

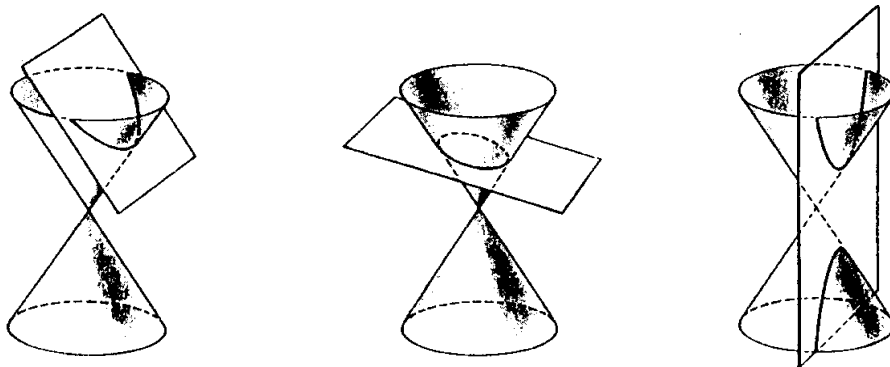
**บทที่ 5**  
**ภาคตัดกรวย**  
**(The Conic Section)**

**5.0 คำนำ**

ภาคตัดกรวยเป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการเอาระนาบตัดกับกรวยกลม มีวงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลมซีกใดซีกหนึ่งของกรวยจะได้เส้นโค้ง พาราโบลา ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลมโดยที่ระนาบไม่ขนานกับแกนของกรวยคือ ตัดกรวยเพียงซีกเดียวและเป็นเส้นโค้งปิด เส้นโค้งที่เกิดขึ้นเรียกววงรี

ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลม โดยขนานกับแกนของกรวยกลม จะได้ เส้นโค้งไฮเพอร์โบลา ดังรูป

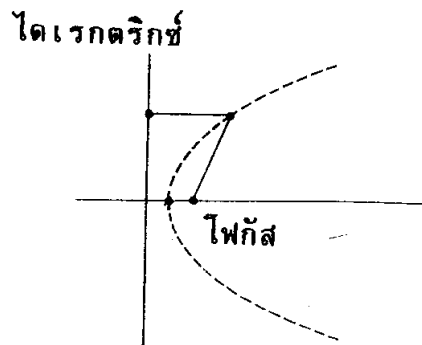


**รูป 5.0**

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิชาที่ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิต และเรขาคณิต ในบทนี้จะศึกษาถึงการสร้างสมการพีชคณิตซึ่งแทนภาคตัดกรวย

## 5.1 พาราโบลา (Parabola)

**นิยาม 5.1.1** พาราโบลา คือเซตของจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งและเส้นตรงที่ถูตรึงเส้นหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน



รูป 5.1.1

จุดตรึงเรียกว่าจุดโฟกัส (focus) ของพาราโบลา  
เส้นตรงที่ถูตรึงเรียกว่าเส้นไดเรกทริกซ์ (directrix)  
เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์เรียกว่าแกน (axis) ของพาราโบลา

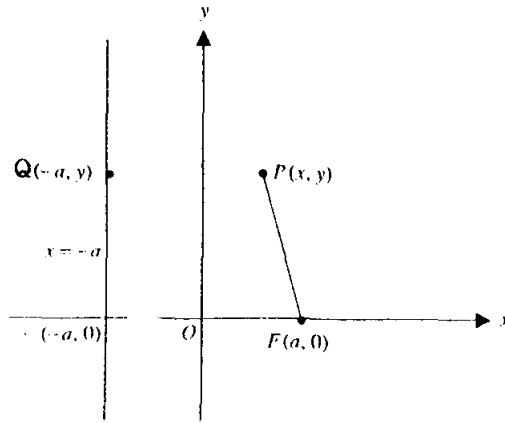
จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลาเรียกว่าจุดยอด (vertex) ของพาราโบลา

เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและถูกตัดโดยพาราโบลาเรียกว่าเลตัสเรกตัม (Latus rectum)

สมการพาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

1. แกนของพาราโบลาคือแกน  $x$  จุดยอดอยู่ที่  $(0,0)$  โฟกัสอยู่ที่  $F(a,0)$  และสมการไดเรกทริกซ์คือ  $x = -a$

ให้  $P(x,y)$  เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ  $Q$  เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากจาก  $P$  บนเส้นไดเรกทริกซ์ ดังนั้น  $Q$  มีพิกัด  $(-a,y)$



รูป 5.1.2

P อยู่บนพาราโบลา ดังนั้น

$$|PF| = |PQ|$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + a)^2 + (y - y)^2}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

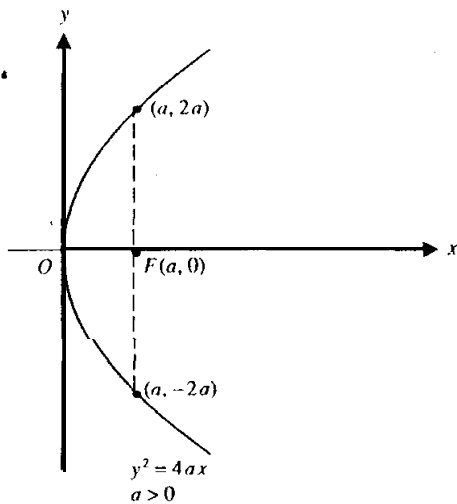
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

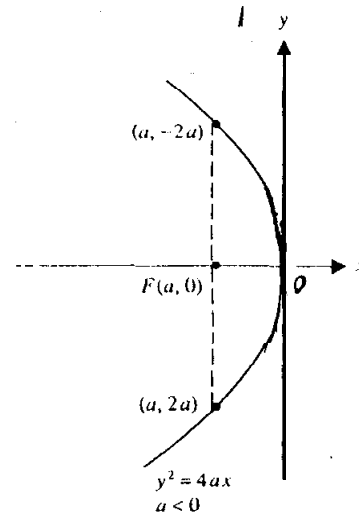
จากสมการนี้ a อาจมีค่าบวกหรือลบก็ได้

ถ้า  $a > 0$  จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางขวา

ถ้า  $a < 0$  จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย ดังรูป



รูป 5.1.3



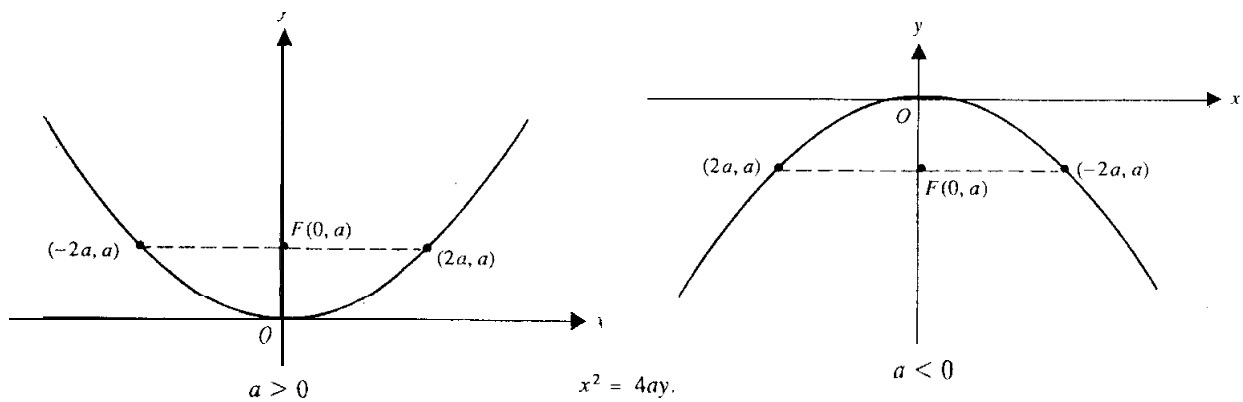
2. แกนของพาราโบลาคือแกน  $y$  จุดยอดอยู่ที่  $(0,0)$  โฟกัสอยู่ที่  $F(0,a)$  และสมการไคเรตริกซ์ คือ  $y = -a$

วิธีหาสมการทำในทำนองเดียวกับข้อ 1 คือให้  $P(x,y)$  เป็นจุดบนพาราโบลา จะได้สมการ

$$x^2 = 4ay$$

ถ้า  $a > 0$  จะได้พาราโบลาเปิดข้างบน

ถ้า  $a < 0$  จะได้พาราโบลาเปิดข้างล่าง ดังรูป



รูป 5.1.4

ความยาวของเลตส์เรกตัม ของพาราโบลาหาได้โดยแทน  $x = a$  ในสมการ  $y^2 = 4ax$  หาค่า  $y$  ได้เท่ากับ  $\pm 2a$  หรืออาจจะแทน  $y = a$  ในสมการ  $x^2 = 4ay$  หาค่า  $x$  ได้เท่ากับ  $\pm 2a$  ดังนั้นความยาวเลตส์เรกตัมของพาราโบลาเท่ากับ  $|4a|$

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดสมการพาราโบลา  $y^2 = -12x$  จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไคเรตริกซ์ และจุดปลายเลตส์เรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ  $y^2 = -12x$   
 เทียบกับสมการ  $y^2 = 4ax$   
 จะได้  $4a = -12$   
 $a = -3$

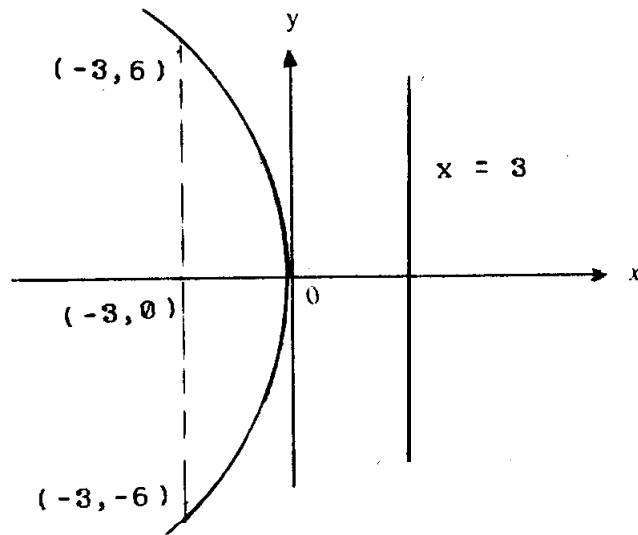
จุดโฟกัสคือ  $F(a, 0)$  นั่นคือ  $F(-3, 0)$

สมการไดเรกทริกซ์ คือ  $x = -a$

$$x = -(-3) = 3$$

ความยาวเลตัสเรกตัม =  $|4a| = |4(-3)| = 12$

จุดปลายเลตัสเรกตัมคือ  $(-3, 6)$  และ  $(-3, -6)$



รูป 5.1.5

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงหาสมการพาราโบลา จุดโฟกัสอยู่ที่  $(0, \frac{5}{4})$  และมี

สมการไดเรกทริกซ์  $y = -\frac{5}{4}$  หาความยาวเลตัสเรกตัม

พร้อมทั้งเขียนรูป

วิธีทำ จากจุดโฟกัส  $(0, \frac{5}{4})$  ทำให้ทราบว่า แกนของพาราโบลาอยู่

บนแกน  $y$  สมการคือ

$$x^2 = 4ay$$

ในที่นี้  $a = \frac{5}{4}$

สมการคือ  $x^2 = 5y$

ความยาวเลตัสเรกตัม =  $|4a| = |5| = 5$

























































