

บทที่ 4

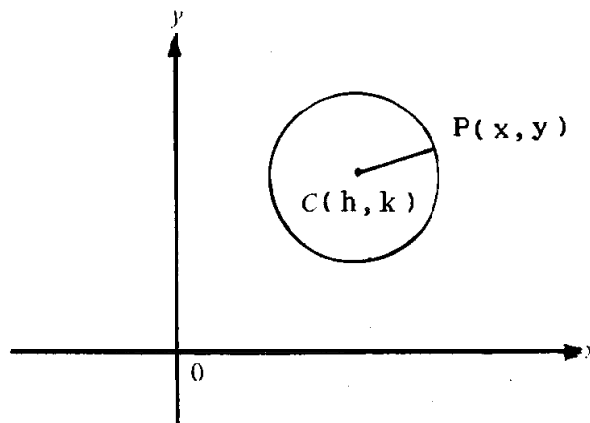
วงกลม

(Circle)

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงโลโก้ของจุดตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งจะ
ได้สมการของโลโก้ต่าง ๆ ถ้าพิจารณาถึงโลโก้ของจุดทั้งหลายในระนาบซึ่งอยู่
ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน โลโก้ของจุดเหล่านั้นก็คือวงกลม
นั่นเอง

4.1 สมการของวงกลม Equation of a circle)

นิยาม 4.1.1 วงกลม คือเซตของจุดทั้งหลายในระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึง
จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่
จุดตรึง เรียกว่าจุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม
ระยะทางคงที่ เรียกว่ารัศมี (radius) ของวงกลม
กำหนดให้ $C(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีรัศมี
 r และ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม



รูป 4.1.1

จะได้ $|CP| = r$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \dots\dots(4.1.1)$$

สมการ (4.1.1) เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมี r ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมี r สมการคือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, \frac{1}{3})$

และมีรัศมี 2

วิธีทำ สมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

ในที่นี้ $h = -2, k = \frac{1}{3}, r = 2$

จะได้ $(x - (-2))^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = 2^2$

$$(x + 2)^2 + \left(\frac{3y - 1}{3}\right)^2 = 4$$

$$9(x^2 + 4x + 4) + (9y^2 - 6y + 1) = 36$$

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 6y + 109 = 0$$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม ซึ่งมีสมการ

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

วิธีทำ จัดสมการที่กำหนดให้ใหม่ให้เทอม x และ y อยู่ในรูปกำลังสอง

$$\text{สมบูรณ์} \quad (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 4 + 4 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

สมการวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 1)$ รัศมี 3

4.2 สมการทั่วไปของวงกลม

จากสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

หรือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \dots\dots(4.2.1)$

เมื่อ $D = -2h, E = -2k$ และ $F = h^2 + k^2 - r^2$

สมการ (4.2.1) เรียกว่า สมการทั่วไปของวงกลม

ในการพิจารณาว่าสมการใด ๆ ที่อยู่ในรูป (4.2.1) จะเป็นสมการวงกลมหรือไม่ จะใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์เพื่อหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมดังนี้

จาก $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

$$\left(x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right) = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad \dots\dots(4.2.2)$$

สมการ (4.2.2) เป็นสมการวงกลมหรือไม่ขึ้นอยู่กับค่า

$\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$ จึงแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ จะได้ $\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ เป็นจำนวนจริงดังนั้นสมการ (4.2.2) เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง

กลางที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

กรณีที่ 2 ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$ สมการ (4.2.2) คือ

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

จะเห็นว่ามิต่ำ $x = -\frac{D}{2}$ และ $y = -\frac{E}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ทำให้

สมการเป็นจริง ดังนั้นกราฟของวงกลมมีจุด $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ เพียงจุดเดียว

เรียกว่า วงกลมจุด (point circle)

กรณีที่ 3 ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ จะเห็นว่าทางขวามือของ
(4.2.2) มีค่าเป็นลบ จึงไม่มีค่าจริงของ x และ y ที่คล้อยตามสมการ
(4.2.2) ดังนั้นสมการไม่มีกราฟ

ข้อสังเกต สมการในรูปของ $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ
 $A \neq 0$ สามารถเขียนในรูปของ (4.2.2) โดยหารตลอดด้วย A

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

ซึ่งสามารถบอกได้ว่ากราฟของสมการเป็นวงกลม วงกลมจุดหรือไม่มีกราฟ

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(-1, 3)$ และมีจุดศูนย์กลาง
กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$

ในที่นี้ $D = 4, E = 2, F = -6$

$$D^2 + E^2 - 4F = 16 + 4 + 24 = 44 > 0$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = (-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}) = (2, -1)$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

วงกลมผ่าน $(-1, 3)$ ดังนั้น $(-1 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = r^2$

$$r^2 = 9 + 16 = 25$$

สมการคือ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

ตัวอย่าง 4.2.2 จงหาค่า k ที่ทำให้ $2x^2 + 2y^2 + 12x - 16y + k = 0$
เป็นสมการวงกลม

วิธีทำ $2x^2 + 2y^2 + 12x - 16y + k = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + \frac{k}{2} = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = -\frac{k}{2} + 9 + 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = -\frac{k}{2} + 25$$

สมการนี้เป็นวงกลมเมื่อ $-\frac{k}{2} + 25 > 0$

นั่นคือ $k < 50$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาสมการวงกลมตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางที่ $(-3, -3)$ รัศมี 3

1.2 จุดศูนย์กลางที่ $(0, 5)$ รัศมี 5

1.3 จุดศูนย์กลางที่ $(-4, 2)$ และผ่านจุดกำเนิด

1.4 จุดศูนย์กลางที่ $(6, -5)$ และผ่านจุด $(2, -3)$

1.5 มีจุด $(0, 0)$ และ $(6, -4)$ เป็นจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลาง

1.6 มีจุด $(-3, -4)$ และ $(4, 3)$ เป็นจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลาง

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

2.1 $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$

2.2 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

2.3 $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

2.4 $x^2 + y^2 - 4x + ay + 11 = 0$

$$2.5 \quad 3x^2 + 3y^2 - 6x + 5y = 0$$

$$2.6 \quad 4x^2 + 4y^2 - 3x + 5y - 6 = 0$$

3. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5 - k$

3.1 เป็นวงกลม

3.2 เป็นวงกลมจุด

3.3 ไม่มีกราฟ

4. จงหาสมการวงกลมผ่านจุด $(5, 8)$ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 2 = 0$$

5. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้ เป็นวงกลม วงกลมจุดหรือไม่มีกราฟ

$$5.1 \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

$$5.2 \quad x^2 + y^2 + 8y = 0$$

$$5.3 \quad x^2 + y^2 - \square = \square$$

$$5.4 \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

$$5.5 \quad x^2 + y^2 - 18x - 4y - 5 = 0$$

6. จงหาจุดตัดกันของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$ และ

$$x^2 + y^2 - 2x - ay + 4 = 0$$

4.8 สมการวงกลมตามเงื่อนไข

ถ้ากำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ มาให้ เราจะหาสมการวงกลมจากสมการ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

หรือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

การจะใช้สมการรูปใด ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่กำหนดให้ เช่นถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีมาให้ก็ควรใช้สมการแรก แต่ถ้ากำหนดจุดให้ 3 จุด ก็ควรจะใช้สมการหลัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด $(3, -1)$, $(1, 1)$ และ $(-1, -2)$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

จุด $(3, -1)$ อยู่บนวงกลม จะได้

$$9 + 1 + 3D - E + F = 0$$

หรือ $3D - E + F = -10$

จุด $(1, 1)$ อยู่บนวงกลมจะได้

$$1 + 1 + D + E + F = 0$$

หรือ $D + E + F = -2$

จุด $(-1, -2)$ อยู่บนวงกลมจะได้

$$1 + 4 - D - 2E + F = 0$$

$$-D - 2E + F = -5$$

แก้สมการทั้ง 3 จะได้ $D = -\frac{9}{5}$, $E = \frac{11}{5}$, $F = -\frac{12}{5}$

สมการวงกลมคือ $5x^2 + 5y^2 - 9x + 11y - 12 = 0$

หมายเหตุ การแก้สมการอาจจะใช้วิธีของเครมเมอร์ (Cramer's Rule)

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

ให้ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

จะได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

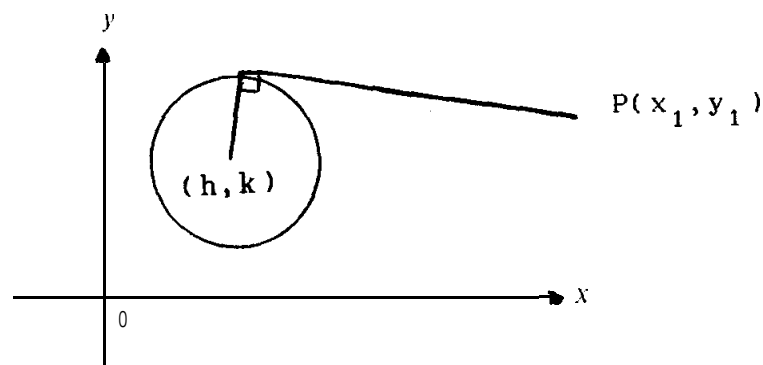
และ

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

ข้อควรทราบเกี่ยวกับวงกลม

1. เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส
2. ความยาวเส้นสัมผัสจากจุด $P(x_1, y_1)$ ไปยังวงกลม
 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\text{เท่ากับ } \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$$

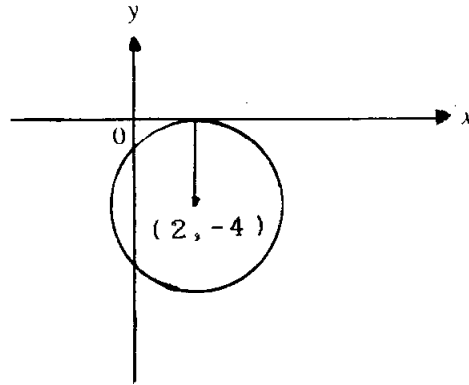


รูป 4.3.1

3. ถ้าสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ความยาว
เส้นสัมผัสจากจุด

$$P(x_1, y_1) \text{ ไปยังวงกลมเท่ากับ } \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(2, -4)$ และสัมผัสแกน x
วิธีทำ จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ในที่นี้รัศมีเท่ากับ 4
สมการคือ $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4^2 = 16$



รูป 4.3.2

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 3)$ และสัมผัส
กับเส้นตรงซึ่งมีสมการ $2x - y = 5$

วิธีทำ จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
ในที่นี้ $(h, k) = (-1, 3)$
 r หาจากระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นสัมผัส

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r = \frac{|2(-1) - (3) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{1-101}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

สมการวงกลมคือ $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (2\sqrt{5})^2$
 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาความยาวเส้นสัมผัสจากจุด $(-1, 3)$ ไปยังวงกลม
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

วิธีทำ ความยาวเส้นสัมผัส = $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 + 10}$
 $= \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 - 2(-1) - 4(3) + 10}$
 $= \sqrt{10}$

ตัวอย่าง 4.3.5 จงหาสมการวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $3x + y = 0$
 และผ่านจุด $(2, -2)$ และ $(6, 2)$

วิธีทำ ในที่นี้ใช้สมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
 วงกลมผ่าน $(2, -2)$ จะได้ $(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2$
 และผ่าน $(6, 2)$ จะได้ $(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2$
 $(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = (6 - h)^2 + (2 - k)^2$
 $h + k - 4 = 0$

เพราะว่าวงกลมสัมผัสเส้นตรง $3x + y = 0$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง (h, k) และเส้นตรง

$3x + y = 0$ เท่ากับ

$$\frac{3h + k}{\sqrt{10}} = \pm r$$

แทนค่า r ในสมการ $(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2$

$$h^2 + k^2 - 4h + 4k + 8 = \frac{(3h + k)^2}{10}$$

$$10h^2 + 10k^2 - 40h + 40k + a_0 = 9h^2 + 6hk + k^2$$

$$h^2 + 9k^2 - 6hk - 40h + 40k + a_0 = 0$$

แทนค่า $h = -k + 4$ ในสมการ จะได้

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$k = 1, -4$$

และ $h = 3, 8$

และ $r = \sqrt{10}, 2\sqrt{10}$

สมการคือ $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{10})^2$

และ $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = (2\sqrt{10})^2$

หรือ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 4 = 0$

และ $x^2 + y^2 - 16x + 8y + 40 = 0$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาสมการผ่านจุดสามจุดที่กำหนดให้

1.1 $(0, 0), (4, 0), (3, 1)$

1.2 $(3, -1), (5, 3), (6, 2)$

1.3 $(1, 5), (3, 1), (-2, 2)$

1.4 $(-1, -3), (-2, 4), (2, 1)$

1.5 $(1, 2), (-3, 1), (4, -2)$

2. จงหาสมการวงกลมตามเงื่อนไขต่อไปนี้

2.1 ผ่านจุดกำเนิด จุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$

2.2 ผ่านจุด $(-3, 4)$ และสัมผัสแกนพิกัดทั้งสอง

2.3 ผ่านจุด $(-1, 1)$ และ $(1, 3)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $x + 3y = 0$

2.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, 5)$ และสัมผัสเส้นตรง $4x + 3y - 5 = 0$

2.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(6, -3)$ และสัมผัสเส้นตรง $5x - 12y - 24 = 0$

2.6 สัมผัสแกน x และผ่านจุด $(7, -4)$ และ $(3, -8)$

2.7 ผ่านจุด $(2, 1)$ และ $(-3, 2)$ และมีจุดศูนย์กลางบนเส้นตรง $y = 3x$

3. จงแสดงว่าความยาวของเส้นสัมผัสจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังวงกลม

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ เท่ากับ } \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

4. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ ที่จุด $(-3, 1)$

5. จงหาจุดตัดกันของเส้นตรง $2y - x = 4$ และวงกลม $5x^2 + 5y^2 - 30x - 20y + 56 = 0$

6. จงหาสมการวงกลม ซึ่งบรรจุดอยู่ในสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามดังนี้

6.1 $x + y = 0, x - 7y + 24 = 0, 7x - y - 8 = 0$

6.2 $2x + 3y - 7 = 0, 7x - 2y + 13 = 0, x - y - 1 = 0$

6.3 $x + y - 1 = 0, 3x + y - 5 = 0, 2x + y - 4 = 0$

7. จงหาค่า m ซึ่งทำให้เส้นตรง $y = mx + 2$ สัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$

8. จงหาความยาวเส้นสัมผัสจากจุด $(5, 3)$ ไปยังวงกลม $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

9. ถ้าความยาวของเส้นสัมผัสจากจุด $(4, 5)$ ไปยังวงกลม $x^2 + y^2 + 2gx = 0$ เท่ากับ 3 จงหาค่า g

10. ความยาวของเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ จากจุด $(2, 3)$ และ $(-2, 4)$ เท่ากับ 5 และ 2 ตามลำดับ จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

4.4 ระบบวงกลม (Systems of Circles)

ในที่นี้จะศึกษาถึงสมการของวงกลม ที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง
ซึ่งมีสมการ

$$S_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad \dots\dots(4.4.1)$$

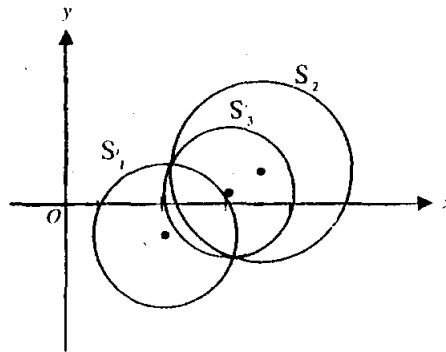
$$S_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad \dots\dots(4.4.2)$$

ให้ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาสมการ

$$(x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1) + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 \quad \dots\dots(4.4.3)$$

เรียกสมการ (4.4.3) ว่าเป็น ระบบวงกลมที่ผ่านจุดตัดของวงกลม (4.4.1) และ (4.4.2)



รูป 4.4.1

ถ้า $k \neq -1$ สมการ (4.4.3) จะเป็นสมการวงกลมที่ผ่านจุดตัดของวงกลมทั้งสอง เพราะว่าจากสมการ (4.4.3) จะได้

$$(k + 1)(x^2 + y^2) + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0$$

หารตลอดด้วย $k + 1$ จะได้

$$x^2 + y^2 + \frac{(D_1 + kD_2)x}{k + 1} + \frac{(E_1 + kE_2)y}{k + 1} + \frac{F_1 + kF_2}{k + 1} = 0$$

$$3 \times (4.3.3) - 2 \times (4.4.4) \text{ จะได้}$$
$$10y - 3 = 0$$

