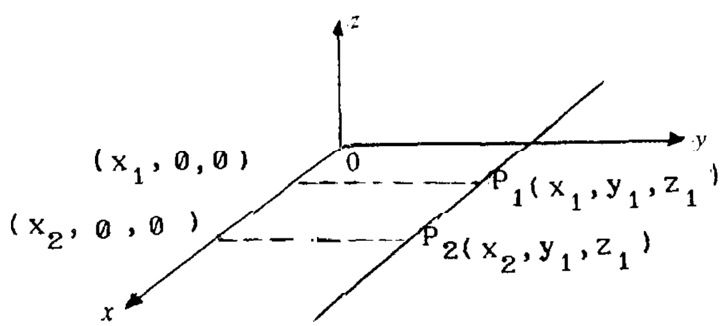


รูป 6.1.5

6.2 ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด

ถ้า P_1 และ P_2 เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x โดยที่ P_1 มีพิกัด (x_1, y_1, z_1) และ P_2 มีพิกัด (x_2, y_1, z_1) ระยะห่างระหว่าง P_1 และ P_2 คือ P_1P_2

จะได้ $$P_1P_2 = |x_2 - x_1|$$



รูป 6.2.1

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ (x_1, y_1, z_1) และ $Q_2(x_1, y_2, z_1)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานแกน y และ $R_1(x_1, y_1, z_1)$, $R_2(x_1, y_1, z_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานแกน z จะได้

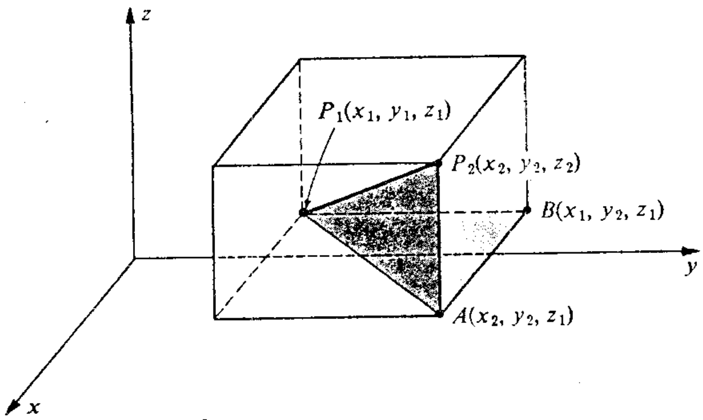
$$Q_1Q_2 = |y_2 - y_1|$$

และ $$RR_2 = |z_2 - z_1|$$

ทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ระยะห่างระหว่างจุดทั้งสองเขียนแทนด้วย $d(P_1, P_2)$ หรือ P_1P_2 จะได้

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

พิสูจน์ สร้างระนาบขนานกับระนาบพิกัดผ่านจุด P_1, P_2 ดังรูป



รูป 6.2.2

พิจารณาสามเหลี่ยม P_1AP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$(\overline{PP_2})^2 = (\overline{P_1A})^2 + (\overline{AP_2})^2$$

แต่สามเหลี่ยม P_1AB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้

$$(P_1A)^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BP_1})^2$$

ด้าน $\overline{AB}$, $\overline{BP}$, Ma:: $\overline{AP_2}$ ขนานกับแกนพิกัด x, y และ z ตามลำดับ

ดังนั้น $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$

$\overline{BP_1} = |y_2 - y_1|$

และ $\overline{AP_2} = |z_2 - z_1|$

$$(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

หมายเหตุ 1 . ถ้า P_1, P_2 เป็นจุดบนระนาบ x y จะได้ $z_1 = z_2 = 0$ นั่นคือสูตร

ระยะห่างระหว่าง P_1, P_2 คือ $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ต่อระหว่าง $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ คือ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

3. ถ้า $P(x, y, z)$ เป็นจุดแบ่งส่วนของเส้นตรงที่มี $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดปลายออกเป็นอัตราส่วน $p : q$ จะได้

$$x = \frac{px_2 + qx_1}{p + q}, \quad y = \frac{py_2 + qy_1}{p + q} \quad \text{และ} \quad z = \frac{pz_2 + qz_1}{p + q}$$

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $P_1(3, -2, 1)$ Ma:: $P_2(-1, 4, -2)$

วิธีทำ จาก $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 + 2)^2 + (-2 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 36 + 9} = \sqrt{51}$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จุด $P(8, -5, 0)$, $Q(3, 1, -2)$ และ $R(-2, 7, -4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ นที่นี้จะใช้สูตรระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ถ้าจุด P, Q, R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน Q อยู่ระหว่าง P, R จะได้ $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3 - 8)^2 + (1 + 5)^2 \bullet (-2 - 0)^2}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (7 - 1)^2 + (-4 + 2)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(-2-8)^2 + (7+5)^2 + (-4-0)^2}$$

จะเห็นว่า $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$

ดังนั้นจุด P, Q, R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาพิกัดของจุด Q ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่มีจุด P(2,-1,3) และ R(3,1,-4) เป็นจุดปลายออกเป็นอัตราส่วน 1 : 3

วิธีทำ วิธีที่ 1 ถ้าต้องการแบ่งเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน 1 : 3 อาจใช้วิธีแบ่งครึ่งโดยการใช้สูตรจุดกึ่งกลาง

จุดกึ่งกลางระหว่าง P และ R คือ $\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{3-4}{2}\right)$

จะได้ $\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ $\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ จะเป็นจุดที่ต้องการ

ดังนั้นจุด Q คือ $\left(\frac{2+5/2}{2}, \frac{-1+0}{2}, \frac{3-1/2}{2}\right)$

พิกัดของ Q คือ $\left(\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

วิธีที่ 2 ใช้สูตร การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน p : q ให้พิกัดของ Q คือ (x,y,z) จะได้

$$x = \frac{px_2 + qx_1}{p+q}, \quad y = \frac{py_2 + qy_1}{p+q}, \quad z = \frac{pz_2 + qz_1}{p+q}$$

$$x = \frac{(1)(3)+(3)(2)}{1 \bullet 3}, \quad y = \frac{(1)(1)+(3)(-1)}{1+3}, \quad z = \frac{(1)(-4)+(3)(3)}{1+3}$$

$$x = \frac{9}{4}, \quad y = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad z = \frac{5}{4}$$

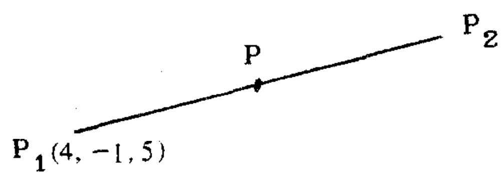
พิกัดของ Q คือ $\left(\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

ตัวอย่าง 6.2.4 จุดปลายข้างหนึ่งของเส้นตรงคือ $P_1(4,-1,5)$ จุดกึ่งกลาง P อยู่บนระนาบ yz จุดปลายอีกข้างหนึ่งคือ P_2 อยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $y = 2$ และ $z = 3$ จงหาพิกัดของ P และ P_2

วิธีทำ เพราะว่าจุด P อยู่บนระนาบ yz

ดังนั้นพิกัดของจุด P คือ $(0,y,z)$

จุด P_2 อยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $y = 2$ และ $z = 3$ ดังนั้น พิกัดของจุด P_2 คือ $(x,2,3)$



รูป 6.2.3

P เป็นจุดกึ่งกลางของ P_1, P_2 จะได้จากสูตรจุดกึ่งกลาง

$$\left(\frac{4+x}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (0,y,z)$$

จะได้ $\frac{4+x}{2} = 0$

$\frac{-1+2}{2} = y$

และ $\frac{5+3}{2} = z$

ดังนั้น $x = -4$, $y = \frac{1}{2}$ และ $z = 4$

พิกัดของจุด P คือ $(0, \frac{1}{2}, 4)$

พิกัดของจุด P_2 คือ (-4, 2 , 3)

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงลงตำแหน่งของจุดต่อไปนี้ในปริภูมิ 3 มิติ
   1.1 (5,0,0) 1.2 (-3,1,4) 1.3 (2,-6,-2)

2. จงหาจุดกึ่งกลางและระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้
   2.1 (5,-6,-5) และ (-3,2,7)
   2.2 (7,9,-10) และ (1,-3,2)
   2.3 (-8,3,6) และ (0,3,-14)

3. จุดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
   3.1 (3,2,-1),(2,-3,4),(4,7,-6)
   3.2 (6,-3,5),(4,-8,1),(8,2,9)

4. จงหาความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม และพิจารณาว่าเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือ สามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือเป็นทั้งสองอย่าง
   4.1 (-3,6,-2),(2,2,-3),(-3,2,-7)
   4.2 (3,1,1),(6,-2,1),(3,-2,4)
   4.3 (0,1,7),(2,-1,3),(4,3,5)

5. จงหาพิกัดของจุดซึ่งแบ่งเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด (-1,4,-6) และ (2,3,-7) ออกเป็นอัตราส่วน 3 : 1

6. จุด (-2,8,11) แบ่งส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุด (2,6,5) และ (-12,13,26) ออกเป็น อัตราส่วนเท่าใด

7. จงหาพิกัดของจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ xy ที่จุด (2,3) และอยู่ห่างจุดกำเนิดเป็นระยะ 7 หน่วย

8. จุดปลายข้างหนึ่งของเส้นตรงคือ $P_1(-1,3,4)$ จุดกึ่งกลาง P อยู่บนระนาบ xz จุดปลายอีกข้างหนึ่งคือ P_2 อยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x = -3$ และ $z = 6$ จงหาพิกัดของ P และ P_2

9. จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดคือ (-1,-2,-3),(3,2,-1) และ (5,4,1)

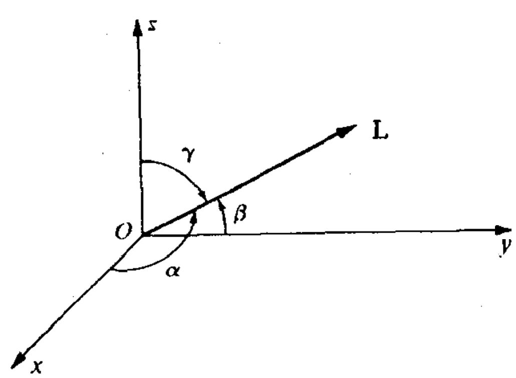
10. โลกัสของจุดที่คล้องตามสมการต่อไปนี้คืออะไร

10.1 $y = 5$ 10.2 $x = y,\ z = 3$

6.3 โคไซน์แสดงทิศทาง และจำนวนแสดงทิศทาง (Direction cosines and numbers)

เส้นตรง L ที่ผ่านจุดกำเนิด ถ้ากำหนดทิศทางของเส้นตรงด้วยลูกศร จะเรียกว่า **เส้นระบุทิศทาง** (directed line) แต่ถ้าไม่กำหนดทิศทางด้วยลูกศร จะเรียกว่า**เส้นไม่ระบุทิศทาง** (undirected line)

ถ้า L เป็นเส้นระบุทิศทางซึ่งทำมุม α, β และ γ กับแกน x แกน y และแกน z ตามลำดับ ดังรูป



รูป 6.3.1

จะเห็นว่าถ้า L เป็นเส้นตรงที่ไม่ระบุทิศทาง เส้นตรง L จะมี 2 ทิศทาง ดังนั้นมุมที่ L ทำกับแกน x แกน y และแกน z จะมี 2 ชุด คือ α, β, γ และ $180-\alpha$, $180-\beta$ และ $180-\gamma$

นิยาม 6.3.1 ถ้า α, β, γ เป็นมุมที่เส้นตรง L ทำกับแกน x แกน y และแกน z เรียกมุม α, β, γ ว่า**มุมแสดงทิศทาง** (direction angle)

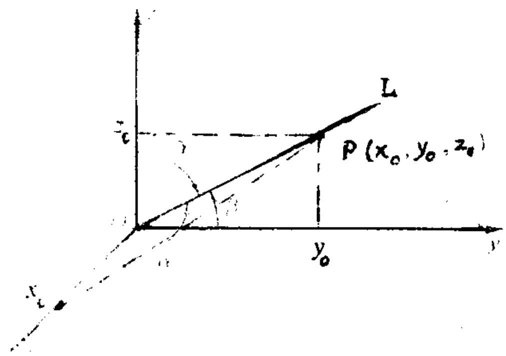
นิยาม 6.3.2 ถ้า α, β, γ เป็นมุมแสดงทิศทางของเส้นตรง L แล้ว $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ จะเรียกว่า**โคไซน์แสดงทิศทาง** ของ L

สำหรับเส้นตรงที่ไม่ระบุทิศทางจะมีโคไซน์แสดงทิศทาง 2 ชุด คือ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ และ $\cos(180-\alpha)$, $\cos(180-\beta)$ และ $\cos(180-\gamma)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$

ข้อควรทราบ 1. โคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรง L จะคล้องตามสมการ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

เพราะว่า ถ้า L เป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด $P(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบน L



รูป 6.3.2

ให้ d เป็นระยะจากจุด $P(x_0, y_0, z_0)$ ถึงจุดกำเนิด

$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

จากสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{d}$$

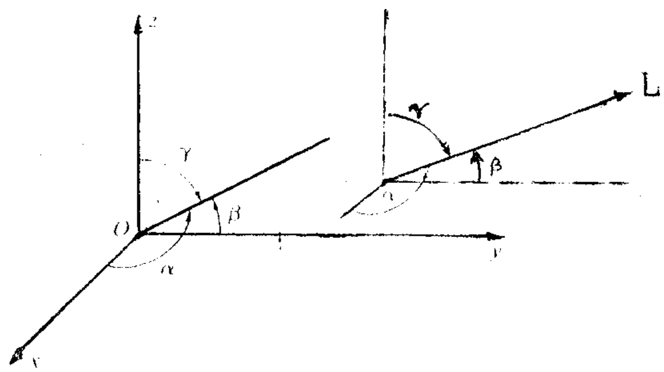
$$\cos\beta = \frac{y_0}{d}$$

และ $\cos\gamma = \frac{z_0}{d}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2}{d^2} + \frac{y_0^2}{d^2} + \frac{z_0^2}{d^2}$$

$$= \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{d^2} = 1$$

2. ในการพิจารณาโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ใด ๆ ในปริภูมิ ที่ไม่ผ่านจุดกำเนิด จะพิจารณาเส้นตรงที่ขนานกับ L ซึ่งผ่านจุดกำเนิดจะได้ว่ามุมแสดงทิศทางและโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้ง 2 จะเท่ากัน



รูป 6.3.3

นิยาม 6.3.3 เซตของจำนวน a_1, b_1, c_1 และ a_2, b_2, c_2 ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกันเป็นสัดส่วนกัน ถ้ามีจำนวน k ซึ่ง $k \neq 0$

และ $a_2 = ka_1,\ b_2 = kb_1,\ c_2 = kc_1$

หรือ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$

เช่น $-1, 4, 3$ เป็นสัดส่วนกับ $\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{2}$

เพราะว่า $\frac{1}{2} = (-\frac{1}{2})(-1)$

$-2 = (-\frac{1}{2})(4)$

$-\frac{3}{2} = (-\frac{1}{2})(3)$

ในที่นี้ $k = -\frac{1}{2}$

นิยาม 6.3.4 เซตของจำนวน a, b, c ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน กล่าวว่า **เป็นจำนวนแสดงทิศทาง** (direction number) ของเส้นตรง L ถ้า a, b, c เป็นสัดส่วนกับโคไซน์แสดงทิศทางของ L

นั่นคือถ้า $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ เป็นโคไซน์แสดงทิศทางของ L

จะได้ $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = k$

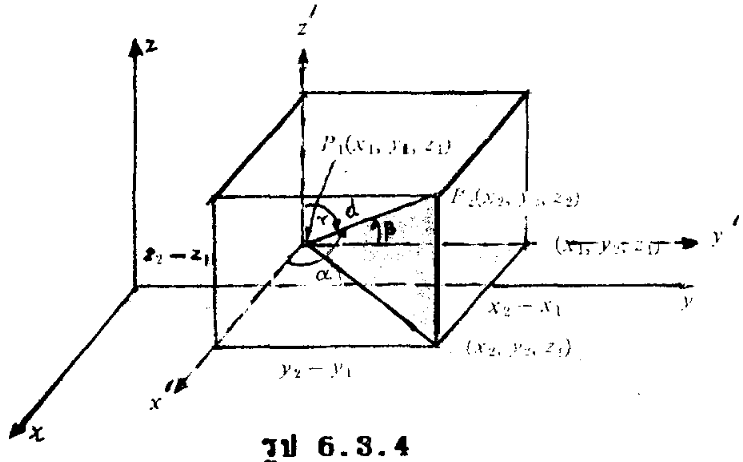
ในการหาโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรงที่กำหนดจุดให้ 2 จุด หาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.3.1 ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง L และ d เป็นระยะจาก P_1 ไปยัง P_2 จะได้

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

เป็นโคไซน์แสดงทิศทางของ L

พิสูจน์ ให้ α, β, γ เป็นมุมแสดงทิศทางของ L ที่ผ่าน P_1, P_2



รูป 6.3.4

เส้นตรง P_1x', P_1y' และ P_1z' ขนานกับแกน x, แกน y, และ z ตามลำดับ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเห็นว่า

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

บทแทรก 1 ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง L แล้ว $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ เป็นเซตของจำนวนแสดงทิศทางของ L

บทแทรก 2 ให้ a_1, b_1, c_1 และ a_2, b_2, c_2 เป็นจำนวนแสดงทิศทางของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ

L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$

ข้อสังเกต ถ้า a,b,c เป็นจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรง L แล้วจากทฤษฎี 6.3.1 และบทแทรก 1 จะเห็นว่าโคไซน์แสดงทิศทางของ L คือ

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1,-2,5)$ และ $P_2(-1,0,4)$

วิธีทำ ให้ d เป็นระยะห่างระหว่าง P_1 และ P_2

$$d = \sqrt{(-1-1)^2+(0+2)^2(4-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{-1-1}{3}, \cos\beta = \frac{0+2}{3}, \cos\gamma = \frac{4-5}{3}$$

โคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรงผ่าน P_1, P_2 คือ $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด P(5,4,-3), Q(2,5,-1) และ R(-7,8,5) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ โจทย์ลักษณะนี้ทำโดยใช้การหาระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด ในที่นี้จะแสดงโดยใช้จำนวนแสดงทิศทาง

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรง PQ คือ 2-5, 5-4, -1+3
หรือ -3,1,2

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรง QR คือ -7-2, 8-5, 5+1
หรือ -9,3,6

จะเห็นว่า -3,1,2 และ -9,3,6 เป็นสัดส่วนกัน

ดังนั้น PQ ขนานกับ QR

แต่เส้นตรงทั้งสองมีจุดร่วมกัน คือ Q

ดังนั้น P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 6.3.3 ถ้า $(a,2,c)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด $(3,-1,2)$ และ $(5,-4,5)$ จงหาค่า a และ c

วิธีทำ เส้นตรงที่ผ่าน $(a,2,c)$ และ $(3,-1,2)$ มีจำนวนแสดงทิศทาง

$3 - a,\ -1 - 2,\ 2 - c$

เส้นตรงที่ผ่าน $(3,-1,2)$ และ $(5,-4,5)$ มีจำนวนแสดงทิศทาง

$5 - 3,\ -4 + 1,\ 5 - 2$ หรือ $2,-3,3$

เส้นตรงทั้งสองขนานกันดังนั้น

$$\frac{3-a}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{2-c}{3}$$

$$\frac{3-a}{2} = 1$$

$$a = 1$$

$$\frac{2-c}{3} = 1$$

$$c = -1$$

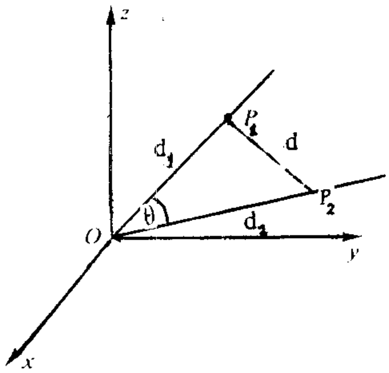
สำหรับเส้นตรงสองเส้นใด ๆ ในปริภูมิ เส้นตรงอาจจะขนานกัน หรือตัดกัน หรืออาจจะไม่ขนานกันและไม่ตัดกัน ลักษณะนี้จะเรียกว่าเป็น **เส้นไขว้ข้าม** (skew lines) ในการหามุมระหว่างเส้นตรงทั้งสองหาได้โดยหามุมระหว่างเส้นตรงผ่านจุดกำเนิดที่ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ การหามุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นใด ๆ หาได้โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.3.2 ถ้า l_1, m_1, n_1 เป็นโคไซน์แสดงทิศทางของ L_1 และ l_2, m_2, n_2 เป็นโคไซน์แสดงทิศทางของ L_2 θ เป็นมุมระหว่าง L_1 และ L_2 แล้วจะได้

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

พิสูจน์ ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นซึ่งผ่านจุดกำเนิด

ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ อยู่บน L_1 และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ อยู่บน L_2



รูป 6.3.5

ให้ d เป็นระยะห่างระหว่าง P_1 และ P_2

d_1 เป็นระยะห่างระหว่าง P_1 และจุดกำเนิด

d_2 เป็นระยะห่างระหว่าง P_2 แและจุดกำเนิด

โดยกฎโคไซน์ของสามเหลี่ยม OP_1P_2

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2}$$

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 - d^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ &\quad - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \\ &= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2}{2d_1d_2} \\ &= \frac{x_1}{d_1}\frac{x_2}{d_2} + \frac{y_1}{d_1}\frac{y_2}{d_2} + \frac{z_1z_2}{d_1d_2} \\ &= l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ถ้า L_1 ตั้งฉากกับ L_2 มุม $\theta = \frac{\pi}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

จะได้ $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

หรือถ้าพิจารณาจำนวนแสดงทิศทางของ L_1 และ L_2 จะได้ดังบทแทรก

บทแทรก 3 ให้ a_1, b_1, c_1 และ a_2, b_2, c_2 เป็นจำนวนแสดงทิศทางของ L_1 และ L_2 L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

ตัวอย่าง 6.3.4 จะหาโคไซน์ของมุมระหว่างเส้นตรง L_1 ผ่านจุด $P_1(1,-2,3)$ และ $P_2(2,0,4)$ เส้นตรง L_2 ผ่านจุด $Q_1(5,-2,-1)$ และ $Q_2(-1,6,-1)$

วิธีทำ จำนวนแสดงทิศทางของ L_1 คือ $1,2,1$

โคไซน์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$

จำนวนแสดงทิศทางของ L_2 คือ $-6,8,0$

โคไซน์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(0) \\ &= \frac{-3+8}{5\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงหาจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง 2 เส้นซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทาง 4,1,3 และ 6,3,5

วิธีทำ ให้จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ต้องการคือ a,b,c เพราะว่าเส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน จะได้

$$4a + b + 3c = 0$$
$$6a + 3b + 5c = 0$$

แก้สมการทั้งสองจะได้ $a = -\frac{2c}{3}$

$b = -\frac{c}{3}$

ถ้าให้ $c = -3$ จะได้ $a = 2$, $b = 1$

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงชุดหนึ่งคือ ≈,1,-3

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาเซตของโคไซน์แสดงทิศทาง และเซตของจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด ต่อไปนี้

   1 (2,0,0),(3,2,0) 1.2 (3,-1,6),(4,2,-1)

   1 3 (-6,4,-6),(-3,8,-6 1.4 (2,1,4),(-1,4,1)

2. จุด 3 จุด ต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ โดยพิจารณาจากจำนวนแสดงทิศทาง

   ≈ 1 A(4,1,6),B(-5,4,0),C(1,2,4)

   2.2 A(-3,2,-7),B(2,2,-3),C(-3,6,-2)

3 จงหามุมระหว่างเส้นตรงที่ผ่านจุด ≈,3,5 , ,4,3 และเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,2,-1),(-2,3,2)

4. จงหามุมระหว่างเส้นตรงซึ่งมีเซตของจำนวนแสดงทิศทางเป็น

   4.1 1,-1,0 และ 2,-1,2 4.2 2,1,-3 และ 7,-2,4

5. จงแสดงว่าสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็น (5,2,-3),(6,1,4),(-2,-3,6),(-1,-4,13) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

6 ถ้ามุมแสดงทิศทางของเส้นตรงเส้นหนึ่งเป็น $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{4}$ จงหามุมแสดงทิศทางอีกมุมหนึ่ง

7 จงหามุมระหว่างเส้นตรงซึ่งมีเซตของโคไซน์แสดงทิศทางเป็น $\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}$ และ $\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}$

8 เส้นตรงที่ผ่านจุด A,B ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C,D หรือไม่

a.1 A(1,2,1), B(2,4,-1); C(4,4,0), D(3,2,2)

8.2 A(5,-4,6), B(2,1,-3); C(-7,2,1), D(-5,3,1)

8.3 A(-1,0,-5), B(2,6,-3); C(4,-2,0), D(1,-1,7)

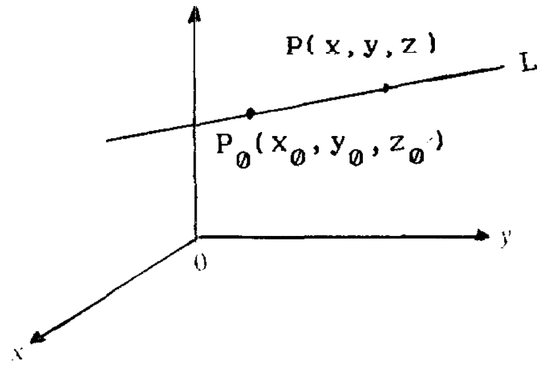
9 จงหาจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทาง 1,2,1 และ -1,3,2

6.4 **สมการของเส้นตรง** (Equations of a line)

การหาสมการของเส้นตรงในระนาบต้องทราบจุดที่เส้นตรงผ่านและความชันของเส้นตรง ในปริภูมิ 3 มิติการหาสมการของเส้นตรงก็เช่นเดียวกัน คือต้องทราบจุดที่อยู่บนเส้นตรงและจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรง

กำหนดให้จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรง L ซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทางคือ a, b, c

ให้ P(x,y,z) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L



รูป 6.4.1

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด P และ P_0 คือ $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงเดียวกันจะเป็นสัดส่วนกันดังนั้น จะได้

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม (parameter)

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

เรียกว่า**สมการอิงตัวแปรเสริม** (parametric equation)

ถ้ากำหนดจุด 2 จุดบนเส้นตรง L คือ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ การหาสมการเส้นตรงผ่านจุด 2 จุดหาได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ P(x,y,z) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ผ่านจุด P,P_0 คือ $x - x_0, y - y_0, z - z_0$

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0P_1 คือ $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ จะได้สมการของเส้นตรงคือ

$$x - x_0 = t(x_1 - x_0)$$
$$y - y_0 = t(y_1 - y_0)$$
$$z - z_0 = t(z_1 - z_0)$$

ถ้าเขียนในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม จะได้

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$$
$$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$
$$z = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

ถ้าเขียนสมการใหม่ในรูป

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

จะเรียกว่าเป็น**สมการแบบสมมาตร** (symmetric form) สำหรับสมการแบบสมมาตรของรูปแรกจะได้ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ถ้าตัวใดตัวหนึ่งของ a,b,c เป็นศูนย์ เช่น b = 0 จะได้สมการ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{c}$$

ซึ่งจะนิยมเขียนในรูปต่อไปนี้แทน

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{และ } y = y_0$$

ถ้า $a = 0$ และ $b = 0$ แต่ $c \neq 0$ สมการคือ

$$\frac{x - x_0}{0} \quad \frac{y - y_0}{-0} = \frac{z - z_0}{c}$$

ในที่นี้คือสมการ $x = x_0$ และ $y = y_0$ นั่นเอง จะเห็นว่าเส้นตรงถ้าเกิดจากการตัดกันของระนาบ 2 ระนาบ

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,-1,2) และมีจำนวนแสดงทิศทาง 5,4,-2

วิธีทำ จากสมการ

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

ในที่นี้ (x_0, y_0, z_0) คือ (3,-1,2) และ a,b,c คือ 5,4,-2

$$x = 3 + 5t$$
$$y = -1 + 4t$$
$$z = 2 - 2t$$

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาสมการเส้นตรงผ่านจุด 2 จุดคือ (2,-1,-1) และ (-4,0,3)

วิธีทำ สมการรูป $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

$$\frac{x - 2}{-4 - 2} = \frac{\text{[illegible]}}{0 + 1} = \frac{\text{[illegible]}}{3 + 1}$$

$$\frac{x - 2}{-6} = y + 1 = \frac{z + 1}{4}$$

ตัวอย่าง 6.4. 3 จงแสดงว่าเส้นตรง $L_1 : \dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{z - 5}{-1}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $L_2 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 4}{5} = \dfrac{z + 4}{-1}$

วิธีทำ จำนวนแสดงทิศทางของ L_1 คือ 3,-2,-1 จำนวนแสดงทิศทางของ L_2 คือ 3,5,-1 ,

$(3)(3) + (-2)(5) + (-1)(-1) = 9 - 10 + 1 = 0$

ดังนั้น L_1 ตั้งฉากกับ L_2

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด และหาจุดตัดของเส้นตรงกับระนาบพิกัด

   1.1 $P_1(3,0,5)$, $P_2(2,-2,4)$

   1.2 $P_1(5,-2,4)$, $P_2(1,3,-6)$

2 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีจำนวนแสดงทิศทางตามที่กำหนดให้

   2.1 $P(-5,3,1)$ จำนวนแสดงทิศทาง $4,-2,3$

   2.2 $P(0,7,-4)$ จำนวนแสดงทิศทาง $-5,0,6$

3. เส้นตรง l มีสมการ $x = 5 - 3t$, $y = -2 + t$, $z = 1 + 9t$ จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(-6,4,-3)$ และขนานกับเส้นตรง l

4. จงหาจุดตัดกันของเส้นตรง $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ กับระนาบพิกัด

5 จงหามุมระหว่างเส้นตรง l_1 และ l_2 ของข้อต่อไปนี้

   5.1 l_1 ผ่านจุด $(3,1,-2)$ และ $(-2,7,-4)$

   l_2 ผ่านจุด $(2,0,5)$ และ $(-4,0,2)$

   5.2 $l_1 : x = 2 + 3t$, $y = -4 - 2t$, $z = -1 + 4t$

   $l_2 : x = 6 + 4t$, $y = -2 + 2t$, $z = -3 - 2t$

   5.3 $l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{-1}$

   $l_2 : \frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-}{1}$

6. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-5.7)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 3 + t$, $y = 2 - 4t$, $z = t$

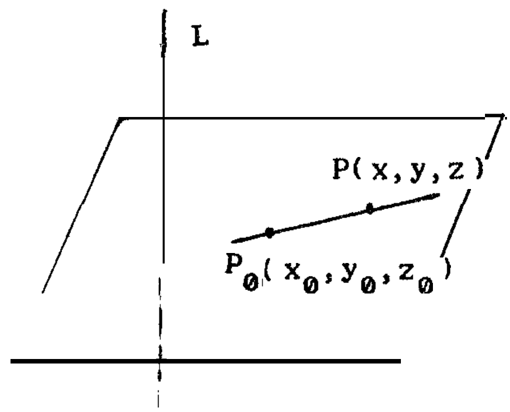
6.5 **ระนาบในปริภูมิ** (The plane in space)

ในระนาบ 2 มิติ สมการรูป $Ax + By + C = 0$ เป็นสมการเส้นตรง แต่ในปริภูมิ 3 มิติ สมการของตัวแปรกำลังหนึ่งที่อยู่ในรูป $Ax + By + Cz + D = 0$ เป็นสมการระนาบ ระนาบเกิดจากจุด 3 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นในการหาสมการระนาบ จะต้องทราบจุดบนระนาบ 1 จุด และจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับระนาบ

ทฤษฎีบท 6.5.1 สมการระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง L ซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทาง A,B,C คือ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

พิสูจน์



รูป 6.5.1

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ L ตั้งฉากกับระนาบ
จำนวนแสดงทิศทางของ P_0P คือ $x - x_0, y - y_0, z - z_0$
เพราะว่า L ตั้งฉากกับระนาบ นั่นคือ L ตั้งฉากกับ P_0P

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

จากสมการ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
จัดใหม่จะได้

สมการ $Ax + By + Cz + D = 0$ เมื่อ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ เป็นสมการทั่วไปของระนาบ

นิยาม 6.5.1 เซตของจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับระนาบ เรียกว่าเซตของ**จำนวนแอตติจูด** (attitude number) ของระนาบ

ในทฤษฎีบท 6.5.1 A,B,C คือจำนวนแอตติจูดของระนาบ

ตัวอย่าง 6.5.1 จงหาสมการระนาบผ่านจุด (0,-1,2) และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = t,\ y = -2 - 2t,\ z = 1 + 3t$

วิธีทำ เส้นตรง $x = t$

$y = -2 - 2t$

$z = 1 + 3t$

จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงคือ 1,-2,3 ซึ่งเป็นจำนวนแอตติจูดของระนาบสมการระนาบผ่านจุด (0,-1,2) และมีจำนวนแอตติจูด 1,-2,3 คือ

$$(1)(x - 0) + (-2)(y + 1) + 3(z - 2) = 0$$

$$x - 2y + 3z - 8 = 0$$

ตัวอย่าง 6.5.2 จงหาเซตของจำนวนแอตติจูดของระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด

วิธีทำ ระนาบที่ขนานกับระนาบ xy มีสมการ $z = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ในที่นี้จำนวน แอตติจูดคือ 0,0,1

ในทำนองเดียวกัน ระนาบที่ขนานกับระนาบ yz และ xz มีสมการ $x = c$ และ $y = c$ ตามลำดับ

ดังนั้นเซตของจำนวนแอตติจูด คือ 1,0,0 และ 0,1,0 ตามลำดับ

ในการพิจารณาระนาบมากกว่า 1 ระนาบ ก็จะพิจารณาเกี่ยวกับจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ ระนาบ 2 ระนาบขนานกันจะได้เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบขนานกัน โดย

อาศัยคุณสมบัติของเส้นตรงทำให้เราสามารถพิจารณาว่าระนาบคู่ใดขนานกัน หรือหามุมระหว่างระนาบทั้งสองได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.5.2 ระนาบสองระนาบขนานกันก็ต่อเมื่อจำนวนแอตติจูดเป็นสัดส่วนกันระนาบสองระนาบตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 6.5.3 จงหาสมการระนาบผ่านจุด (1,3,5) และขนานกับระนาบ $3x - 4y + z = 2$

วิธีทำ ระนาบ $3x - 4y + z = 2$ มีจำนวนแอตติจูด 3,-4,1

ระนาบขนานกัน จำนวนแอตติจูดเป็นสัดส่วนกันสมการระนาบผ่านจุด (1,3,5) มีจำนวนแอตติจูด 3,-4,1 คือ

$$3(x - 1) - 4(y - 3) + (z - 5) = 0$$

$$3x - 4y + z + 4 = 0$$

ตัวอย่าง 6.5.4 จงหาสมการระนาบผ่านจุด (2,3,0),(-2,-3,4) และ (0,6,0)

วิธีทำ จากสมการทั่วไป Ax ● $By+Cz+D=0$

ระนาบผ่านจุด (2,3,0) ; $2A + 3B + D = 0$

จุด (-2,-3,4) ; $-2A - 3B + 4C + D = 0$

จุด (0,6,0) ; $6B + D = 0$

แก้สมการทั้งสาม จะได้ $A = -\frac{D}{4}$, $B = -\frac{D}{6}$, $C = -\frac{D}{2}$

สมการระนาบคือ $-\frac{Dx}{4} - \frac{Dy}{6} - \frac{Dz}{2} + D = 0$

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

ตัวอย่าง 6.5.5 จงหาสมการระนาบผ่านจุด (0,3,-2) และขนานกับเส้นตรง L_1, L_2 ซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทาง 1,-2,2 และ -4,5,1 ตามลำดับ

วิธีทำ สมการระนาบคือ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$A(x - 0) + B(y - 3) + C(z + 21 = 0$$

เพราะว่าระนาบขนานกับ L_1 ดังนั้นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบตั้งฉากกับ L_2 ด้วย จะได้

$$A + (-2)B + (2)C = 0$$

$$A - 2B + 2C = 0$$

ระนาบขนานกับ L_2 ซึ่งมีจำนวนแสดงทิศทาง -4,5,1 จะได้

$$(-4)A + 5B + C = 0$$

$$-4A + 5B$$

แก้สมการทั้งสองจะได้ $A = \frac{4}{3}B$ และ $C = \frac{B}{3}$

สมการระนาบคือ $\frac{4}{3}Bx + B(y - 3) + \frac{B}{3}(z + 2) = 0$

$$4x + 3y + z - 7 = 0$$

6.6 มุมระหว่างระนาบ

ระนาบสองระนาบที่ไม่ขนานกัน ตัดกันจะได้เส้นตรง เราสามารถหามุมระหว่างระนาบได้ การหามุมระหว่างระนาบจะอาศัยสูตรของมุมระหว่างเส้นตรงนั่นเอง

นิยาม 6.6.1 ให้ P_1 และ P_2 เป็นระนาบสองระนาบที่ไม่ขนานกันซึ่งมี L_1 และ L_2 เป็นเส้นตั้งฉากกับระนาบ P_1 และ P_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ P_1 และ P_2 ก็คือมุมระหว่างเส้นตรง L_1, L_2

ทฤษฎีบทที่ 6.6.1 ถ้า θ เป็นมุมระหว่างระนาบ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1$ และ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ แล้ว

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

พิสูจน์ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ มีโคไซน์แสดงทิศทางคือ

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},\ \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},\ \frac{<_1}{\text{ฆ}_1^2 + \text{ฆ}_1^2 + C_1^2}$$

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ มีโคไซน์แสดงทิศทางคือ

$$\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},\ \frac{B_z}{\sqrt{A_z^2 + B_z^z + C_z^z}},\ \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ให้ θ เป็นมุมระหว่างระนาบ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบด้วย เลือกให้ θ เป็นมุมแหลม

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} + \frac{B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_z^z\ <_z^z}}$$

$$+ \frac{C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_z^z\ C_z^z}}$$

$$= \frac{\text{ฆ}_\omega A_2 + B\ B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_z^z + C_z^z}}$$

บทแทรก ระนาบสองระนาบซึ่งมีจำนวนแอตติจูด $\text{ฆ}_1, B_1, C_1$ ฆละ A_2, B_2, C_2 ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $A_1\text{ฆ}_z + B_1B_z + C_1C_2 = \leq$

ตัวอย่าง 6.6.1 จงหาค่า $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างระนาบ

$2x-y-2z-4 = 0$ และ $3x+2y-6z-5 = 0$

วิธีทำ จำนวนแอตติจูดของ $2x - y - 2z - 4 = 0$ คือ $2,-1,-2$

จำนวนแอตติจูดของ $3x + 2y - 6z - 5 = 0$ คือ $3,2,-6$

$$\text{จาก}\quad \cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$= \frac{|(2)(3) + (-1)(2) + (-2)(-6)|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-6)^2}}$$

$$= \frac{|6 - 2 + 12|}{(3)(7)}$$

$$= \frac{16}{21}$$

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$6x + 2y - 3z + 2 = 0$ และ $x - 2y - 2z + 4 = 0$

วิธีทำ $6x + 2y - 3z + 2 = 0$

$x - 2y - 2z + 4 = 0$

แก้สมการทั้งสอง หา x และ y ในเทอมของ z

$$x = \frac{5z - 6}{7} = \frac{5z}{7} - \frac{6}{7}$$

$$y = -\frac{9z + 22}{14} = -\frac{9z}{14} + \frac{22}{14}$$

$$\frac{x + \frac{6}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{y - \frac{22}{14}}{-\frac{9}{14}} = \frac{z}{1}$$

หรือ $x = -\frac{6}{7} + \frac{5}{7}t$, $y = \frac{22}{14} - \frac{9}{14}t$, $z = t$

พิจารณาระนาบมากกว่า 2 ระนาบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.6.3 ระนาบ 3 ระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$x + 3y - z + 1 = 0$ .....(6.6.1)

$2x - y + 2z - 3 = 0$ .....(6.6.2)

$7x + 7y + z - 3 = 0$ .....(6.6.3)

(6.6.1) + (6.6.3) ; $8x + 10y - 2 = 0$

$4x + 5y - 1 = 0$ .....(6.6.4)

2(6.6.1) + (6.6.2) ; $4x + 5y - 1 = 0$ .....(6.6.5)

จะได้สมการ (6.6.4) และ (6.6.5) เป็นสมการเดียวกัน

นั่นคือสมการระนาบทั้งสามไม่เป็นอิสระแก่กัน ขึ้นอยู่แก่กันด้วยความสัมพันธ์

$3(x + 3y - z + 1)+2(2x - y + 2z - 3)-1(7x + 7y + z - 3)=0$

ดังนั้นระนาบทั้งสามมีเส้นตรงร่วมกันที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

ตัวอย่าง 6.6.4 จงหาจุดตัดกันของระนาบต่อไปนี้

$2x - 3y + 5z - 11 = 0$

$5x + 4y - 6z + 5 = 0$

$4x - 7y \bullet 8z - 14 = 0$

โดยการกำจัดค่า y ของ 2 สมการแรกจะได้

$23x + 2z - 29$ □ ▭

กำจัด y ของสมการที่ 2 และที่ 3 จะได้

$51x - 10z - 21 = 0$

แก้สมการหาค่า x และ z จะได้

$x = 1$, ⌘ □ 3

แทนค่า x, z ในสมการ จะได้ $y = 2$

จุดตัดกันของระนาบ คือ (1,2,3)

6.7 ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

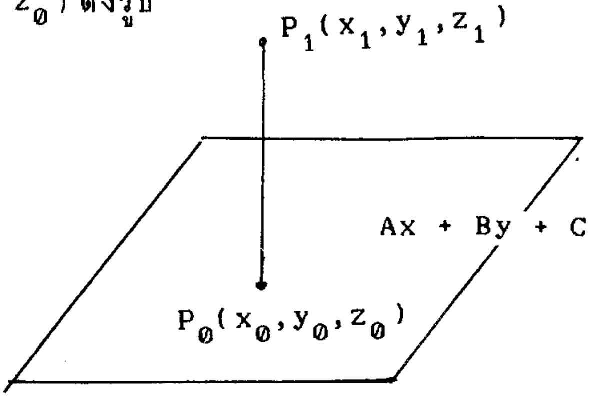
ในปริภูมิ 3 มิติจะหาระยะทางจากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยังระนาบ $Ax + By + Cz + D = 0$ ได้ซึ่งจะได้สูตรคล้ายกับในการหาระยะจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรงซึ่งมีสมการ $Ax + By + C = 0$

จะเห็นว่า $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ทฤษฎีบท 6.7.1 ระยะทาง d จากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยังระนาบ $Ax + By + Cz + D = 0$ มีค่าเท่ากับ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

พิสูจน์ จากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ลากเส้นตรง L ให้ตั้งฉากกับระนาบที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ดังรูป



รูป 6.7.1

จำนวนแสดงทิศทางของ P_0P_1 คือ $x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0$ แต่ A, B, C เป็นจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตั้งฉากกับระนาบซึ่งขนานกับ P_0P_1

จะได้

$$\frac{x_1 - x_0}{A} = \frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{z_1 - z_0}{C} = t$$

$$x_0 = x_1 - At$$

$$y_0 = y_1 - Bt$$

$$z_0 = z_1 - Ct$$

จุด P_0 อยู่บนระนาบ ดังนั้น (x_0, y_0, z_0) คล้องตามสมการระนาบ

$$A(x_1 - At) + B(y_1 - Bt) + C(z_1 - Ct) + D = 0$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 - A^2t - B^2t - C^2t + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2)t = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

เพราะว่า d เป็นระยะห่างระหว่าง P_1 และ P_0

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

$$= (At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)t^2$$

$$d = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,|t|$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ตัวอย่าง 6.7.1 จงหาระยะทางจากจุด (3,1,-4) ไปยังระนาบ $4x + y - 8z - 7 = 0$

วิธีทำ จากสูตร $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

แทนค่า (x_1, y_1, z_1) คือ (3,1,-4) จะได้

$$d = \frac{|4(3) + (1) - 8(-4) - 7|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-8)^2}}$$

$$= \frac{|12 + 1 + 32 - 7|}{9}$$

$$= \frac{38}{9}$$

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาสมการระนาบตามเงื่อนไขต่อไปนี้ข้อ 1 - 11

1. ระนาบผ่านจุด (2,-3,5) มีจำนวนแอตติจูด 4,-1,0

2. ระนาบผ่านจุด (6,-7,4) และขนานกับระนาบพิกัด

3. ระนาบผ่านจุด (-1,2,3) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด (5,0,-2) และ (4,1,-3)

4. ระนาบผ่านจุด (3,-5,1) และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = -1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 - 4t$

5. ระนาบผ่านจุด (-1,2,0) และขนานกับเส้นตรง $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{4}$

6. ระนาบผ่านจุดกำเนิดและขนานกับระนาบ $2x - 3y - 5z + 6 = 0$

7. ระนาบผ่านจุด (5,2,-3) และขนานกับระนาบ $3x-y+2z-10 = 0$

a. ขนานกับระนบ $3x + 6y - 2z + 1 \square 0$ ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง 5 หน่วย

9. ขนานกับระนาบ $2x - 3y + 5z - 3 = 0$ ห่างจากจุด (3,-1,2) เป็นระยะทาง 3 หน่วย

10. ผ่านจุด (0,0,0),(1,4,0) และ (0,2,5)

11. ผ่านจุด (3,-4,1),(-1,1,-2) และ (3,2,1)

12. จงหาจุดตัดกันของเส้นตรง $3x - 2y - 42 + 7 = 0$ และเส้นตรง

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{3}$$

13. จงแสดงว่าเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ ขนานกับระนาบ

$6x - 8y + 12z - 60 = 0$

14. จงหาสมการเส้นตรงผ่านจุด (3,-1,2) และตั้งฉากกับระนาบ

$4x - Y + 32 - 3 = 0$

15. จงหาสมการเส้นตรงผ่านจุด (2,3,-1) และตั้งฉากกับแกน z

16. จงแสดงว่าระนาบ $2x - 3y - z - 5 = 0$ และ

$-6x + 9y + 32 + 2$ [illegible] 0 ขนานกัน

17. จงหาระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

17.1 (5,-8,0) ไปยัง $4x - 3z = 2$

17.2 (4,1,-3) ไปยัง $6x - 2y + 3z - 9 = 0$

18. จงหามุมระหว่างระนาบ

18.1 $2x - y - 2z = 5$, $x - 2y + z = 1$

18.2 $3x$ [illegible] , $3x + 6y - 32 = 8$

19. จงหาจุดตัดกันของ 3 ระนาบ

19.1 $x-2y+4z+4 = 0$, $x+y+z-8 = 0$, $x-y+2z+1 = 0$

19.2 $3x-y+z-2 = 0$, $x+2y-z+1 = 0$, $2x+2y+z-4 = 0$

19.3 $3x-8y+7z+1$ [illegible] 0, $x+2y-z-3 = 0$, $3x-y+2z-4$ [illegible]

20. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{-4}$ และระนาบ

$3x - 2y - 62 = 0$