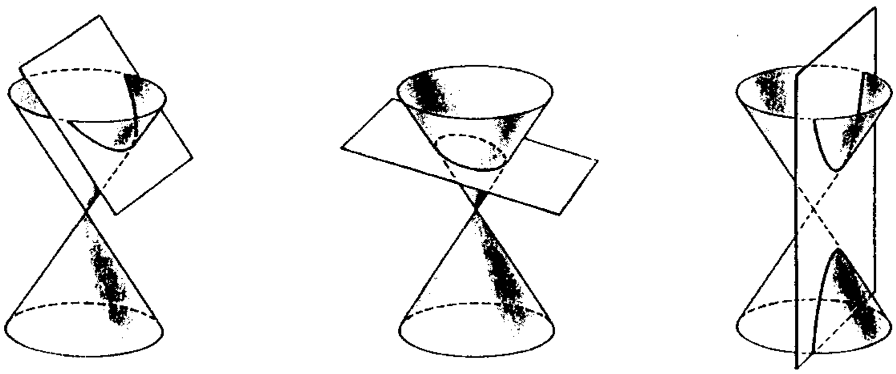
บทที่ 5
ภาคตัดกรวย
(The Conic Section)

5.0 คำนำ

ภาคตัดกรวยเป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการเอาระนาบตัดกับกรวยกลม มีวงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลมซีกใดซีกหนึ่งของกรวยจะได้เส้นโค้ง **พาราโบลา** ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลมโดยที่ระนาบไม่ขนานกับแกนของกรวยคือตัดกรวยเพียงซีกเดียวและเป็นเส้นโค้งปิด เส้นโค้งที่เกิดขึ้นเรียกวง**รี**

ถ้าระนาบตัดกับกรวยกลม โดยขนานกับแกนของกรวยกลม จะได้เส้นโค้ง**ไฮเพอร์โบลา** ดังรูป

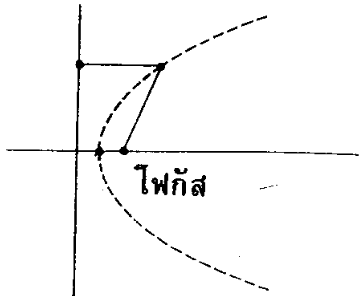


รูป 5.0

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิชาที่ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต ในบทนี้จะศึกษาถึงการสร้างสมการ**พีชคณิต**ซึ่งแทนภาคตัดกรวย

5.1 **พาราโบลา (Parabola)**

นิยาม 5.1.1 พาราโบลา คือเซตของจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งและเส้นตรงที่ถูกตรึงเส้นหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน



รูป 5.1.1

จุดตรึงเรียกว่า**จุดโฟกัส** (focus) ของพาราโบลา

เส้นตรงที่ถูกตรึงเรียกว่า**เส้นไดเรกตริกซ์** (directrix)

เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกตริกซ์เรียกว่า**แกน** (axis) ของพาราโบลา

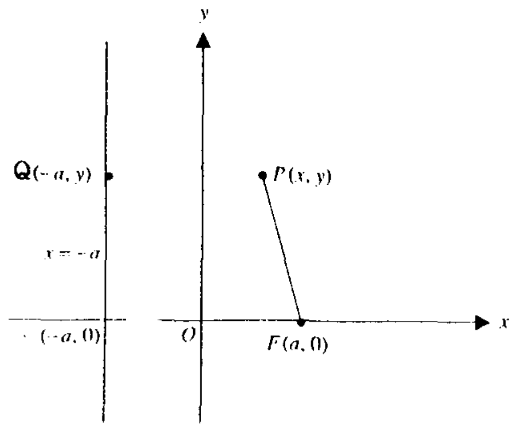
จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลาเรียกว่า**จุดยอด** (vertex) ของพาราโบลา

เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและถูกตัดโดยพาราโบลาเรียกว่า**เลตัสเรกตัม** (Latus rectum)

สมการพาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

1. **แกนของพาราโบลาคือแกน x จุดยอดอยู่ที่ (0,0)** โฟกัสอยู่ที่ $F(a,0)$ และสมการไดเรกตริกซ์คือ $x = -a$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ Q เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากจาก P บนเส้นไดเรกตริกซ์ ดังนั้น Q มีพิกัด $(-a,y)$



รูป 5.1.2

P อยู่บนพาราโบลา ดังนั้น

$$|PF| = |PQ|$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

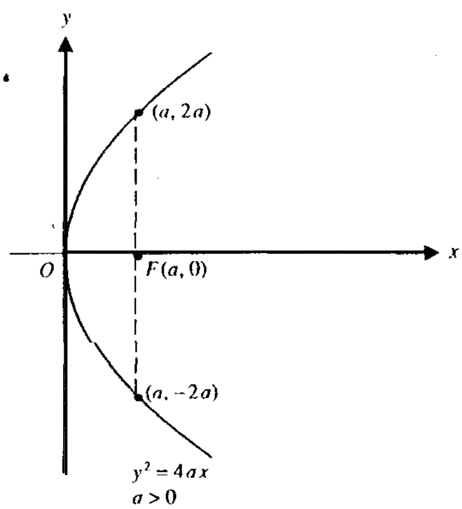
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

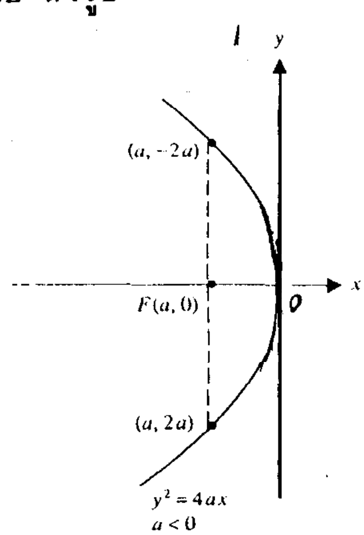
จากสมการนี้ a อาจมีค่าบวกหรือลบก็ได้

ถ้า $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางขวา

ถ้า $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย ดังรูป



รูป 5.1.3



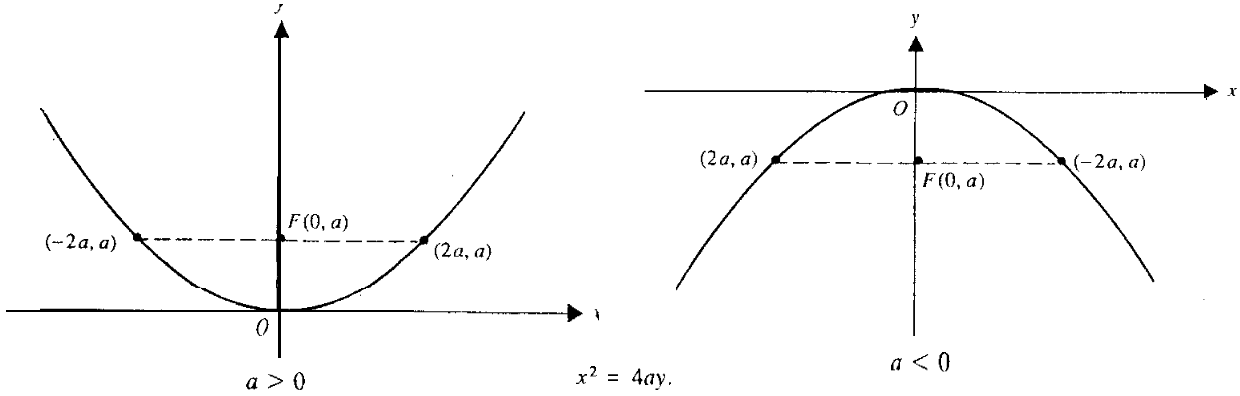
2. **แกนของพาราโบลาคือแกน y** จุดยอดอยู่ที่ (0,0) โฟกัสอยู่ที่ F(0,a) และสมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -a$

วิธีหาสมการทำในทำนองเดียวกับข้อ 1 คือให้ P(x,y) เป็นจุดบนพาราโบลา จะได้สมการ

$$x^2 = 4ay$$

ถ้า $a > 0$ จะได้พาราโบลาเปิดข้างบน

ถ้า $a < 0$ จะได้พาราโบลาเปิดข้างล่าง ดังรูป



รูป 5.1.4

ความยาวของเลตัสเรกตัม ของพาราโบลาหาได้โดยแทน $x = a$ ในสมการ $y^2 = 4ax$ หาค่า y ได้เท่ากับ $\pm 2a$ หรืออาจจะแทน $y = a$ ในสมการ $x^2 = 4ay$ หาค่า x ได้เท่กับ $\pm 2a$ ดังนั้นความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาเท่ากับ $|4a|$

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดสมการพาราโบลา $y^2 = -12x$ จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ และจุดปลายเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 = -12x$

เทียบกับสมการ $y^2 = 4ax$

จะได้ $4a = -12$

$a = -3$

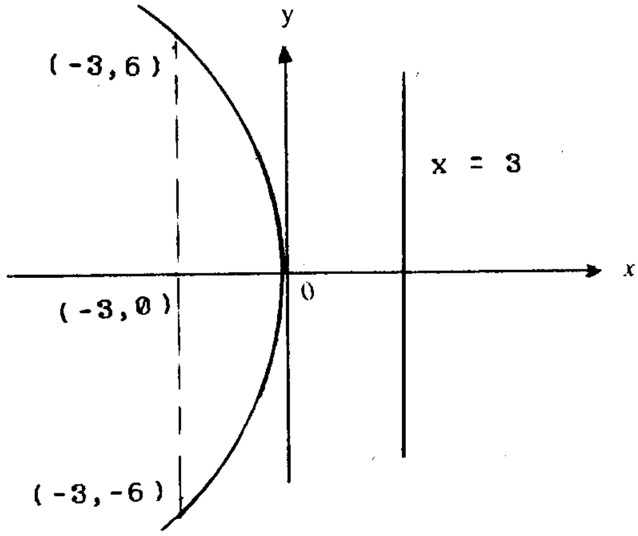
จุดโฟกัสคือ $F(a,0)$ นั่นคือ $F(-3,0)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -a$

$x = -(-3) = 3$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = |4(-3)| = 12$

จุดปลายเลตัสเรกตัมคือ $(-3,6)$ และ $(-3,-6)$



รูป 5.1.5

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงหาสมการพาราโบลา จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \frac{5}{4})$ และมีสมการไดเรกตริกซ์ $y = -\frac{5}{4}$ หาความยาวเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนรูป

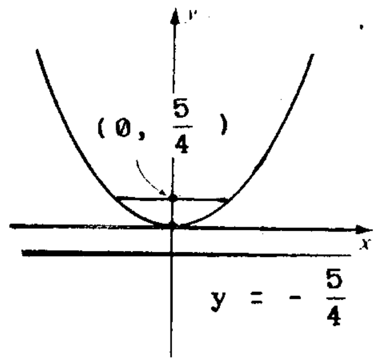
วิธีทำ จากจุดโฟกัส $(0, \frac{5}{4})$ ทำให้ทราบว่า แกนของพาราโบลาอยู่บนแกน y สมการคือ

x^{2} □ $4ay$

ในที่นี้ $a = \frac{5}{4}$

สมการคือ $x^2 = 5y$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = |5| = 5$



รูป 5.1.6

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาสมการพาราโบลาผ่านจุด (-3,2) และแกนทับแกน y

วิธีทำ เนื่องจากแกนของพาราโบลาทับแกน y

สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4ay$

จุด (-3,2) อยู่บนกราฟดังนั้น

$$(-3)^2 = 4a(2)$$

$$9 = 8a$$

$$a = \frac{9}{8}$$

สมการที่ต้องการคือ $x^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)y$

$$2x^2 = 9y$$

แบบฝึกหัด 5.1

จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียนกราฟของพาราโบลาต่อไปนี้

1. $x^2 = -6y$

2. $2y^2 = 5x$

3. $y^2 = -8x$

4. $x^2 = 4y$

5. $3x^2 - 4y = 0$

6. $y^2 + 3x = 0$

จงเขียนสมการพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิด และคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้

7. จุดโฟกัสที่ $(0,4)$

8. สมการไดเรกตริกซ์ $x + 5 = 0$

9. จุดโฟกัสที่ $(-5,0)$

10. สมการไดเรกตริกซ์ $y = \frac{3}{2}$

11. ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 8 และพาราโบลาเปิดทางซ้าย

12. ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 12 และพาราโบลาเปิดข้างบน

13. จุดโฟกัสอยู่บนแกน x และกราฟผ่านจุด $(3,-4)$

14. พาราโบลาเปิดทางขวาและผ่านจุด $(-3,-6)$

15. พาราโบลาเปิดข้างล่าง และผ่านจุด $(1,-1)$

จงหาจุดตัดกันของกราฟต่อไปนี้

16. $y^2 = 3x$ และ $6x - y - 1 = 0$

17. $x^2 + y = 0$ และ $4x^2 + y^2 = 12$

จงหาจุดปลายของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาข้อ 18, 19

18. $2x^2 + y = 0$

19. $y^2 - 6x = 0$

20. จงเขียนกราฟของ $x^4 - 36y^2 = 0$

5.2 วงรี (Ellipse)

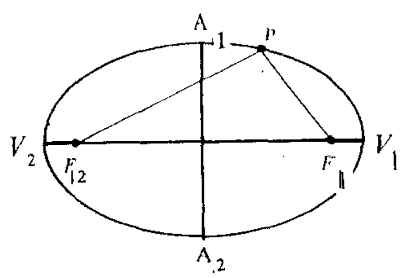
นิยาม 5.2.1 วงรีคือเซตของจุดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตไปยังจุดตรึงสองจุดมีค่าคงที่

จุดตรึงเรียกว่า**จุดโฟกัส**ของวงรี

จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเรียกว่า**จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงรี

เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า**แกน** (axis) ของวงรี

จุดตัดของวงรีกับแกนเรียกว่า**จุดยอด** (vertex)



รูป 5.2.1

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองเรียกว่าแกนเอก (major axis) ของวงรี ในรูปคือ V_1V_2

ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลางตัดกับวงรีเรียกว่า **แกนโท** (minor axis) คือเส้น A_1A_2

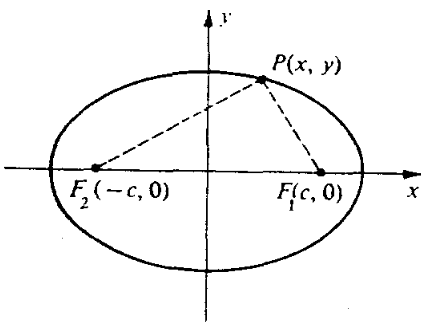
สมการวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ให้ a เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของวงรีถึงจุดยอดจุดหนึ่ง

c เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัสจุดหนึ่ง

5.2.1 แกนของวงรีคือแกน x

ให้จุดโฟกัสอยู่ที่ $F_1(c,0)$ และ $F_2(-c,0)$ เมื่อ $c > 0$ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี



รูป 5.2.2

ให้ผลบวกของระยะจากจุด P ถึงโฟกัสเท่ากับค่าคงที่ 2a

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$a^2[(x + c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

เพราะว่า $|PF_1| + |PF_2| > |F_1F_2|$

$$2a > 2c$$

$$a > c$$

$$a^2 - c^2 > 0$$

ให้ $a^2 - c^2 = b^2$

จะได้ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0 \qquad .....(5.2.1)$$

(5.2.1) เป็นสมการวงรี จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) แกนเอกอยู่บนแกน x ในที่นี้แกนเอกเท่ากับ 2a และแกนโทเท่ากับ 2b

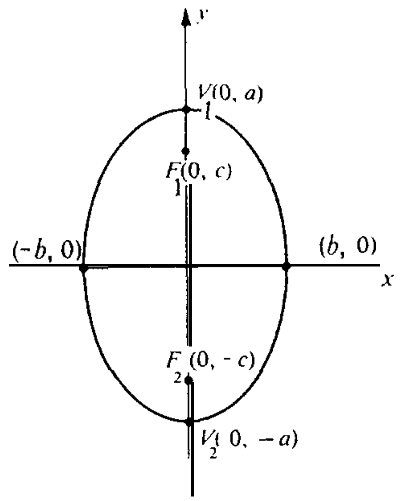
a เรียกว่าครึ่งแกนเอก

b เรียกว่าครึ่งแกนโท

5.2.2 แกนของวงรีคือแกน y

ให้จุดโฟกัสอยู่ที่ $F_1(0,c)$ และ $F_2(0,-c)$ ในทำนองเดียวกับข้อ 5.2.1 จะได้สมการวงรีคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad a > 0 \qquad .....(5.2.2)$$



รูป 5.2.3

ถ้ากำหนดสมการวงรีให้ สามารถบอกได้ว่าแกนเอกทับแกน x หรือแกน y โดยดูจากส่วนที่หาร x^2 และ y^2 ถ้าตัวหาร x^2 มากกว่าตัวหาร y^2 จะได้สมการ (5.2.1) และถ้าตัวหาร y^2 มากกว่าตัวหาร x^2 จะได้สมการ (5.2.2)

เช่น ให้สมการ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

ในที่นี้ 25 > 9 แกนเอกทับแกน y

นิยาม 5.2.2 เลตัสเรกตัมของวงรีคือเส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอกไปตัดกราฟเลตัสเรกตัมของวงรี = $\frac{2b^2}{a}$

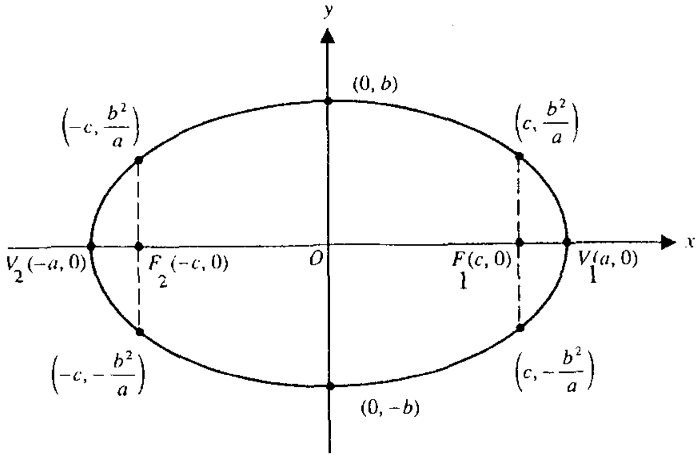
หาได้โดยแทนค่า $x = c$ ในสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $y = \pm \frac{b^2}{a}$

จุดปลายเลตัสเรกตัมที่ผ่าน $(c,0)$ คือ $(c, \frac{b^2}{a})$ และ $(c, \frac{-b^2}{a})$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทน $x = -c$ จะได้ $y = \pm \frac{b^2}{a}$

จุดปลายเลตัสเรกตัมที่ผ่าน $(-c,0)$ คือ $(-c,\frac{h^2}{a}),(-c,\frac{-b^2}{a})$,



รูป 5.2.4

นิยาม 5.2.3 อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า**ค่าเยื้องศูนย์กลาง** (eccentricity) ของวงรี เขียนแทนด้วย e

$$e = \frac{c}{a}$$

สำหรับวงรี $a > c$ เสมอดังนั้น $e < 1$

สมการ $b^2 = a^2 - c^2$

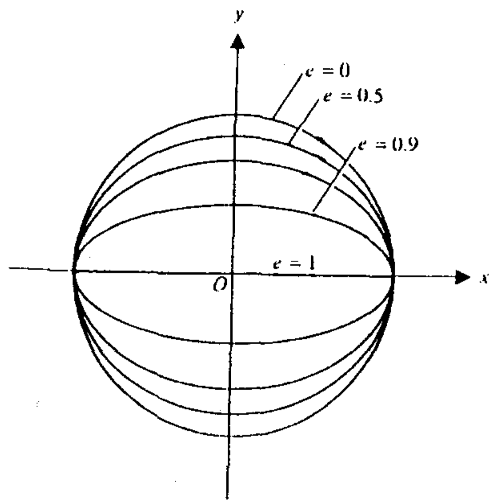
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$= b^2 + a^2e^2$$

$$a^2(1 - e^2) = b^2$$

จากสมการนี้จะเห็นว่า ถ้า $e = 0$ จะได้ $a = b$ สมการวงรีก็คือวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดนั่นเอง

ถ้า e มีค่าน้อยมาก a และ b เกือบจะเท่ากัน วงรีจะมีรูปร่างเกือบเป็นวงกลม แต่ถ้า e มีค่าเข้าใกล้ 1 ค่า $1 - e^2$ จะมีค่าน้อยมากเข้าใกล้ 0 ดังนั้นค่า b จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ a วงรีจะมีลักษณะแคบ



รูป 5.2.5

ตัวอย่าง 5.2.1 จงเขียนกราฟของ $4x^2 + 16y^2 = 64$ หาพิกัดของจุดโฟกัส จุดยอดความยาวเลตัสเรกตัม

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ หารตลอดด้วย 64

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

เป็นสมการวงรี จุดศูนย์กลางที่ (0,0) แกนเอกทับแกน x

$a = 4,\ b = 2$

จุดยอดอยู่ที่ (4,0) และ (-4,0)

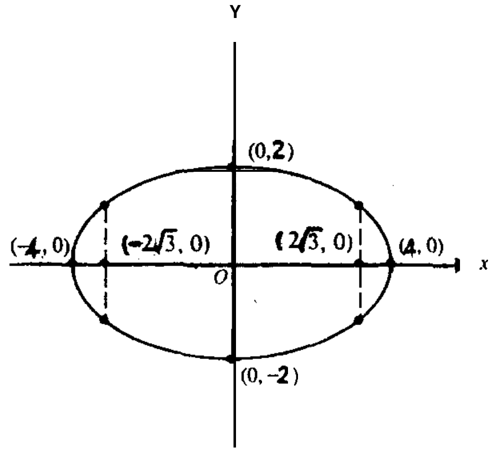
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2\sqrt{3}, 0)$ และ $(-2\sqrt{3}, 0)$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \dfrac{2b^2}{a}$

$$= \frac{2(4)}{4} = 2$$



รูป 5.2.6

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาสมการวงรี จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (0,6) ค่าเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ จากจุดยอดอยู่ที่ (0,6) ทำให้ทราบว่าแกนเอกของรูปทับแกน y สมการคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ในที่นี้ $a = 6$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{6}{2} = 3$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$= \sqrt{6^2 - 3^2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

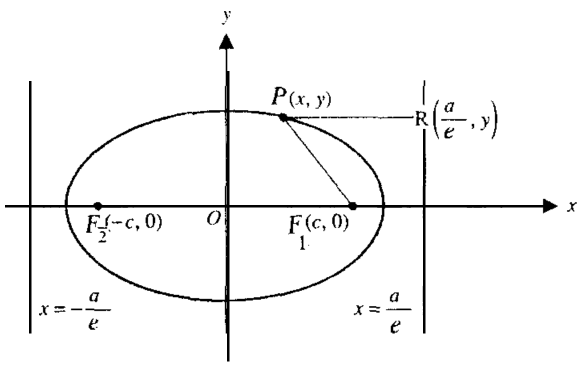
สมการวงรีคือ $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

นิยามของวงรีอีกรูปหนึ่ง พิจารณาจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.1 วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เป็นทางเดินของจุดซึ่งอัตราส่วนระหว่างระยะจากจุด
ใด ๆ ถึงจุดโฟกัส $F_1(ae, 0)$ กับระยะจากจุดนั้นถึงเส้นตรง
$x - \frac{a}{e} = 0$
เท่ากับค่า e เสมอ

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ

$R(\frac{a}{e}, y)$ เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากจากจุด P มายังเส้น $x = \frac{a}{e}$



รูป 5.2.7

ถ้า $\frac{|F_1P|}{|RP|} = e$

ดังนั้น $$\frac{\sqrt{(ae - x)^2 + y^2}}{\left|\frac{a}{e} - x\right|} \quad \square \quad m$$

$$(ae - x)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

$$a^2e^2 - Paex + x^2 + y^2 = a^2 - Zaex + e^2x^2$$

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ดังนั้น $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงรี

ในทางกลับกันถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงรีซึ่งมี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $\frac{|F_1P|}{|RP|} = e$

จากทฤษฎีบทนี้ จะนิยามวงรีได้อีกรูปหนึ่ง คือ

นิยาม 5.2.4 วงรีคือเซตของจุดใด ๆ ในระนาบซึ่งอัตราส่วนระหว่างระยะจากจุดใด ๆ ในเซตถึงจุดคงที่กับระยะจากจุดนั้นถึงเส้นตรงคงที่จะเท่ากับค่า e

เส้นตรงคงที่นี้เรียกว่า**เส้นไดเรกตริกซ์**ของวงรี

สำหรับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = \pm\frac{a}{e}$

และสำหรับ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = \pm\frac{a}{e}$

ตัวอย่าง 5.2.3 กำหนดสมการ $25x^2 + 9y^2 = 225$ จงหาพิกัดของจุดยอด จุดโฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์

วิธีทำ จากสมการ $25x^2 + 9y^2 = 225$

หารตลอดด้วย 225 จะได้

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ในที่นี้ $a^2 = 25 \qquad a = 5$

$b^2 = 9 \qquad b = 3$

แกนเอกอยู่บนแกน y

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = 4$$

จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 5)$
จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 4)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = \pm\frac{a}{e}$

$$y = \pm\frac{5}{4/5} = \pm\frac{25}{4}$$

แบบฝึกหัด 5.2

จงหาพิกัดของจุดโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก แกนโท ค่าเยื้องศูนย์กลาง และความยาวเลตัสเรกตัมของวงรีต่อไปนี้

1. $16x^2 + 9y^2 = 144$

2. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. $2x^2 + 3y^2 = 8$

4. $4x^2 \bullet y^2 = 4$

5. $x^2 + 2y^2 = 1$

6. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

7. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

a. $5x^2 + 20y^2 = 100$

จงหาสมการวงรี จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ข้อ 9 - 17

9. จุดโฟกัสที่ $(\pm 5, 0)$ ความยาวแกนโทเท่ากับ 8

10. จุดโฟกัสที่ $(0, \pm 4)$ จุดยอดที่ $(0, \pm 16)$

11. จุดยอดที่ $(0, \pm 2)$ จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $(\pm\frac{3}{2}, 0)$

12. จุดยอดที่ $(\pm 7, 0)$ ค่าเยื้องศูนย์กลาง $\frac{1}{3}$

13. จุดโฟกัสที่ $(0, \pm 2\sqrt{3})$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 2

14. จุดยอดจุดหนึ่งที่ $(0, -6)$ จุดปลายแกนโทจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, 0)$

15. จุดปลายแกนโทคือ $(\pm 5, 0)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งคือ $(4, 0)$

16. ความยาวแกนเอกเท่ากับ 12 ค่าเยื้องศูนย์กลาง $\frac{2}{3}$ แกนเอกทับแกน x

17. ค่าเยื้องศูนย์กลาง $\frac{3}{4}$ จุดโฟกัสที่บนแกน y กราฟผ่านจุด $(4, 6)$

18. จงหาสมการพาราโบลาจุดยอดที่จุดกำเนิด จุดโฟกัสอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$

19. จงหาจุดตัดกันของวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ และ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

20. จงหาสมการวงรีจุดโฟกัสที่ $(0, \pm 4)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = \pm 6$

21. จงหาสมการวงรีจุดปลายแกนโท $(0, \pm 2\sqrt{2})$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = \pm 6$

5.3 **ไฮเพอร์โบลา** (Hyperbola)

นิยาม 5.3.1 ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตไปยังจุดตรึงสองจุดมีค่าคงที่

จุดตรึงเรียกว่าจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า**จุดศูนย์กลาง**ของไฮเพอร์โบลา เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองนี้เรียกว่า**แกน** ของไฮเพอร์โบลา

จุดตัดของไฮเพอร์โบลากับแกนเรียกว่า**จุดยอด**

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า **แกนตามขวาง** (transverse axis)

สมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

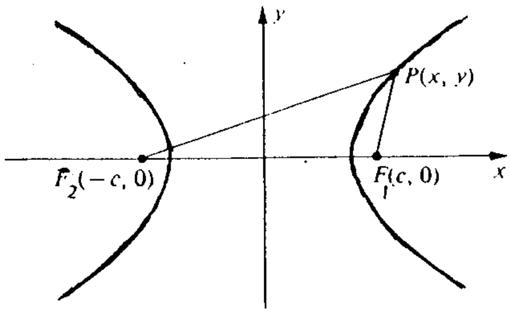
ให้ a เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาถึงจุดยอดจุดหนึ่ง

c เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัสจุดหนึ่ง

5.3.1 **แกนของไฮเพอร์โบลาคือแกน x**

ให้จุดโฟกัสอยู่ที่ $F_1(c,0)$ และ $F_2(-c,0)$ เมื่อ $c > 0$

$P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา



รูป 5.3.1

ให้ผลต่างของระยะจากจุด P ถึงโฟกัสเท่ากับ 2a $(a > 0)$

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

หรือ $$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

เขียนรวมกัน $|PF_2| - |PF_1| = \pm 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ย้ายข้างแล้วยกกำลังสองทั้งสองข้าง ทำวิธีเดียวกับการหาสมการวงรี

จะได้ $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

ผลต่างของด้านของ ΔPF_1F_2 มีค่าน้อยกว่าด้าน F_1F_2

ดังนั้น $2a < 2c$

$$a < c$$

$$a^2 - c^2 < 0$$

ให้ $a^2 - c^2 = -b^2 \ (b > 0)$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

แทนค่า จะได้

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad .....(5.3.1)$$

สมการ (5.3.1) เป็นสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดแกนตามขวางอยู่บนแกน x กราฟของไฮเพอร์โบลาตัดแกน x ที่ ±a แต่กราฟไม่ตัดแกน y กราฟมีสมมาตรกับแกน x แกน y และจุด (0,0) นอกจากนี้ในการเขียนกราฟของ (5.3.1) จะพิจารณาถึงขอบเขตและเส้นกำกับ

ขอบเขต

จากสมการ (5.3.1) จัดใหม่จะได้

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

และ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

จะเห็นว่า y หาค่าได้เมื่อ $x^2 - a^2 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

และ y เป็นค่าจริงทุกค่าจากสมการ $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$

ดังนั้นขอบเขตของ x คือ $(-\infty,-a] \cup [a,\infty)$

ขอบเขตของ y คือ R

เส้นกำกับ (Asymptotes)

จาก $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}$$

$$= \frac{ab}{bx + ay}$$

เมื่อ $x \to \infty$ และ $y \to \infty$ ค่า $\frac{ab}{bx + ay}$ เข้าใกล้ 0

นั่นคือ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$

เส้นตรง $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ ควรจะเป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

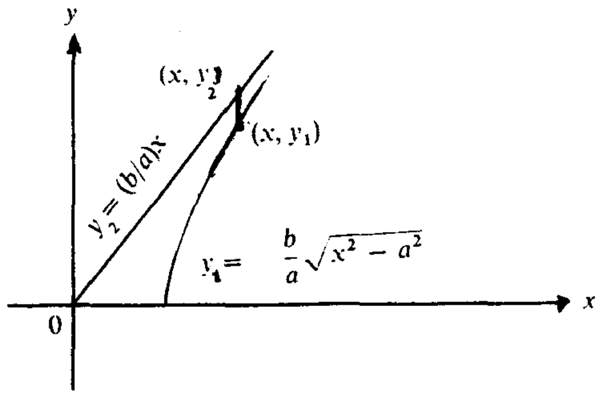
ให้ $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ และ $y_2 = \frac{b}{a}x$

จะได้ $\lim\limits_{x\to\infty}(y_2 - y_1) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x - \sqrt{x -a})(x + \sqrt{x -a})}{x + \sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= 0$$



รูป 5.3.2

ดังนั้นเส้นตรง $y = \frac{b}{a}x$ เป็นเส้นกำกับของกราฟ $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

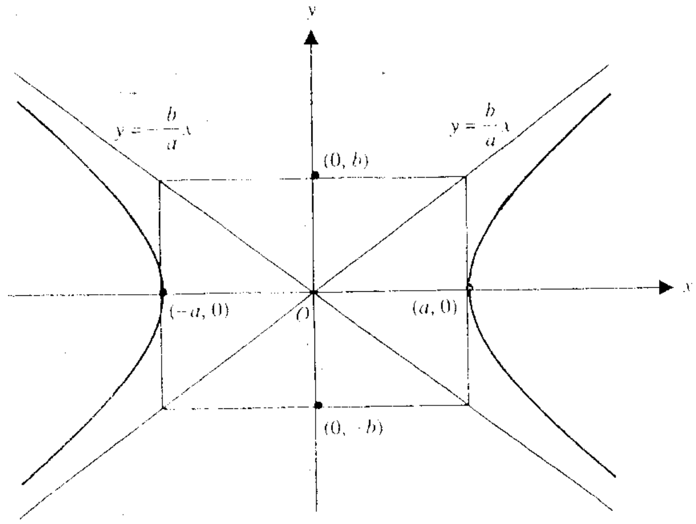
ในทำนองเดียวกัน $y = -\frac{b}{a}x$ เป็นเส้นกำกับของกราฟ $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

ดังนั้นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$

หรือหาได้จากสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ นั่นเอง

ในการเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา จะกำหนดจุดยอด $(\pm a, 0)$ บนแกน x ก่อน และ $(0, \pm b)$ บนแกน y แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อต่อเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกไปจะได้เส้นกำกับซึ่งมีความชัน

$\pm\frac{b}{a}$ แล้วจึงเขียนเส้นโค้งไฮเพอร์โบลา ดังรูป



รูป 5.3.3

นิยาม 5.3.2 ส่วนของเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด (0, b) และ (0, -b) เรียกว่า**แกนสังยุค** (conjugate axis) ของไฮเพอร์โบลา

a เรียกว่าครึ่งแกนตามขวาง

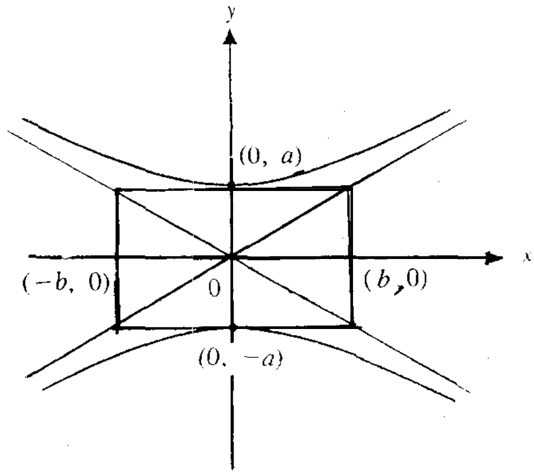
b เรียกว่าครึ่งแกนสังยุค

5.3.2 **แกนของไฮเพอร์โบลาคือแกน y**

ให้จุดโฟกัสทั้งสองคือ $F_1(0,c)$ และ $F_2(0,-c)$ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 5.3.1 จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

สมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{a}{b} x$



รูป 5.3.4

นิยาม 5.3.3 เลตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$ เนื่องจาก $c > a$ ดังนั้นสำหรับไฮเพรอ์โบลา $e > 1$

นิยามของไฮเพอร์โบลาอีกรูปหนึ่งในทำนองเดียวกับวงรีคือ

นิยาม 5.3.4 ไฮเพอร์โบลาคือเซตของจุดใด ๆ ในระนาบซึ่งอัตราส่วนของระยะจากจุดใด ๆ ในเซตถึงจุดคงที่กับระยะจากจุดนั้นถึงเส้นตรงคงที่เท่ากับค่า e เส้นตรงคงที่นี้เรียกว่า **เส้นไดเรกตริกซ์**

สำหรับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = \pm \frac{a}{e}$

และสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = \pm \frac{a}{e}$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงเขียนกราฟของ $5x^2 - 4y^2 = 20$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

ในที่นี้ $a^2 = 4$ $\quad a = 2$

$b^2 = 5$ $\quad b = \sqrt{5}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

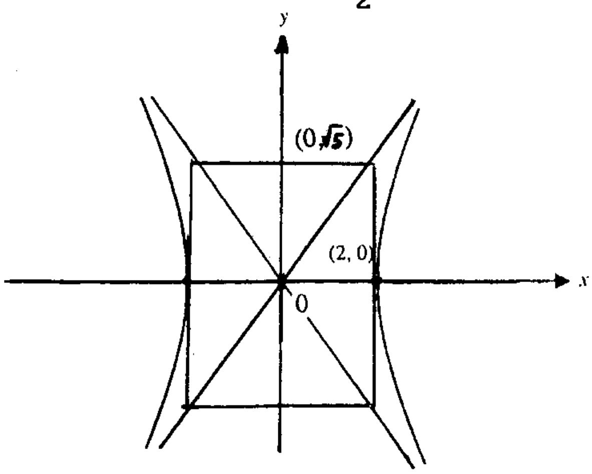
$$= \sqrt{4 + 5} = 3$$

จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 2, 0)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 3, 0)$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

สมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$



รูป 5.3.5

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจุดยอดที่ $(0, \pm 4)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ

$$y = \pm\frac{8}{3}$$

วิธีทำ จากจุดยอดทำให้ทราบว่าสมการคือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ในที่นี้ $a = 4$

สมการไดเรกตริกซ์ $y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{8}{3}$

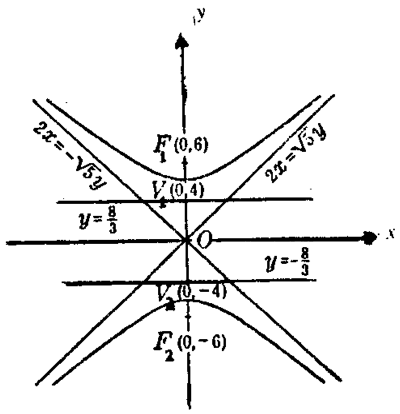
$$e = \frac{3a}{8} = \frac{3}{2}$$

$$c = ae = (4)(\frac{3}{2}) = 6$$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{36 - 16}$$
$$= \sqrt{20}$$

สมการคือ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$



รูป 5.3.6

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจุดยอดที่ (±8, 0) และจุดโฟกัสที่ (±10, 0) และหาสมการเส้นกำกับด้วย

วิธีทำ จากจุดยอดทำให้ทราบว่าสมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ในที่นี้ $a = 8$, $c = 10$

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 10^2 - 8^2$$
$$= 100 - 64 = 36$$

สมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

สมการเส้นกำกับหาจาก $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 0$

$$y^2 = \frac{36}{64} x^2$$

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาพิกัดของจุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง แกนสังยุค ค่าเยื้องศูนย์กลางของสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

1. $x^2 - y^2 = 1$

2. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

3. $4x^2 - 9y^2 = 36$

4. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{49} = 1$

5. $3x^2 - 5y^2 = 15$

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

6. จุดโฟกัสที่ $(\pm 5, 0)$ จุดยอดที่ $(\pm 4, 0)$

7. จุดยอดที่ $(0, \pm 3)$ ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 8

8. จุดโฟกัสที่ $(0, \pm 8)$ ค่าเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ 2

9. จุดโฟกัสที่ $(\pm 10, 0)$ ความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 10

10. จุดยอดที่ $(0, \pm 3)$ กราฟผ่านจุด $(2, 7)$

11. จุดยอดที่ $(\pm 8, 0)$ สมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{3}{4}x$

12. จุดโฟกัส $(0, \pm 4)$ สมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$

13. ค่าเยื้องศูนย์กลาง $\frac{5}{4}$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{9}{2}$ แกนตามขวางคือแกน y

14. แกนสังยุคยาว 7 กราฟผ่านจุด $(3,-2)$ แกนตามขวางคือแกน x

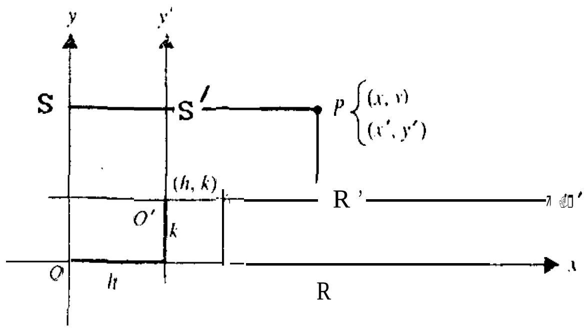
15. จุดโฟกัสที่ $(2\sqrt{5}, 0)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

16. ค่าเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\sqrt{3}$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

5.4 การเลื่อนแกนทางขนาน (Translation of Axes)

ระบบพิกัดฉากมีแกน x แกน y ตัดตั้งฉากกันที่จุดกำเนิด O ถ้าต้องการเลื่อนแกนโดยให้แกนพิกัดขนานแกนพิกัดเดิม จุดกำเนิดใหม่คือ O' และแกนพิกัดใหม่คือ x' และ y'

ถ้า P เป็นจุดในระนาบมีพิกัด (x,y) เมื่อเทียบกับแกนเดิมและมีพิกัด (x',y') เมื่อเทียบกับแกนใหม่



รูป 5.4.1

$0'$ **มีพิกัดเป็น (h,k) จาก P ลากเส้นขนานแกน x และแกน y ตัดแกนที่จุด R และ S ตามลำดับ และตัดแกน x' และ y' ที่ R' และ S' ตามลำดับ**

$$PS = PS' \bullet \cdot\cdot'$$

และ $PR = PR' + RR'$

นั่นคือ $x = x' + h$ **และ** $y = y' + k$

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

ตัวอย่างที่ 5.4.1 **1. จงหาพิกัดของจุด (3,-1) และ (-2,4) เมื่อเทียบกับแกนใหม่ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุดกำเนิดใหม่ (-1,3)**

2. จงหาจุดกำเนิดใหม่เมื่อเลื่อนแกนทางขนานของสมการ $x^2 + 4x + y^2 = 5$ **ถ้าต้องการสมการในรูป** $(x')^2 + (y')^2 = r^2$

วิธีทำ **1. ให้ (x,y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนเดิม (x',y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนใหม่**

จะได้ $x' = x - h$, $y' = y - k$

$x' = x - (-1)$, $y' = y - 3$

จุด $(3,-1)$ **จะได้** $(x',y') = (4,-4)$

จุด $(-2,4)$ **จะได้** $(x',y') = (-1,1)$

2. $x^2 + 4x + y^2 = 5$

$(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 5 + 4$

$(x + 2)^2 + y^2 = 9$

จุดกำเนิดใหม่ของกราฟคือ $(-2,0)$

ตัวอย่าง 5.4.2 จงพิจารณากราฟของสมการ $y^2 - 4y + 6x + 1 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 4y + 6x + 1 = 0$

$$y^2 - 4y + 4 = -6x - 1 + 4$$

$$(y - 2)^2 = -6(x - \frac{1}{2})$$

ให้ $x' = x - \frac{1}{2}$ $\quad y' = y - 2$

สมการคือ $(y')^2 = -6x'$

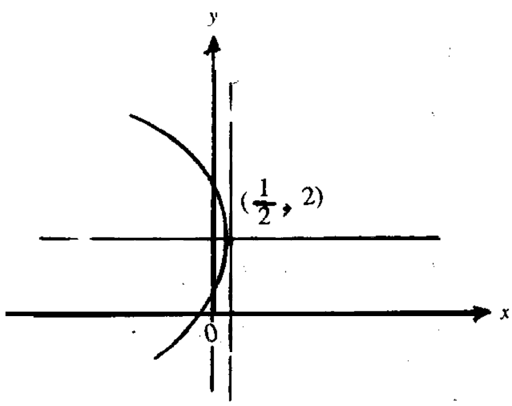
เป็นสมการพาราโบลาจุดยอดที่ $(\frac{1}{2}, 2)$

รูปเปิดด้านซ้าย เทียบกับสมการ $y^2 = 4ax$

$$4a = -6$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 2) = (-1,2)$



รูป 5.4.2

ตัวอย่าง 5.4.3 จงวิเคราะห์สมการ $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$

วิธีทำ โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

$$9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

$$9(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$$

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

ให้ $x' = x + 2$

$y' = y - 1$

จะได้สมการ $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1$

เป็นสมการวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 1)$ แกนเอกขนานแกน y

แบบฝึกหัด 5.4

จงวิเคราะห์สมการต่อไปนี้ ว่าเป็นกราฟชนิดใด จุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่ใด

1. $x^2 - 4x + 3y = 0$
2. $y^2 - 6x - 4y + 22 = 0$
3. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
5. $x^2 - 4y^2 + ax + 24y - 20 = 0$
6. $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y +$ [illegible]
7. $2y = x^2 + ax + 22$

a. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

9. $x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 79 = 0$
10. $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$