บทที่ 3
สมการและกราฟ
(Equations and Graphs)

ในบทที่แล้วเราได้พิจารณาสมการในบางกรณีของ x และ y ซึ่งเราอาจเขียนให้อยู่ในแบบทั่วๆไปว่า

$$Ax + By + C = 0$$

ในบทนี้เราจะได้ศึกษาเกี่ยวกับกราฟของสมการที่ยุ่งยากกว่าของ x และ y โดยเฉพาะอย่างยิ่งเราจะพิจารณาความเป็นไปของกราฟของสมการ

3.1 กราฟของสมการ (The graph of an Equation)

นิยาม 3.1.1 กราฟของสมการของ x และ y คือจุด P(x,y) ทั้งหมดในระนาบพิกัดซึ่งมีพิกัดคล้องตามสมการ

ตัวอย่าง 3.1.1 สำหรับสมการ

$$y = x^2 - 4$$

และจุด P(a,b) เป็นจุดในระนาบพิกัด พิกัด (a,b) ของจุด P เรียกว่าคล้องตามสมการก็ต่อเมื่อ

$$b = a^2 - 4$$

พิกัดของจุด P(3,5)คล้องตามสมการเพราะว่า

$$5 = 3^2 - 4$$

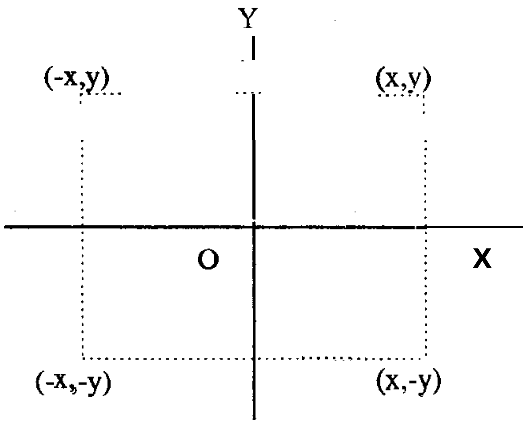
และพิกัดของจุด Q(4,11) ไม่คล้องตามสมการเพราะว่า

$$11 \neq 4^2 - 4$$

ตามตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าจุด P(3,5) อยู่บนกราฟของสมการที่กำหนดให้ แต่จุด Q(4,11) ไม่ได้อยู่บนกราฟของสมการที่กำหนดให้

3.2 สมมาตร (Symmetry)

จุดสองสมมาตรกันเมื่อเทียบกับเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งและตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ต่อจุดทั้งสอง ดังนั้นเราจึงได้ว่าจุดสองจุดสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน X ก็ต่อเมื่อจุดทั้งสองนั้นมีพิกัด (x,y) และ (x,-y) หรือ (-x,y) และ (-x,-y) และ ในทำนองเดียวกันจุดสองจุดสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน Y ก็ต่อเมื่อ จุดทั้งสองมีพิกัด (x,y) และ (-x,y) หรือ (x,-y) และ (-x,-y) จุด (x,-y) เป็นภาพ (image) ของ (x,y) บนแกน X



รูป 3.2.1

3.3 สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน X

เส้น (curve) เส้นใดเส้นหนึ่งจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน X ก็ต่อเมื่อสมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ y ถูกแทนด้วย -y

3.4 สมมาตรเมื่อเทยบกับแกน Y

เส้นๆเส้นหนึ่งจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน Y ก็ต่อเมื่อสมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ x ถูกแทนค่าด้วย -x

3.5 สมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเหนิด

เส้นๆเส้นหนึ่งจะสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเหนิดก็ต่อเมื่อสมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ x ถูกแทนค่าด้วย -x และ y ถูกแทนค่าด้วย -y

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแสดงว่าจุดที่กำหนดให้อยู่บนเส้นที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้หรือไม่

   1.1 (0,1), (-2,-11), (4,48), (-1,4); $y - 3x^2 - 1 = 0$

   1.2 (1,1), $(-3,\frac{1}{3})$, $(0,\frac{1}{2})$, $(9,\frac{5}{9})$; $2xy - 1 = x$

   1.3 (1,2), $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$, (-7,-1); $5x - x^2 = 3xy - y^2 + 2$

   1.4 (1,-2), (-1,1), (-1.8,3), $(\frac{1}{8},-\frac{1}{2})$; $y^2 + 2xy - x = 0$

   1.5 (0,1), (-2,3), $(\frac{2\sqrt{14}}{3},8)$, (2,5); $x^2 + x^2y + y = y^2$

   1.6 $(\sqrt[3]{3},0)$, (2,-1), (1,1), (-2,-3); $y^2 + 3 = x^3 + 3xy$

2. จงหาค่าคงที่ k, A, B ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 จุด (1,4) อยู่บนเส้นซึ่งมีสมการเป็น

   $$2y = x^2 + k$$

   2.2 จุด (2,-3) อยู่บนเส้นซึ่งมีสมการเป็น

   $$3x^2 + ky^2 = 30$$

   2.3 จุด (-1,4) และ (2,-7) อยู่บนเส้นซึ่งมีสมการเป็น

   $$Ax^2 + By^2 = 1$$

   2.4 จุด (1,-1) และ (-2,3) อยู่บนเส้นซึ่งมีสมการเป็น

   $$x^3 + Axy = By^2 + 5$$

3. จงหาจุดที่เป็นภาพ ของจุดบนเส้นหรือจุดที่กำหนดให้

   3.1 จุด (-1,4), (-3,-7), (2,4), (1,-3) สมมาตร

   3.1.1 บนแกน x 3.1.2 บนแกน Y

   3.1.3 บนจุดกำเนิด

   3.2 จุด (1,5) สมมาตร บนเส้น

   3.2.1 $x = 0$ 3.2.2 $y = 0$

3.2.3 $x = 3$ 3.2.4 $y = 2$

3.2.5 $x = y$

3.3 จุด (-3,9) สมมาตร บนเส้น

3.3.1 $x = 0$ 3.3.2 $y = 0$

3.3.3 $x = -5$ 3.3.4 $y = 8$

3.3.5 $y = -x$

3.4 จุด (4,7) สมมาตรบนจุด

3.4.1 (0,0) 3.4.2 (4,2)

3.4.3 (3,7) 3.4.4 (-1,1)

3.4.5 (7,-1)

3.5 จุด (-1,5) สมมาตรบนจุด

3.5.1 (0,0) 3.5.2 (1,5)

3.5.3 (-2,1) 3.5.4 (1,-7)

3.5.5 (-3,-1)

3.6 จุด (-1,-2) สมมาตรบนจุด

3.6.1 (0,0) 3.6.2 (2,-2)

3.6.3 (-1,3) 3.6.4 (1,4)

3.6.5 (5,-1)

4. จงหาสมมาตรของเส้นที่มีสมการดังต่อไปนี้

4.1 $4x^2 + 9y = 0$ 4.2 $y = (x - 1)^2$

4.3 $y = 7x^3$ 4.4 $3x^2 + 4y^2 = 1$

4.5 $x^2 - xy^2 = 1 - x$ 4.6 $3x^3y^2 = y - x^4$

4.7 $y^2 = 3xy + x^2$ 4.8 $xy - x^3 = 4xy^2$

4.9 $3 - x^2 - t\, y^2 = x^2y^2$ 4.10 $2x^2 + 4y^2 + xy = 4$

4.11 $x^3 - x = y^3 - x + 1$ 4.12 $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4 + x^2y^2$

4.13 $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 16x^4$ 4.14 $x + y = 3x^2y$

5. จงพิสูจน์ว่า

5.1 เส้นที่มีสมการเป็น $y = 2x - x^2$ สมมาตรบนเส้น $x = 1$

5.2 เส้นที่มีสมการเป็น $y^2 - 4y - x + 3 = 0$ สมมาตรบนเส้น $y = 2$

5.3 เส้นที่มีสมการเป็น $xy = 1$ สมมาตรบนเส้น $y = x$

5.4 เส้นที่มีสมการเป็น $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ สมมาตรบนจุด (1,0)

3.6 การตัดกันของเส้นตรงสองเส้น (The intersection of Curves)

ถ้ากำหนดสมการของเส้นสองสมการให้จุดตัดของเส้นทั้งสองนั้น คือ จุดที่มีพิกัดคล้องตามสมการทั้งสองที่กำหนดให้ ดังนั้นการหาจุดตัดของเส้นทั้งสองก็คือการแก้สมการของเส้นทั้งสองเพื่อหาค่า x และ y นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.6.1 จงหาจุดตัดของไฮเปอร์โบลา(hyperbola) ซึ่งมีสมการเป็น

$$xy = 4$$

กับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

$$x - y - 3 = 0$$

วิธีทำ จากสมการของเส้นตรงเราได้

$$y = x - 3$$

แทนค่า $y = x - 3$ ในสมการของไฮเปอร์โบลา เราก็จะได้

$$x(x - 3) = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x + 1)(x - 4) = 0$$

$\therefore$ $x = -1$ หรือ 4

ถ้า $x = -1$ เราได้

$$y = -1 - 3$$

$$= 4$$

ถ้า $x = 4$ เราได้

$y = 4 - 3$

$= 1$

นั่นคือ ไฮเปอร์โบลา $xy = 4$ ตัดกับเส้นตรง $x - y - 3 = 0$ ที่ $(-1,-4)$ และ $(4,1)$

หมายเหตุ เราอาจทดสอบดูได้ว่าจุดเหล่านี้เป็นไปตามสมการที่กำหนดให้ทั้งสองหรือไม่

แบบฝึกหัด 3.2

จงหาจุดตัดของเส้นแต่ละคู่ต่อไปนี้

1. $y^2 = 4x$

   $x - 2y + 3 = 0$

2. x^2 t $2y^2 = 4$

   $x - y - 1 = 0$

3. $4x^2 - 3y^2 = 1$

   $x - y$ =o

4. $x^2 + y^2 = 11$

   $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

5. $x^2 + y^2 = 5$

   $3x - y = 5$

6. $x^2 + y^2 = 2$

   $x + 2y = 3$

7. $xy + 6 = 0$

   $3x$ t $2y = 2$

8. $x^2 + 3y^2 = 1$

   $y = 2x^2$

9. $y^2 = 4x$

   $y = x + 2$

10. $x^2 + y^2 = 15$

    $2x^2 + y^2 = 24$

11. $4y = x^2 + 6x - 3$

    $y = 1 + x$

12. x t $xy = 7$

    $3xy + y = 16$

13. $x^2 + y^2 = 34$

    $xy = 1$

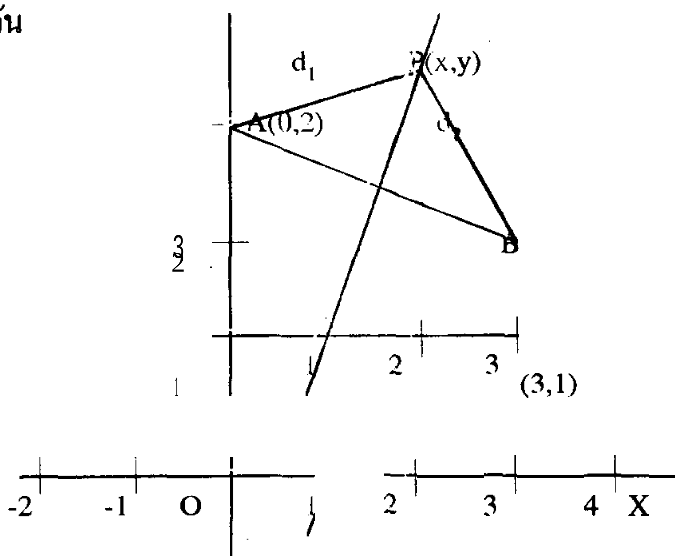
14. $x^2 + 2y^2 = 4$

    $y = x^4$

3.7 สมการของโลกัด (The Equation of a locus)

คำว่า **โลกัส** หมายถึงเส้นทางเดินของจุดตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในระนาบ สมการของโลกัส คือสมการซึ่งมีโลกัสที่กำหนดให้เป็นกราฟของมันนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.7.1 จงหาสมการของโลกัสของจุดที่อยู่ห่างจุด A(0,2) และ B(3,1) เป็นระยะทางเท่ากัน



รูป 3.7.1

วิธีทำ ให้ P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนโลกัส

ดังนั้นจุด P(x,y) ย่อมอยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้เท่ากัน ดังรูป 3.7.1

เราจะได้ $d_1 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

$d_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$

เพราะว่า $d_1 = d_2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,

$x^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$,

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$,

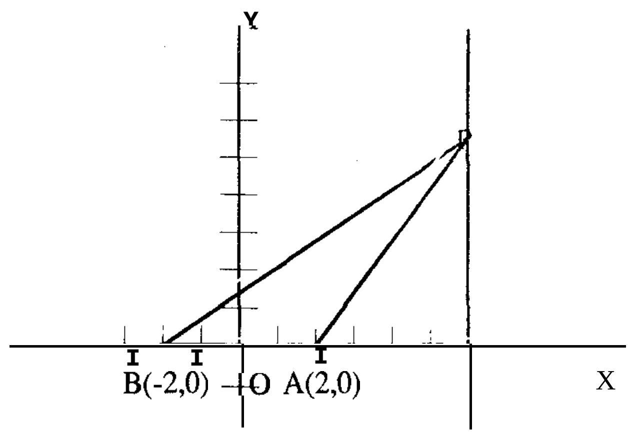
$6x - 2y - 6 = 0$,

$3x - y - 3 = 0$ เป็นสมการของโลกัสที่กำหนดขึ้น

เนื่องจากกราฟของสมการนี้ก็คือโลกัสที่กำหนดขึ้นนั่นเอง นั่นคือจุด P(x,y) ใดๆ ซึ่งเป็นไปตามสมการนี้ก็จะอยู่บนโลกัสที่กำหนดขึ้น จากความรู้ทางเรขาคณิตเราก็จะได้ว่าโลกัสที่กำหนดขึ้นก็คือเส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากของเซกเมนต์ AB นั่นคือเส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากของ AB มีสมการ

$$3x - y - 3 = 0$$

ตัวอย่าง 3.7.2 จงหาสมการของโลกัสของจุด P ทั้งหลายซึ่งทำให้ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด A(2,0) เป็นสองเท่าของความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด B(-2,0)



รูป 3.7.2

วิธีทำ ให้ P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนโลกัส

เนื่องจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ A คือ

$$\frac{y}{x-2} \; ; x - 2 \neq 0$$

และความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ B คือ

$$\frac{y}{x+2} \; ; x + 2 \neq 0$$

ดังนั้น $\frac{y}{x-2} = 2\frac{y}{x+2} \; ; x \neq \pm 2$

$\therefore\ y(x - 6) = 0 \; ; x \neq \pm 2$

เส้น $y(x - 6) = 0 \; ; x \neq \pm 2$ เป็นโลกัสที่กำหนดขึ้นตามต้องการและกราฟของ

สมการ

$y(x - 6) = 0$

ประกอบด้วยเส้นตรง

$y = 0$ ยกเว้นที่ $x = \pm 2$ หรือ

$x = 6$

นั่นคือโลกัสที่กำหนดขึ้นจึงอยู่บนเส้นตรงทั้งสองยกเว้นจุด A(2,0) และ B(-2,0)

แบบฝึกหัด 3.8

1. จงหาสมการของโลกัสของจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 ห่างจากจุด (-1,2) 3 หน่วย

1.2 ห่างจากจุด (-5,1) และ (5,-3)เท่ากัน

1.3 ห่างจากจุด (4,2) และแกน Y เท่ากัน

1.4 สองเท่าของระยะห่างจากจุด (-1,0) เท่ากับระยะห่างจากจุด (2,0)

1.5 ห่างจากจุด (0,2) และแกน X เท่ากัน

1.6 ห่างจากเส้นคู่ขนาน $3x - 2y + 4 = 0$ และ $3x - 2y - 8 = 0$ เท่ากัน

1.7 ห่างจากจุด (-2,3) 4 หน่วย

1.8 ห่างจากจุด (-3,1) และ (7,5) เท่ากัน

1.9 ห่างจากจุด (3,2) เป็นครึ่งหนึ่งของระยะห่างจากจุด (-1,3)

1.10 ห่างจากจุด (2,3) และเส้น $x + 2 = 0$ เท่ากัน

1.11 สองเท่าของระยะห่างจากจุด (0,4) เท่ากับระยะห่างจากเส้น $y = 2$

1.12 สี่เท่าของระยะห่างจากแกน X เท่ากับระยะห่างจากจุด (0,-2)

1.13 ผลบวกของระยะห่างจากจุด (c,0) และ (-c,0) เป็น 2a เมื่อ 2a > 2c

1.14 ผลบวกของระยะห่างจากจุด (2,3) และ (2,-3) เป็น 8 หน่วย

1.15 จุดกึ่งกลางของ AB ของสามเหลี่ยม AOB เมื่อ A เป็นจุดอยู่บนแกน X, B เป็นจุดอยู่บนแกน Y และ O เป็นจุดกำเหนิด

1.16 ผลต่างของระยะห่างจากจุด (3,2) กับ (-5,2) เป็น 6 หน่วย

1.17 ห่างจากเส้น $y + 4 = 0$ เป็นสองในสามของระยะห่างจากจุด (3,2)

1.18 ความชันของเส้นที่ต่อจุด P กับจุดกำเหนิดเป็นครึ่งหนึ่งของความชันของเส้นที่ต่อจุด P กับจุด (1,2)

1.19 ห่างจากจุด (-2,2) เป็นสามเท่าของระยะห่างจากเส้น $x = 4$

1.20 ผลบวกของกำลังสองของระยะห่างจากแกนพิกัดเป็น 9 หน่วย

1.21 ห่างจากจุดกำเหนิดเป็น 3 หน่วยเสมอ

1.22 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (2,3) ผ่านจุด (5,-1)

1.23 ห่างจากจุด (2,0) และเส้นตรง $x + 2 = 0$ เท่ากัน

1.24 ห่างจากจุด (0,3) และเส้นตรง $y + 3 = 0$ เท่ากัน

2. จงหาสมการของโลกัสของจุด P ซึ่งผลคูณของความชันของเส้นตรงที่ต่อจุด P กับจุด (2,0) และเส้นตรงที่ต่อจุด P กับจุด (4,2) เป็น 2

3. ให้ A(0,1) และ B(6,1) จงหาสมการของโลกัสของจุด P ซึ่งผลบวกของระยะจาก P และ A กับระยะจาก P และ B เป็น 10 หน่วย

4. ให้ A(-4,1) และ B(6,1) จงหาสมการของโลกัสของจุด P ซึ่งค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของระยะทาง $|AP|$ และ $|BP|$ เป็น 6 หน่วย

5. จงหาโลกัสของจุด P ซึ่งเป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากที่จุดปลายของด้านตรงข้ามมุมฉากคือ A(2,-3) และ B(1,-7)

6. จุด A(-2,1) และ B(1,5) เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่ 30 ตารางหน่วย จงหาสมการของโลกัสของจุดปลายจุดที่สาม

3.8 สมการของเส้นแบ่งครึ่งมุม (The Bisector of an angle)

เราจะศึกษาปัญหาในการหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมซึ่งเกิดขึ้นโดยเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ทราบสมการทั้งสองเส้น แม้ว่าสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองสามารถหาได้

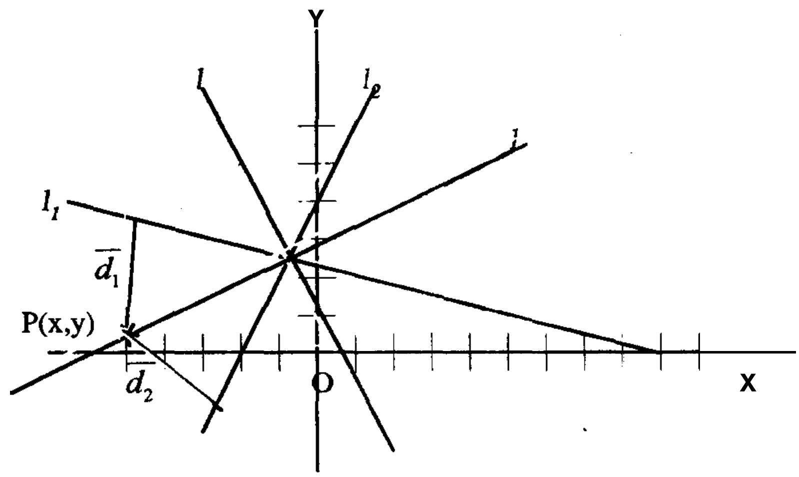
โดยง่ายโดยใช้ผลจากหัวข้อ 2.9 และสมการของเส้นตรงในหัวข้อ 2.10 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8.1 จงหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้น l_1 และ l_2 ที่มีสมการเป็น

$x + 4y - 9 = 0$ และ

$2x - y + 4 = 0$ ตามลำดับ

วิธีทำ ให้ l เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 และ l' เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมจาก l_2 ไปยัง l_1 ดังรูป 3.8.1 เราทราบจากเรขาคณิตแบบยูคลิดว่า จุดที่ห่างจาก l_1 และ l_2 เท่ากันย่อมอยู่บน l หรือ l' เส้นใดเส้นหนึ่ง



รูป 3.8.1

ดังนั้นเราสามารถคำนวณหาสมการของเส้น l และ l' ได้โดยหาสมการของโลกัสของจุดซึ่งห่างจาก l_1 และ l_2 เท่ากัน

พิจารณาจากรูป 3.8.1 พบว่าแต่ละจุดที่อยู่บนเส้นตรง l (ยกเว้นที่จุดตัดกันของ l_1 และ l_2) อยู่ข้างบนและข้างล่างเว้นตรง l_1 และ l_2 หรือ l_2 และ l_1 เสมอ

ให้ P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง l และให้ $\overline{d_1}$ และ $\overline{d_2}$ ระยะที่มีทิศทางจาก l_1 และ l_2 ไปยังจุด P(x,y) ตามลำดับ

ตามหัวข้อ 2.9 เราทราบว่า $\overline{d_1}$ และ $\overline{d_2}$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันแต่มีขนาดเท่ากัน

นั่นคือ $\overline{d_1} = -\overline{d_2}$

ตามหัวข้อ 2.10 เราจึงได้

$$\overline{d_1} = \frac{x+4y-7}{\sqrt{17}}$$

และ $$\overline{d_2} = \frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรง l คือ

$$\frac{x+4y-7}{\sqrt{17}} = -\frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}$$

ในทำนองเดียวกันสมการของเส้นตรง l' คือ

$$\overline{d_1} = \overline{d_2}$$

หรือ $$\frac{x+4y-7}{\sqrt{17}} = \frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองเส้นของเส้นตรงแต่ละคู่ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 2x + y - 7 = 0	1.2 x - 7y + 4 = 0
2x - 4y + 2 = 0	x + y - 3 = 0
1.3 3x - 2y + 3 = 0	1.4 x - 4 = 0
x + y - 4 = 0	x + 2y - 3 = 0
1.5 8x + 6y - 3 = 0	1.6 2x + y + 4 = 0
8x - 4y + 2 = 0	x + 3y - 5 = 0

2. จงหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุม A ของสามเหลี่ยมต่อไปนี้

2.1 A(-2,-1), B(-1,4), C(3,1)	2.2 A(-1,3), B(5,1), C(2,-6)
2.3 A(4,1), B(4,4), C(7,5)	2.4 A(-2,2), B(3,2), C(1,4)

3. สมการของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมคือ

3x - 4y + 4 = 0

12x + 5y - 18 = 0

3x + 4y - 1 = 0

จงหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมของสามเหลี่ยมรูปนี้ และจงแสดงว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้ง

สามนั้นพบกันที่จุดๆ หนึ่งและจุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายในของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้นั้น

4. จงแสดงว่าสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นคู่ขนาน

$Ax + By + C = 0$ และ

$Ax + By + C' = 0$

และอยู่กึ่งกลางของเส้นคู่ขนานนี้คือ

$$Ax + By + \frac{C+C'}{2} = 0$$