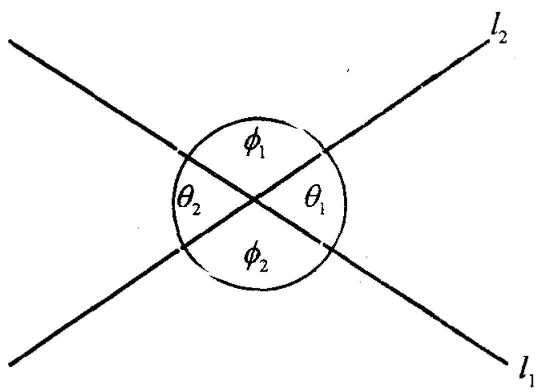
บทที่ 2
เส้นตรง
(Straight Line)

2.1 ความเอียงและความชัน (Inclination and Slope)

นิยาม 2.1.1 สำหรับเส้นตรงเส้นใดๆ l_1 และ l_2 ที่ตัดกัน มุมจาก l_1 ไปยัง l_2 (angle from l_1 to l_2) คือมุมที่มีค่าการวัดเป็นบวกโดยมีด้านเริ่มต้น l_1 และด้านสุดท้าย l_2

ความจริงต้องมีมุมสองมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 ซึ่งเป็นไปตามนิยาม 2.1.1 ที่กล่าวแล้วนี้ คือ มุม θ_1 และ θ_2 ดังรูป 2.1.1 ในทำนองเดียวกันก็มีมุมสองมุมจาก l_2 ไปยัง l_1 นั่นคือมุม ϕ_1 และ ϕ_2 ดังรูป 2.1.1 และเนื่องจาก $\theta_1 = \theta_2$ และ $\phi_1 = \phi_2$ เราจึงเห็นได้ว่าไม่มีความแตกต่างอะไรเลย ถ้าเราจะพิจารณา θ_1 หรือ θ_2 เป็นมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 และมุม ϕ_1 หรือ ϕ_2



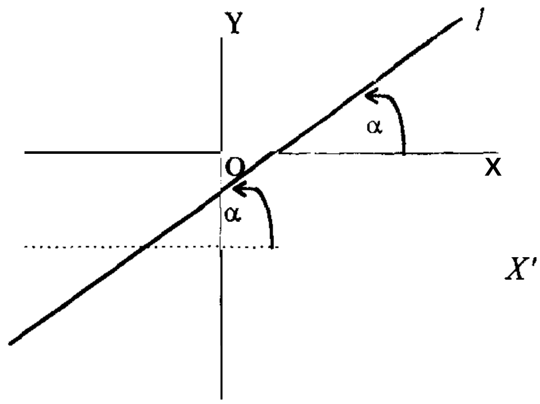
รูป 2.1.1

เป็นมุมจาก l_2 ไปยัง l_1 เรายังทราบต่อไปอีกว่า มุมจากเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งเป็นมุมตั้งแต่ 0° หรือเป็นมุมบวกน้อยกว่า 180°

ข้อสังเกต สำหรับเส้นตรงสองเส้นใดๆ l_1 และ l_2 ที่ไม่ขนานกันผลบวกของมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 และมุมจาก l_2 ไปยัง l_1 มีค่าเท่ากับ 180° (ตามรูป 2.1.1 $\theta_1 + \phi_1 = 180^\circ$)

นิยาม 2.1.2 มุมจากแกน X ไปยังเส้นตรง l เรียกว่าความเอียงของเส้นตรง l

ข้อสังเกต ถ้า X' เป็นเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X มุมจาก X' ไปยัง l ก็คือความเอียงของเส้นตรง l ด้วย ดังรูป 2.1.2 และ 2.1.3 มุม α คือความเอียงของเส้นตรง l



รูป 2.1.2

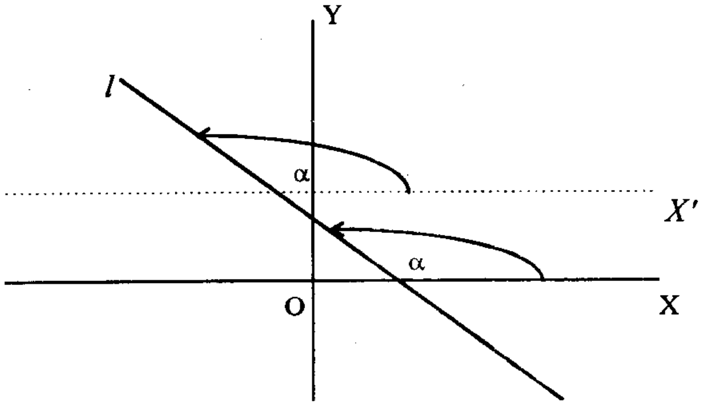
นิยาม 2.1.3 ความชัน (slope) m ของเส้นตรง l คือ tangent ของความเอียง α ของเส้นตรง l

นั่นคือ $m = \tan \alpha$

พิสัยของค่าของความเอี่ยง α ของเส้นตรง l ก็คือ

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

ถ้า $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ เส้นตรง จะเฉียงขึ้นไปทางขวาและความชันมีค่าเป็นบวก(ดังรูป 2.1.2) แต่ถ้า $\alpha > 90^\circ$ เส้นตรง l ก็จะเฉียงขึ้นไปทางซ้ายและความชันมีค่าเป็นลบ(ดังรูป 2.1.3) เนื่องจาก $\tan 0^\circ = 0$ เส้นตรงที่ขนานกับแกน X จึงมีความชันเป็นศูนย์ และเนื่องจาก

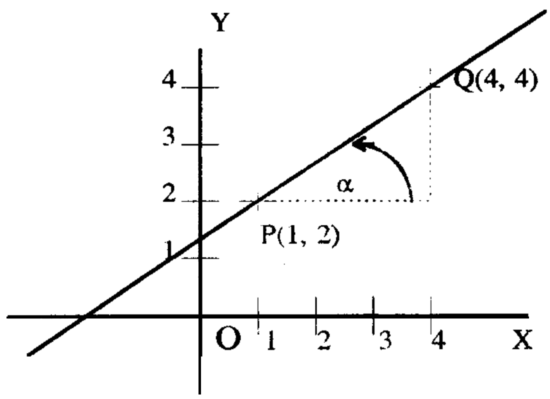


รูป 2.1.3

tan 90° กำหนดค่าให้ไม่ได้(do not exist) ดังนั้น เส้นที่ขนานกับแกน Y จึงไม่มีความชัน จากนิยาม 2.1.3 เกี่ยวกับความชันนั้นเราจึงทราบต่อไปอีกว่าเส้นตรงทั้งหลายที่มีความเอียงเท่ากัน(ขนานกัน)ย่อมมีความชันเท่ากันและเส้นตรงทั้งหลายที่มีความชันเท่ากันย่อมมีความเอียงเท่ากัน(ขนานกัน)

ตัวอย่าง 2.1.1 จงสร้างเส้นตรงที่ผ่านจุด P(1, 2) ให้มีความชัน $\frac{2}{3}$

วิธีทำ จากจุด P ลากเส้นตรงไปทางขวาในแนวระดับ 3 หน่วย แล้วลากเส้นตรงขึ้นไป



รูป 2.1.3

ในแนวดิ่ง 2 หน่วย จะไปถึงจุด Q(4, 4) ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ต้องการดังรูป 2.1.3 นั่นคือเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด Q จึงเป็นเส้นตรงที่ต้องการ เพราะว่าเราแน่ใจว่าผ่านจุด P และมีความชันเป็น $\tan\alpha = \frac{2}{3}$

ตัวอย่าง 2.12 จงลากเส้นตรงที่ผ่านจุด P(1, 2) ให้มีความชัน $-\frac{2}{3}$

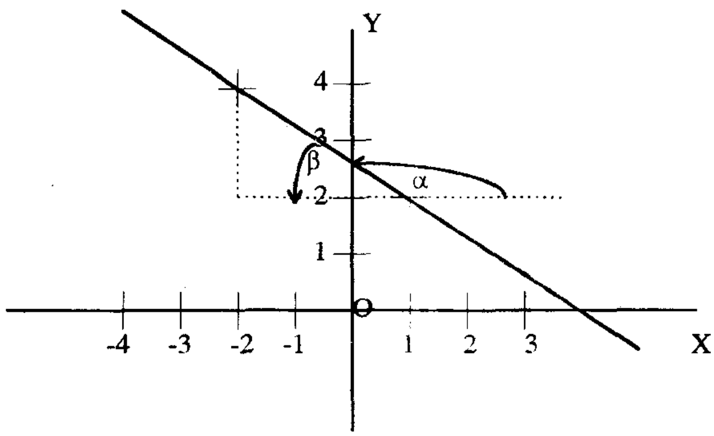
วิธีทำ จากจุด P ลากเส้นตรงทางซ้ายมือตามแนวระดับ 3 หน่วย แล้วลากเส้นตรงขึ้นไปตามแนวดิ่ง 2 หน่วยจึงได้จุด R(-2, 4) เส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด R เป็นเส้นตรงที่ต้องการ ดังรูป 2.1.4 ถ้า β เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ α เราได้

$$\tan\beta = \frac{2}{3}$$

เนื่องจาก $\alpha = 180^\circ - \beta$

เพราะฉะนั้น $\tan\alpha = \tan(180^\circ - \beta)$

นั่นคือเส้นตรง PR ผ่านจุด P และมีความชัน $-\frac{2}{3}$ ตามต้องการ



รูป 2.1.4

2.2 ความชันของเส้นที่ผ่านจุดสองจุด (Slope of the Straight Line on Two Point)

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$และ $P_2(x_2,y_2)$

I) ถ้า $x_1 = x_2$ แล้วเส้นตรง l ไม่มีความชัน

II) ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้วเส้นตรง l มีความชัน m และได้

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

พิสูจน์ I) ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรง P_1P_2 ย่อมขนานกับแกน Y ดังรูป 2.2.1 a เพราะฉะนั้นเส้นตรง l ที่ผ่านจุด P_1 และจุด P_2 จึงไม่มีความชัน

II) สมมุติว่า $y_2 \geq y_1$ นั่นคือ P_2 อยู่เหนือ P_1 หรือ P_2อยู่บนเส้นระดับเดียวกับ P_1 ตามรูป 2.2.1 b เราลากเส้น X'และ Y'ให้ผ่านจุดP_1 และขนานกับแกน Xและแกน Y ตามลำดับ ให้จุด A และ B เป็นโปรเจคชันของจุด P_2 บนแส้น X'และ Y'ตามลำดับ α เป็นมุมจากเส้น X' ไปยัง l ก็คือความเอียงของเส้นตรง l นั่นเอง ถ้าเรพิจารณาเส้น X' และ Y' เป็นแกนพิกัดชุดใหม่ในระนาบเราจะได้ว่า พิกัดของจุด P_2 เมื่อเทียบกับแกนใหม่คือ $(\overline{P_1A},\overline{P_1B})$

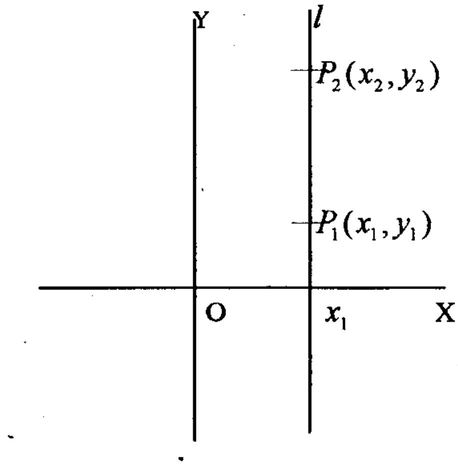
ดังนั้น $\tan\alpha = \dfrac{\overline{P_1B}}{\overline{P_1A}}$

เนื่องจาก $\overline{P_1A} = x_2 - x_1$

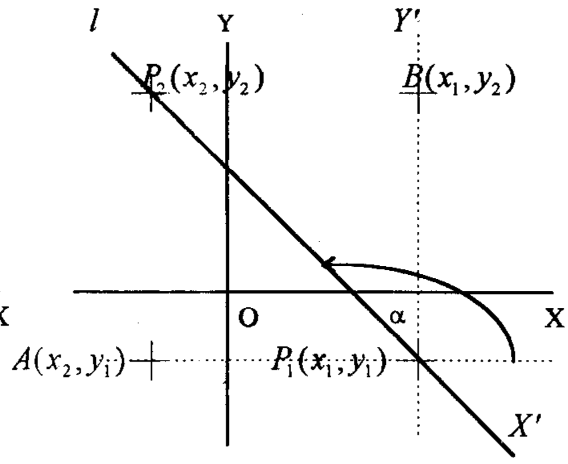
$\overline{P_1B} = y_2 - y_1$

และ $m = \tan\alpha$

เพราะฉะนั้น $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



รูป 2.2.1 a



รูป 2.2.1 b

หมายเหตุ จากพีชคณิตเราได้ว่า $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}$

$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

เราจึงอาจกล่าวได้ว่า ในกรณีที่ P_1 อยู่เหนือ P_2 คือ $y_2 > y_1$

เราได้ $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาความชันและความเอียงของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2, -2) และจุด (4, 0)

วิธีทำ ตามทฤษฎีบท 2.2.1 เราได้ความชัน

$$m = \frac{0-(-2)}{4-2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

นั่นคือความชันของเส้นตรงเป็น ตอบ

เนื่องจากความชัน m ของเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, -2) และจุด (4, 0) เป็นบวก

ดังนั้นความเอียง α ของเส้นตรงเส้นนี้อยู่ระหว่าง 0° และ 90° เราได้

$m = \tan\alpha$

$= 1$

เราจึงได้ต่อไปว่า $\alpha = 45^{\circ}$

เพราะฉะนั้นความเอียงของเส้นตรง $= 45^{\circ}$ ตอบ

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาความชันและความเอียงเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (-2, 2) และจุด (3, -1)

วิธีทำ ตามทฤษฎีบท 2.2.1 เราได้ความชัน

$$m = \frac{2-(-1)}{-2-3}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

นั่นคือความชันของเส้นตรงเป็น $-\frac{3}{5}$ ตอบ

เนื่องจากความชัน m มีค่าเป็นลบ ความเอียง α ของเส้นตรงนี้ต้องอยู่ระหว่าง 90° ถึง 180° จากตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเราได้ว่า

$\tan\alpha = \frac{3}{5}$ เราจะได้ค่า α ประมาณ $30^{\circ}58'$

เพราะฉะนั้นความเอียงของเส้นตรง คือ

$180^{\circ} - 30^{\circ}58' = 149^{\circ}2'$ ตอบ

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงลากเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 ผ่านจุด (-1, 2) มีความชัน 4

1.2 ผ่านจุด (-1, 2) มีความชัน $\frac{1}{4}$

1.3 ผ่านจุด (3, 0) มีความชัน $-\frac{1}{2}$

1.4 ผ่านจุด (4, -2) มีความชัน 10

1.5 ผ่านจุด (3, 7) มีความชัน 0

1.6 ผ่านจุด (-1, -1) มีความชัน -1

1.7 ผ่านจุด $(\frac{1}{2}, 2)$ มีความชัน 8

1.8 ผ่านจุด (1, 2) ไม่มีความชัน

1.9 ผ่านจุด (0, 2) มีความชัน 3

1.10 ผ่านจุด (0, -3) มีความชัน -2

1.11 ผ่านจุด (0, 4) มีความชัน $\frac{1}{2}$ 1.12 ผ่านจุด (0, 3) มีความชัน $-\frac{4}{3}$

2. จงหาความชันและความเอียงของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้

2.1 (1, -2) และ (2, 3) 2.2 (2, -3) และ (4, 2)

2.3 (3, 3) และ (-5, 2) 2.4 (-4, 1) และ (3, -5)

2.5 (-2, -2) และ (3, -2) 2.6 (7, 0) และ (0, 4)

2.7 $(1, \sqrt{2})$ และ $(-\sqrt{2}, 1)$ 2.8 (0, 0) และ (5, -8)

2.9 (0, 13) และ (-13, 0) 2.10 (5, -3) และ (5, 2)

2.11 (-3,7) และ (10, 4) 2.12 (-5, 2) และ (3, 2)

2.13 $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ และ $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ 2.14 $(\frac{5}{2}, -6)$ และ $(-\frac{3}{2}, 4)$

3. จงหาความชันของด้านทั้งสามและเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมทั้งสามดังนี้

3.1 A(-1, 2), B(3, -4) และ C(1, 6) 3.2 A(2, 5), B(4, -1) และ C(6, 8)

4. จงหาความเอียงและความชันของเส้นตรง l ถ้ามุมจากเส้นตรง l ไปยังแกน Y วัดได้ 120°

5. ความเอียงของเส้นตรง l เป็นสองเท่าของความเอียงของเส้นตรง l_1 ถ้าเส้นตรง l มีความชัน -4 จงหาความชันของเส้นตรง l_1

2.3 เส้นตรงขนานกันและเส้นตรงตั้งได้ฉากกัน (Parallel and Perpendicular Lines)

ทฤษฎีบท 2.3.1 สำหรับเส้นตรงสองเส้น l_1 และ l_2 ใดๆ ที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

I) l_1 และ l_2 ขนานกันก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

II) l_1 และ l_2 ตั้งได้ฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

พิสูจน์ กำหนดให้เส้นตรง l_1 และ l_2 มีความเอียง α_1 และ α_2 ตามลำดับ

I) ให้ l_1 และ l_2 ขนานกันเราได้

a, = a,

,. tan a, = tan α_2

$m_1 = m_2$

ในทางกลับกัน ให้ $m_1 = m_2$

, tan ***a,*** = tan ***a,***

เนื่องจาก ***0'*** ≤ ***a,*** < 180° และ $0° \le \alpha_2 < 180°$

$\therefore \alpha_1 = \alpha_2$

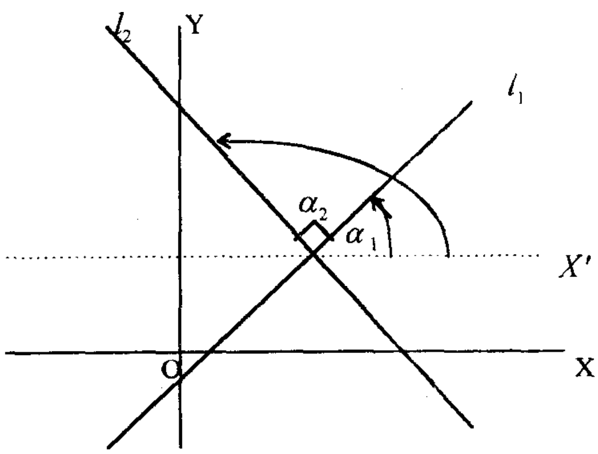
$\therefore$ l_1 และ l_2 ขนานกัน

นั่นคือ l_1 และ l_2 ขนานกันก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

II) ให้ l_1 และ l_2 ตั้งได้ฉากกัน เราจึงได้

a, $\neq \alpha_2$

ดังนั้น ***a,*** > α_2 หรือ ***a,*** < ***a,***



รูป 2.3.1

ถ้าเราเลือกกรณี $\alpha_1 < \alpha_2$ ดังรูป 2.3.1 ลากเส้น X' ให้ขนานกับแกน X และผ่านจุดตัดของ l_1 และ l_2 ได้ α_1 และ α_2 ก็คือมุมจาก X' ไปยัง l_1 และ l_2 ตามลำดับ และ

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$$

เนื่องจาก $\tan(\alpha_1 + 90^\circ) = -\cot \alpha_1$

เพราะฉะนั้น tan a, = -cot a,

$$= -\frac{1}{\tan a,}$$

แต่ $\tan \alpha_2 = m_2$ และ $\tan \alpha_1 = m_1$

เพราะฉะนั้น $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

หรือ $m_1 m_2 = -1$

ในทางกลับกัน ให้ $m_1 m_2 = -1$

เนื่องจาก $m_1 m_2$ มีค่าเป็นลบ

ดังนั้นถ้าค่าใดค่าหนึ่งเป็นบวก อีกค่าหนึ่งต้องเป็นลบ

สมมุติว่า m_1 เป็นบวก และ m_2 เป็นลบ และเนื่องจาก $m_1 = \tan \alpha_1$ และ $m_2 = \tan \alpha_2$

ดังนั้น $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$ และ $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$ เพราะว่า $\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = -1$

เพราะฉะนั้น $\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan a,}$

$$= -\cot \alpha_1$$

และ tan(a, + 90') = $-\cot \alpha_1$

ดังนั้น tan a, = tan(a, + 90')

$\therefore \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$

$\therefore \alpha_2 - \alpha_1 = 90^\circ$

เราจึงกล่าวได้ว่ามุมจาก l_1 ไปยัง l_2 คือ 90'

ดังนั้น 1, และ l_2 ตั้งได้ฉากกัน

นั่นคือ l_1 และ l_2 ตั้งได้ฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2, 3) และจุด (-4, 1)

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.2.1 ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดทั้งสองที่กำหนดให้ คือ

$$\frac{3-1}{2-(-4)}=\frac{2}{6}$$
$$=\frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้นความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงเส้นนี้คือ m

เราได้ $\frac{1}{3}m = -1,$

$m = -3$ ตอบ

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาความชันของเส้นที่แสดงความสูง (เส้นตั้งได้ฉากกับฐาน) ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมเป็น A(3, -3), B(4, 2) และ C(-5, -2)

วิธีทำ ฐาน AB ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีความชัน

$$\frac{2-(-3)}{2-(-4)}=\frac{5}{2}$$

เพราะฉะนั้นเส้นแสดงความสูงของสามเหลี่ยมรูปนี้เมื่อคิดความสูงจากฐาน AB มีความชัน $-\frac{2}{5}$ ตอบ

ฐาน BC ของสามเหลี่ยม ABC มีความชัน

$$\frac{2-(-2)}{4-(-5)}=\frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้นเส้นแสดงความสูงของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้เมื่อคิความสูงจากฐาน BC มีความชัน $-\frac{9}{4}$ ตอบ

ฐาน CA ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีความชัน

$$\frac{-2-(-3)}{-5-2}=\frac{1}{-7}$$
$$=-\frac{1}{7}$$

เพราะฉะนั้นเส้นแสดงความสูงของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้เมื่อคิดความสูงจากฐานCA มีความชัน 7 ตอบ

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาความชันของเส้นตั้งได้ฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมดังต่อไปนี้

1.1 A(-1, -2), B(3, 5), C(5, 1) **1.2** A(-3, 4), B(6, 2), C(4, -3)

1.3 A(2, 5), B(4, -1), C(6, 3) 1.4 A(-8, -2), B(-4, -6), C(-1, 5)

1.5 A(3, -4), B(-1, 2), C(1, 6) 1.6 A(0, 4), B(-8, 0), C(-1, -4)

1.7 A(7, 1), B(12, -2), C(8, -5) 1.8 A($\sqrt{2}$, 2), B(-4, 6), C(4, $-2\sqrt{2}$)

1.9 A(-1, 1), B(1, 2), C(8, -5) 1.10 A(-7, 5), B(1, 1), C(-3, 3)

1.11 A(-6, 1), B(-5, 2), C(-3, 6) 1.12 A($-\frac{3}{5}$, 0), B(l, $-\frac{1}{2}$), C($\frac{10}{3}$, 3)

1.13 A(0, $\sqrt{2}$), B(3, 0), C(5, $2\sqrt{2}$) 1.14 A(a, b+c), B(b, c+a), C(c, a+b)

2. จงใช้ความชันแสดงว่าจุด (7, 9) อยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับเซกเมนต์ที่ต่อจุด (-2, 1) และ (6, -3)

3. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมต่อไปนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ถ้ารูปใดเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากจงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นด้วย

3.1 A(-7, 4), B(l, -3), C(0, 12) 3.2 A(1, 0), B(l, 4), C(-2, 1)

3.3 A(l, S), B(3, 9), C(-5, 8) 3.4 A(0, 9), B(-4, -1), C(3, 2)

3.5 A(lO, 5), B(3, 2), C(6, -5) 3.6 A(3, -2), B(-2, 3), C(0, 4)

3.7 A(-2, 8), B(-6, 1), C(0, 4)

4. จงแสดงว่าสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมต่อไปนี้เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่

4.1 A(1, 1), B(6, 0), C(7, 4), D(2, 5)

4.2 A(-1, -2), B(0, 1), C(-3, 2), D(-4, - 1)

4.3 A(-1, -5), B(2, 1), C(l, S), D(-2, -1)

4.4 A(2, 4), B(6, 2), C(8, 6), D(4, 8)

5. จงใช้ความชันแสดงว่าจุดสามจุดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

5.1 (1, 1), (-2, 7) และ (10, -17) 5.2 (4, I), (5, -2) และ (6, -5)

5.3 (0, 5), (5, 0) และ (6, -1) 5.4 (a, 0), (2a, -b) และ (-a, 2b)

5.5 (a, b + c), (b, c + a) และ (c, a + b)

6. จงแสดงว่าเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น A(2, 2), B(6, 0) และ C(5, 3) เส้นหนึ่งเป็นเส้นแสดงความสูงของรูปสามเหลี่ยม จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้

7. จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของด้านของสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น A(-2, 1), B(3, 6), C(6, 3) และ D(5, 0) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

8. จงแสดงว่าเส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น A(-2, -4), B(-3, 4), C(10, 20) และ D(5, 0) ตั้งได้ฉากกัน

9. จงแสดงว่า A(-3, -10), B(1, 2), C(4, 5) และ D(1, -4) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมคางหมู และ จงแสดงว่าเส้นที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านคู่ที่ไม่ขนานกัน ย่อมขนานกับด้านคู่ที่ขนานกัน

10. จงหาค่าของ c ให้ A(7, 5), B(-1, 2) และ C(c, 0) เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมฉากที่ B

11. ให้ $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ และ $P_3(x_3,y_3)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมใดๆ จงแสดงว่า เส้นตรงนี้ต่อจุดกึ่งกลางของ P_1P_2 และ P_1P_3 ขนานกับ P_2P_3และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ P_2P_3

2.4 มุมจากเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังอีกเส้นหนึ่ง (The Angle from one Straight Line to Another)

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งมีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ และให้ θ เป็นมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 ถ้า $m_1m_2 = -1$ เราย่อมได้ $\theta = 90^\circ$ ไม่เช่นนั้นแล้ว θ ต้องเป็นมุมซึ่งเป็นผลเฉลยของ

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} \quad \text{เมื่อ } 0^\circ \le \theta < 180^\circ$$

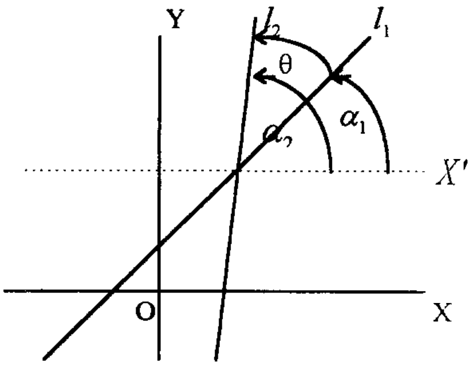
พิสูจน์ ถ้า $m_1m_2 = -1$ ตามทฤษฎีบท 2.3.1 แสดงว่า l_1 และ l_2 ตั้งได้ฉากกัน

ดังนั้น $\theta = 90^{\circ}$

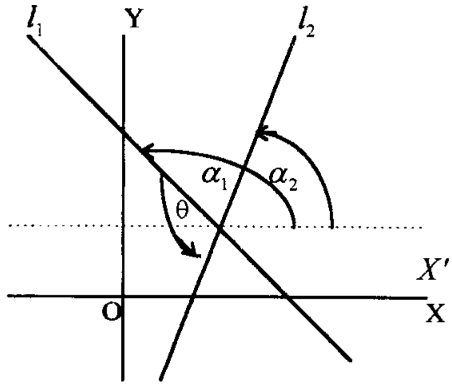
ถ้า $m_1 = m_2$ ตามทฤษฎีบท 2.3.2 แสดงว่า l_1 และ l_2 ขนานกัน ดังนั้นตามนิยาม 2.1.1 เราจึงได้ $\theta = 0^{\circ}$ และเนื่องจาก $\tan 0^{\circ} = 0$ เพราะฉะนั้นในกรณีนี้สูตร

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

ก็เป็นจริงจากรูป 2.4.1 a และ 2.4.1b ลาก เส้น X' ให้ผ่านจุดตัดของ l_1 และ l_2 และขนานกับแกน X ให้ α_1 และ α_2 เป็น ความเอียงของ l_1 และ l_2



รูป 2.4.1 a



รูป 2.4.1 b

ตามลำดับ เราจึงได้

a, เป็นมุมจาก X' ไปยัง *1,* และ

α_2 เป็นมุมจาก X' ไปยัง l_2

ถ้า $\alpha_2 > \alpha_1$ ตามรูป 2.4.1 a เราได้

$\theta = \alpha_2$ -a, และ

ถ้1 a,> a, ตามรูป 2.4.1 b เราได้

$$\theta = (180^{\circ} + \alpha_2) - \alpha_1$$

$$= 180^{\circ} + (\alpha_2 \text{ -a, })$$

และเนื่องจาก $\tan[180^\circ + (\alpha_2 - \alpha_1)] = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

ดังนั้น $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

จากสูตรตรีโกณมิติ $\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$

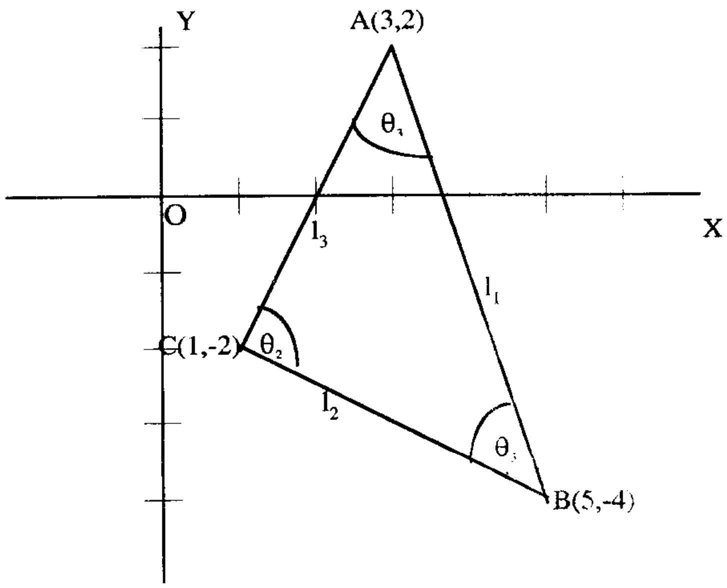
เราจึงได้ $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมเป็น A(3, 2), B(5, -4), C(1, -2)

วิธีทำ จากรูป 2.4.2 เราพบว่า เส้นตรง AB หรือ l_1 มีความชัน $m_1 = \dfrac{2-(-4)}{3-5}$

$$= \frac{6}{-2}$$

$$= -3$$



รูป 2.4.2

เส้นตรง BC หรือ l_2 มีความชัน $m_2 = \dfrac{-2-(-4)}{1-5}$

$$\frac{2}{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

เส้นตรง CA หรือ l_3 มีความชัน $m_3 = \frac{2-(-2)}{3-1}$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

มุม θ_1 เป็นมุมที่จุดยอด B คือ มุมจาก l_1 ไปยัง l_2

เพราะว่า $m_1m_2 = (-\frac{1}{2})(-3) \neq -1$

เพราะฉะนั้น $\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$

$$= \frac{-\frac{1}{2}-(-3)}{1+(-\frac{1}{2})(-3)}$$

$$= \frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

ดังนั้น $\theta_1 = 45^\circ$ **ตอบ**

มุม θ_2 เป็นมุมที่จุดยอด C คือมุมจาก l_2 ไปยัง l_3

เพราะว่า $m_2m_3 = (-\frac{1}{2}) \times 2$

$$= -1$$

ดังนั้น $\theta_2 = 90^\circ$

มุม θ_3 เป็นมุมที่จุดยอด A คือมุมจาก l_3 ไปยัง l_1

เพราะว่า $m_3m_1 = 2(-3)$

$$\neq -1$$

$$\tan\theta_3 = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1m_3}$$

$$= \frac{-3-2}{1+(-3)\times 2}$$

$$= \frac{-5}{1-6}$$

-5

-5

$= 1$

ดังนั้น $\theta_3 = 45^\circ$

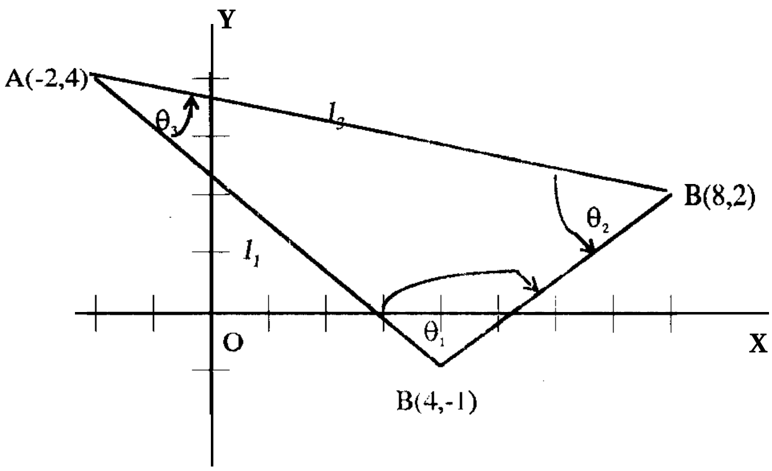
ตัวอย่าง 2.4.2 จงหามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็น A(-2,4), B(4,-1) และ C(8,2)

วิธีทำ ตามรูป 2.4.3 เราพบว่า

เส้นตรง AB หรือ l_1 มีความชัน $m_1 = \dfrac{4-(-1)}{-2-4}$

$$= \frac{5}{-6}$$

$$= -\frac{5}{6}$$



รูป 2.4.3

เส้นตรง BC หรือ l_2 มีความชัน $m_2 = \dfrac{2-(-1)}{8-4}$

3

4

เส้นตรง CA หรือ l_3 มีความชัน $m_3 = \dfrac{4-2}{-2-8}$

$$= \frac{2}{-10}$$

มุม θ_1 เป็นมุมที่จุดยอด B คือมุมจาก l_2 ไปยัง l_1

เพราะว่า $m_1 m_2 = -\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \neq -1$

เพราะฉะนั้น $\tan\ \theta_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$$= \frac{\frac{-5}{6} \quad \frac{3}{4}}{1+(\frac{-5}{6}) \times \frac{3}{4}}$$

$$\frac{38}{9}$$

$$= -4.2$$

จากตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเราได้

$\theta_1 = 103^\circ 19'$ ตอบ

มุม θ_2 เป็นมุมที่จุดยอด C คือมุมจาก l_3 ไปยัง l_2

เพราะว่า $m_2 m_3 = \frac{3}{4}(\frac{-1}{5})$

$\neq -1$

เพราะฉะนั้น $\tan\ \theta_2 = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}$

$$= \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{5})}{1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{5})}$$

$$= \frac{19}{17} = 1.1176$$

ดังนั้น $\theta_2 = 48^\circ\ 11'$ ตอบ

มุม θ_3 เป็นมุมที่จุดยอด A คือมุมจาก l_1 ไปยัง l_3

เพราะว่า $m_1 m_3 = (-\frac{5}{6})(-\frac{1}{5})$

$\neq -1$

เพราะฉะนั้น $\tan\theta_3 = \dfrac{m_3 - m_1}{1+m_1m_3}$

$$= \frac{-\frac{1}{5}-(-\frac{5}{6})}{1+(-\frac{1}{5})(-\frac{5}{6})}$$

$$= \frac{19}{35}$$

$$= 0.5429$$

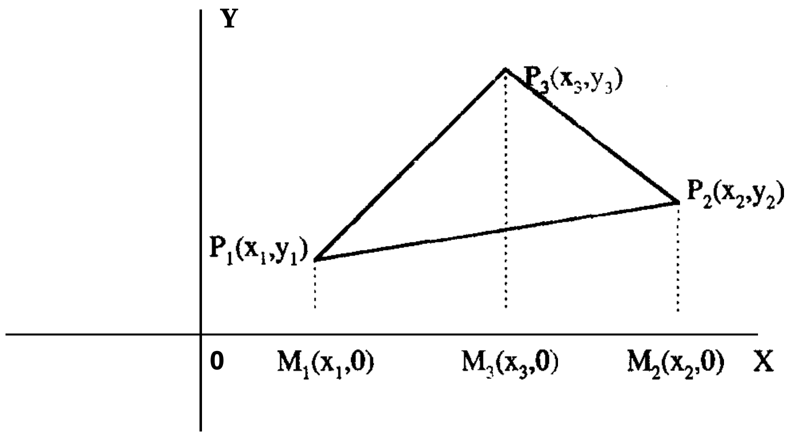
ดังนั้น $\theta_3 = 28^\circ\ 30'$ ตอบ

2.5 พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม (Aria Of any polygon)

ให้ $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่ A ตารางหน่วย คือ

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3) \text{ ตารางหน่วย}$$

กำหนดสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ ดังรูป 2.5.1



รูป 2.5.1

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ = พื้นที่ของสี่เหลียมคางหมู $M_1P_1P_3M_3$

+ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $M_3P_3P_2M_2$

- พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $M_1P_1P_2M_2$

นั่นคือ $A = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$

$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3)$

และเราสามารถจะเขียนจำนวนนี้ในรูปดิเทอร์มิแนนท์(determinant) **ว่า**

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

หรืออาจเขียนในรูปผลบวกของผลคูณ ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันนี้เราอาจใช้วิธีการนี้หาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมอื่นๆ ได้อีกด้วย

แบบฝึกหัด 2.3

1. **จงหามุมภายในของสามเหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมดังต่อไปนี้**

1.1 A(-3,0), B(2,5), C(5,1)

1.2 A(4,2), B(0,1), C(6,-1)

1.3 (-4,1), B(3,-1), C(0,6)

1.4 A(-3,-1), B(4,4), C(-2,3)

1.5 A(-8,-3), B(-2,-1), C(-6,-5)

1.6 A(6,5), B(1,3), C(5,-7)

1.7 (3,1), B(3,5), C(7,-1)

1.8 A(3,2), B(5,-4), C(1,-2)

1.9 A(-1,4), B(2,-1), C(10,3)

1.10 A(2,4), B(4,8), C(6,2)

1.11 (2,2), B(3,-1), C(8,2)

1.12 A(3,4), B(-2,-1), C(4,1)

2. สำหรับรูปสามเหลี่ยมในข้อ 1 จงหามุมจากเส้นมัธยฐานจาก A ไปยังมัธยฐานจาก B

3. จงหามุมภายในและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมดังต่อไปนี้

   3.1 A(7,3), B(0,2), C(4,-1), D(6,0) 3.2 A(2,5), B(7,1), C(3,-4), D(-2,3)

   3.3 (0,4), B(1,-6), C(-2,-3), D(-4,2) 3.4 A(1,5), B(-2,4), C(-3,-1), D(2,-3)

4. เส้นตรง k มีความเอียง 105° และเส้นตรง l มีความเอียง 10° จงหามุม

   4.1 จากเส้นตรง k ไปยังเส้นตรง l 4.2 จากแกน Y ไปยัง เส้นตรง k

   4.3 จากเส้นตรง l ไปยังแกน X

5. เส้นตรง k ผ่านจุด (-2,4) และ (5,-1) จงหาความชันของเส้นตรง l ซึ่งมุมจาก l ไปยัง k เป็น 45°

6. กำหนดให้เส้นตรง l ผ่านจุด A(1,2) และ B(7,10) และ เส้นตรง k ผ่านจุด C(a,0) และ B(7,10) จงหาค่าของ a ถ้ามุมจากเส้นตรง l ไปยังเส้นตรง k เป็น 135°

7. ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.1 เราไม่ได้กล่าวในกรณีที่ l_1 หรือ l_2 เส้นใดเส้นหนึ่งขนานกับแกน Y เลย ในกรณีที่ l_1 ขนานกับแกน Y เพราะฉะนั้น $\alpha_1 = 90^{\circ}$ เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha_2 - 90^{\circ}) \\ &= -\cot\alpha_2 \\ &= -\frac{1}{\tan\alpha_2} \\ &= -\frac{1}{m_2}\end{aligned}$$

นั่นคือ มุมจาก l_1 ซึ่งขนานกับแกน Y ไปยัง l_2 (ความชันไม่เป็นศูนย์) คือมุม θ ซึ่งอยู่ระหว่าง 0° ถึง 180° ซึ่ง

$$\tan\theta = -\frac{1}{m_2}$$

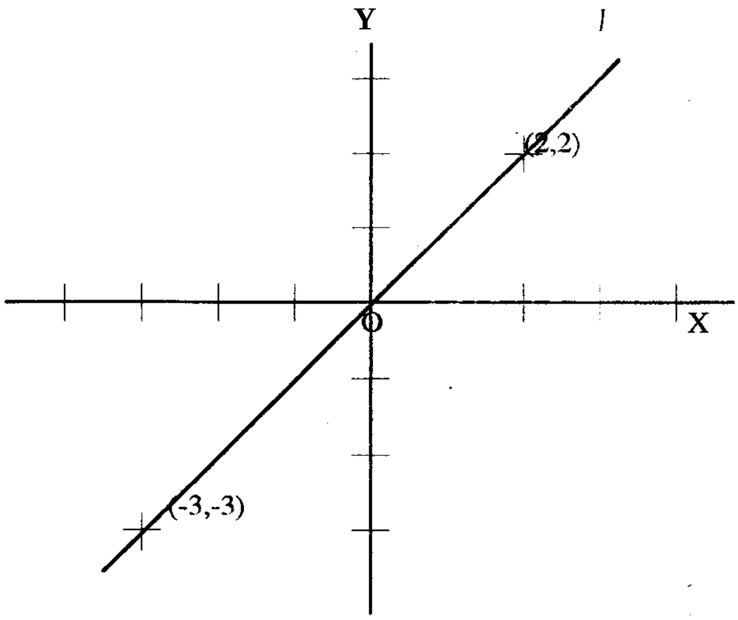
จงแสดงว่ามุมจาก l_1 (ความชันไม่เป็นศูนย์) ไปยัง l_2 ซึ่งขนานกับแกน Y คือมุม θ ซึ่งอยู่ระหว่าง 0° ถึง 180° ซึ่ง

$$\tan\theta = \frac{1}{m_1}$$

2.6 สมการเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

สมมุติว่าเส้นตรง l เป็นเส้นที่แบ่งครึ่งระนาบส่วนที่ 1 และส่วนที่ 3 นั่นคือ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเหนิดด้วยความเอียง 45° ดังรูป 2.6.1 ด้วยเรขาคณิตง่ายๆ เราพบว่า ถ้า P(x,y) เป็นจุดใดๆ บน l แล้ว

$$y = x$$



รูป 2.6.1

จุดใดๆ (x,y) เมื่อ y = x ต้องอยู่บนเส้นตรง l ดังนั้นจุดใดๆ ที่มีพิกัดคล้องตามสมการ y = x ก็ต่อเมื่อจุดนั้นอยู่บนเส้นตรง l เราอาจกล่าวว่าสมการ y = x (หรือ x - y = 0) เป็นสมการของเส้นตรง l

นิยาม 2.6.1 สมการของเส้นตรง l คือสมการที่เกี่ยวกับ x และ y แล้วจุด (x,y) อยู่บนเส้นตรง l ก็ต่อเมื่อ (x,y) คล้องกับสมการของเส้นตรง l

หมายเหตุ ถ้าเราคูณหรือหารตลอดสมการของเส้นตรงด้วยจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์แล้ว สมการนั้นก็ยังคงเป็นสมการของเส้นตรงเส้นเดิม

สมการของเส้นที่ขนานกับแกนพิกัด สมการของเส้นใดที่ขนานกับแกน Y อยู่ในรูป

$x = c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

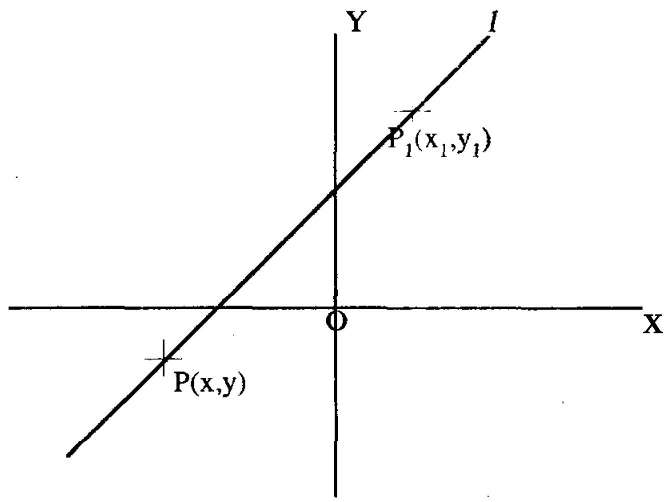
และสมการของเส้นใดที่ขนานกับแกน X อยู่ในรูป

$y = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

ข้อสังเกต สมการของแกน X คือ $y = 0$ และ

สมการของแกน Y คือ $x = 0$

สมการของเส้นตรง พิจารณาจากจุดบนเส้นตรงและความชัน (The Point - Slope Form) ให้ l เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ มีความชัน m และให้ $P(x,y)$ เป็นจุด



รูป **2.6.2**

ใดๆ จุดหนึ่งบนเส้นตรง l ซึ่งต่างจาก $P_1(x_1,y_1)$ ดังรูป 2.6.2

ตามทฤษฎีบท 2.2.1 เราได้

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหาสมการของเส้นที่ผ่านจุด (-1, 2) และจุด (3,4)

วิธีทำ ตามทฤษฎีบท 2.2.1 เราได้

ความชันของเส้นตรง $m = \dfrac{4-2}{3-(-1)}$

$= \dfrac{1}{2}$

เราจึงได้สมการของเส้นตรงเป็น

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - (-1))$$

หรือ $$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

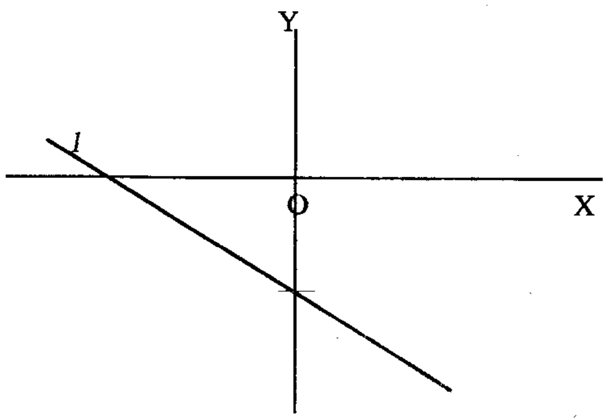
หรือ $x - 2y + 5 = 0$ เป็นสมการของเส้นตรงตามต้องการ

หมายเหตุ สำหรับตัวอย่าง 2.6.1 นี้ เราอาจสร้างสมการด้วยจุด (3,4) เราก็จะได้สมการของเส้นตรงนี้เหมือนกัน คือ

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3)$$ เราก็จะได้

$x - 2y + 5 = 0$ เช่นเดียวกัน

สมการของเส้นตรงพิจารณาจากความชันและจุดตัดบนแกนพิกัด (The Slope - Intercept Form)



รูป 2.6.3

ให้ *l* เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งไม่ขนานกับแกน Y ตามรูป 2.6.3 และ *l* มีความชัน m ดังนั้น *l* จะตัดแกน Y ที่จุด (0,b), b มีชื่อเรียกว่า y-inercept ของเส้น *l* (ในธรรมนองเดียวกัน ถ้า *l* ตัดแกน X ที่จุด (a,0), a ก็จะเรียกว่า x-intercept ของเส้นตรง *l*)

จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$

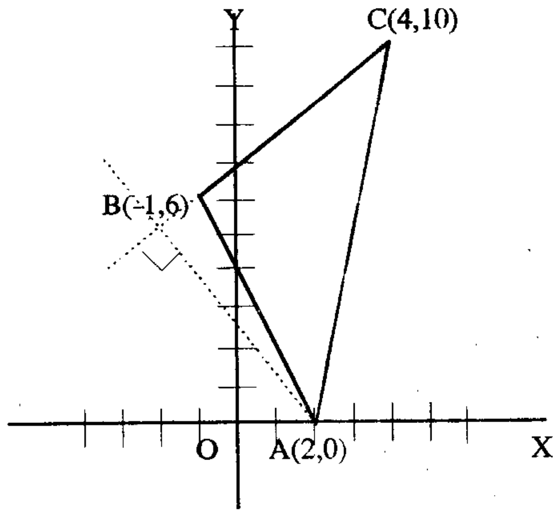
เราจึงได้ $y - b = m(x - 0)$

หรือ $y = mx + b$ เป็นสมการของเส้นตรงแบบความชันจุดตัดบนแกน Y

ตัวอย่าง 2.6.2 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดมุมเป็น A(2,0), b(-1,6), C(4,10) จงหาสมการของเส้นแสดงความสูงของสามเหลี่ยมจากจุดยอด A

วิธีทำ รูปสามเหลี่ยม ABC มีลักษณะดังรูป 2.6.4 ตามทฤษฎีบท 2.2.1 เราได้ความชันของด้าน BC คือ

$$\frac{10-6}{4-(-1)} = \frac{4}{5}$$



รูป 2.6.4

เส้นแสดงความสูงของสามเหลี่ยมจากจุด A คือเส้นตรง *l* ที่ลากผ่านจุด A ไปตั้งฉากกับเส้นที่ลากผ่าน B และ C ตามทฤษฎีบท 2.3.1 เราได้ความชันของเส้นตรง *l* คือ

$$-\frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

เพราะฉะนั้นสมการของเส้นตรง *l* คือ

$$y - 0 = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

หรือ $5x + 4y - 10 = 0$ ตอบ

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้

1.1 (-1,2) และ (4,3)
1.2 (1,-2) และ (-3,1)
1.3 (2,-3) และ (4,2)
1.4 (-4,1) และ (3,-5)
1.5 (3,1) และ (3,4)
1.6 (2,-1) และ (-4,-1)
1.7 (7,0) และ (4,0)
1.8 (0,0) และ (5,-3)
1.9 (5,-3) และ (5,2)
1.10 (-5,2) และ (3,2)

2. จงหาสมการของเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

2.1 ความชัน $\frac{3}{2}$ และ y-intercept -5
2.1 ผ่าน(2,-4)ด้วยความชัน $-\frac{2}{3}$
2.3 ผ่านจุด (0,2) ด้วยความชัน 3
2.4 ผ่านจุด (0,-3) ด้วยความชัน -2
2.5 ผ่านจุด (0,4) ด้วยความชัน $\frac{1}{3}$
2.6 ผ่าน (0,-1) ด้วยความชัน 0
2.7 ผ่านจุด (0,3) ด้วยความชัน $-\frac{4}{}$
2.8 ความชัน m และ x-intercept a
2.9 x-intercept 3 และ y-intercept -4
2.10 ผ่าน(-2,3)ด้วยความเอียง 135°
2.11 x-intercept a และ y-intercept b
2.12 x-intercept 4 และไม่ตัดแกน Y
2.13 ผ่านจุด (1,3) และสูงขึ้น 3 หน่วยสำหรับ x เพิ่มขึ้นแต่ละหน่วย
2.14 ผ่านจุด (-1,2) และลดลง 2 หน่วยสำหรับ เพิ่มขึ้นแต่ละหน่วย
2.15 ผ่านจุด (4,4) ด้วยความเอียง 60°
2.16 ผ่านจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ด้วยความชัน $\frac{3}{5}$

2.17 ขนานกับแกน Y และห่างจากแกน Y ไปทางซ้าย 2 หน่วย

3. จงหาสมการของ

a. ด้านทั้งสาม

b. เส้นมัธยฐานทั้งสาม

c. เส้นแสดงความสูงจากจุดยอดไปยังด้านทั้งสาม

d. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับด้านทั้งสาม

ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมต่อไปนี้

3.1 A(-3,1), B(0,5), C(3,-1)

3.2 A(2,0), B(-4,2), C(-2,-6)

3.3 A(6,2), B(1,-1), C(6,-5)

3.4 A(1,1), B(5,4), C(8,0)

3.5 A(-4,-2), B(1,4), C(5,-2)

3.6 $A(\frac{3}{2},-2)$, B(5,0), $C(3,-\frac{1}{2})$

4. จงหาสมการของเส้นตรง *l* ซึ่งผ่านจุดกำเนิดและมุมจาก *l* ไปยังเส้นตรงที่ต่อจุด (-3,1) กับ (4,2) เป็น 135°

5. จงหาสมการของเส้นตรง *l* ที่ผ่านจุด (-1,2) ซึ่งมุมจาก *l* ไปยังเส้นตรงที่ต่อจุด (3,2) กับ (-1,4) เป็น 45°

2.7 สมการกำลังหนึ่ง (Equations of the First Degree)

พิจารณาสมการของเส้นตรงใดๆ ในรูป

i) $y - y_1 = m(x - x_1)$ หรือ

ii) $x = x_1$

ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของสมการกำลังหนึ่ง เราอาจเขียนสมการกำลังหนึ่งโดยทั่วๆ ไปว่า

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

มีปัญหาอยู่ว่าสมการ (1) จำเป็นต้องเป็นเส้นตรงเสมอไปหรือไม่

กรณีที่ 1 ถ้า $B = 0$ และ $A \neq 0$ ดังนั้นเราได้

$$Ax + C = 0$$

นั่นคือ $x = -\frac{C}{A}$ ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงซึ่งตั้งได้ฉากกับแกน X ณ จุด $(-\frac{C}{A},0)$

กรณีที่ 2 ถ้า $B \neq 0$ ดังนั้นเราได้

$$y = (-\frac{A}{B})x + (-\frac{C}{B})$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{A}{B}$ และมี y-intercept $-\frac{C}{B}$ (แบบ slope - intercept)

กรณีที่ 3 ถ้า A = B = 0 เราต้องได้ C = 0 ดังนั้นสมการ (1) ในกรณีเราอาจเขียนได้เป็น

$$0x + 0y + 0 = 0$$

เราจะเห็นว่า ทุกจุด (x,y) ทำให้สมการนี้เป็นจริงเสมอ เราอาจกล่าวได้ว่า สมการนี้เป็นสมการของระนาบทั้งระนาบนั่นเอง

จากทั้งสามกรณีดังกล่าว ถ้า $A \neq 0$ หรือ $B \neq 0$ สมการ (1) ย่อมเป็นสมการของเส้นตรงเสมอ สมการกำลังหนึ่งเรามักเรียกกันว่า สมการลิเนียร์ **(linear equation)**

ตัวอย่าง 2.7.1 ให้สมการของเส้นตรง คือ

$$2x - y + 7 = 0$$

(1) จงลากเส้นตรงเส้นนี้

(2) จงหาความชันของเส้นตรงเส้นนี้

(3) จุด (20,46) และจุด (-10,-13) อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้หรือไม่

วิธีทำ (1) การลากเส้นตรง เราต้องหาจุดสองจุดบนเส้นตรงแล้วลากเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง และวิธีสะดวกก็คือหา x- และ y- intercept

ในการหา x-intercept ของ

$$2x - y + 7 = 0$$

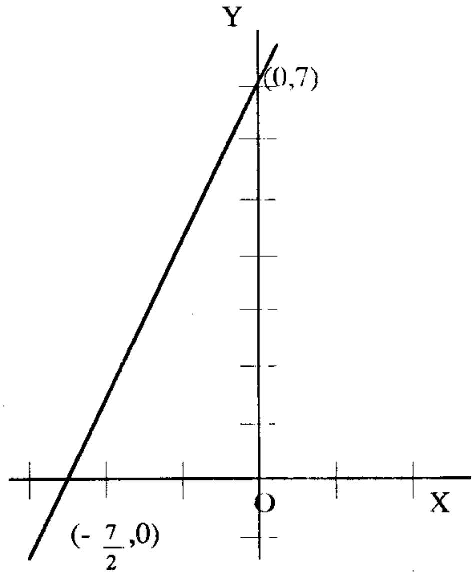
ให้ y = 0 เราได้ $x = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ x-intercept คือ $-\frac{7}{2}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $x = 0$ เราจะได้ $y = 7$

$\therefore$ y-intercept คือ 7

ดังนั้น เส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด $(-\frac{7}{2},0)$ และ $(0,7)$ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ



รูป 2.7.1

(2) จาก $2x - y + 7 = 0$

เราได้ $y = 2x + 7$

$\therefore$ ความชันของเส้นตรงเส้นนี้คือ 2

(3) จากนิยาม 2.6.1สมการ

$2x - y + 7 = 0$ และ

จุด (20,46) เราได้

$2 \times 20 - 46 + 7 \neq 0$

$\therefore$ แสดงว่าจุด (20,46) ไม่ได้อยู่บนเส้นตรง

และจุด (-10,-13) เราได้

$$2 \times (-10) - (-13) + 7 = 0$$

$\therefore$ แสดงว่าจุด (-IO,-13) อยู่บนเส้นตรง

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหา (1) intercepts

(2) ลากเส้น

(3) เขียนสมการในรูป dope - intercept

(4) ความชัน

จากเส้นตรงที่มีสมการดังต่อไปนี้

1.1 $2x + 5y + 3 = 0$ 1.2 $x - 3y + 7 = 0$

1.3 $x + y + 1 = 0$ 1.4 $-2x + y + 2 = 0$

1.5 $x - y + 12 = 0$ 1.6 $10x + y - 5 = 0$

1.7 $5x + 2y = 0$ 1.8 $3x - y + 4 = 0$

1.9 $x + 4y - 2 = 0$ 1.10 $x + 1 = 0$

1.11 $3y + 7 = 0$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ และ

(1) ขนาน

(2) ตั้งฉาก

กับเส้นต่อไปนี้

2.1 (-3,2); $3x - 7y + 4 = 0$ 1.2 (0, 1); $-x + 4y - 6 = 0$

2.3 (3,-2); $2x + 5 = 0$ 1.4 (1,2); $x - 2y + 6 = 0$

2.5 (-2,3); $5x \cancel{y} + 1 = 0$ 1.6 (0,1); $-7x + 2y - 3 = 0$

2.7 (6,3); $4y + 3 = 0$ 2.8 (-5,6); $x - 6y + 9 = 0$

3. จงหาค่า k ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

3.1 เมื่อเส้นตรงมีสมการเป็น $2x + 3y + k = 0$ ปิดเป็นรูปสามเหลี่ยมกับแกนพิกัดทั้งสองมีพื้นที่เป็น 27 ตารางหน่วย

3.2 เมื่อเส้นตรงมีสมการเป็น $2x + 3ky - 13 = 0$ ผ่านจุด (-2,4)

3.3 เมื่อเส้นตรงมีสมการเป็น $3x - ky - 8 = 0$ ทำมุม 45° กับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x + 5y - 17 = 0$

4. ถ้าเส้นตรง l มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1,y_1)$ และ

4.1 ขนานกับเส้นตรง l มีสมการเป็น $Ax + By = Ax_1 + By_1$

4.2 ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง l มีสมการเป็น $Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1$

5. จงหามุม

5.1 จากเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x + y - 4 = 0$ ไปยังเส้นตรงที่มีสมการเป็น $y - 2x + 1 = 0$

5.2 จากเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x - 5y + 1 = 0$ ไปยังเส้นตรงที่มีสมการเป็น $3x + y - 7 = 0$

6. ถ้าเส้น k และ l มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ และ $Dx + Ey + F = 0$ ตามลำดับ จงแสดงว่า θ มุม จาก k ไปยัง l คล้องตามสมการ

$$\tan\theta = \frac{AE - BD}{AD - BE}$$

2.8 จุดตัด (Point of Intersection)

ในการหาพิกัดของจุดตัดกันของเส้นตรงสองเส้นซึ่งไม่ขนานกันนั้น ตามนิยาม 2.6.1 พิกัดของจุดตัดจะต้องคล้องตามสมการของเส้นตรงที่กำหนดให้ทั้งสองเส้น เพราะฉะนั้น ปัญหาในการหาจุดตัดก็คือการแก้สมการที่กำหนดให้ทั้งสองนั่นเอง

ตัวอย่าง 2.8.1 จงหาจุดตัดของเส้นที่มีสมการเป็น

$x - 2y + 1 = 0$ และ

$2x + 3y - 7 = 0$

วิธีทำ $x - 2y + 1 = 0$ ....(1)

$2x + 3y - 7 = 0$ ....(2)

(1) x 2, $2x - 4y + 2 = 0$ ....(3)

(2) - (3), $7y - 9 = 0$

$$\therefore y = \frac{7}{9}$$

แทนค่า **y** ใน (1) หรือ (2) เราได้

$$x = \frac{11}{7}$$

ดังนั้น จุด $(\frac{11}{7}, \frac{9}{7})$คือจุดตัดตามต้องการ **ตอบ**

หมายเหตุ การแก้สมการเราอาจแก้ได้โดยง่ายโดยจัดรูปสมการทั้งสองเสียใหม่ในรูป

$x - 2y = 1$

$2x - 3y = 7$

เราได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)\times 3 - 7\times(-2)}{1\times 3 - 2\times(-2)}$$

$$= \frac{-3-i-14}{3+4} = \frac{11}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1\times 7 - 2\times(-1)}{1\times 3 - 2\times(-2)}$$

$$= \frac{7+2}{3+4} = \frac{7}{9}$$

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาจุดตัดของเส้นตรงสองเส้นที่มีสมการดังต่อไปนี้

1.1 $2x - y + 1 = 0$	1.2 $x - 4y + 2 = 0$
$x + y - 4 = 0$	$2x + y - 1 = 0$
1.3 $x + y - 3 = 0$	1.4 $3x + 2y + 6 = 0$
$5x + 2y - 12 = 0$	$5x - 3y - 4 = 0$
1.5 $x - y + 1 = 0$	1.6 $3x - 2y + 4 = 0$
$7x + 2y - 1 = 0$	$2x + y - 3 = 0$
1.7 $x + 3 = 0$	
$y + 5 = 0$	

2. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น A(-1,1), B(5,2) และ C(3,-1) จงหาสมการของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับด้านทั้งสาม และแสดงว่าเส้นทั้งสามตัดกันที่จุดๆ เดียวกัน ซึ่งเป็นจุดซึ่งเป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุดมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเท่ากัน ดังนั้น จุดตัดนั้นจึงเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

3. สามเหลี่ยม ABC ตามที่กำหนดให้ในข้อ จงหาสมการของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดไปตั้งฉากกับด้านตรงกันข้ามทั้งสามเส้นและจงแสดงว่าเส้นทั้งสามนั้นตัดกันที่จุดๆเดียวกัน

4 จงหาจุดมุมของสามเหลี่ยมที่ด้านทั้งสามมีสมการเป็น

4.1 $x - 5y + 11 = 0$	4.2 $2x - 7y + 11 = 0$
$8x + 3y + 2 = 0$	$9x - 2y - 39 = 0$
$9x - 2y - 30 = 0$	$7x + 5y + 9 = 0$
4.3 $6x + 26y - 63 = 0$	4.4 $x + 3y - 4 = 0$
$28x + 15y + 25 = 0$	$2x - 2y + 5 = 0$
$19x - 24y - 40 = 0$	$5x - y + 9 = 0$

4.5 $4x + 14y - 27 = 0$

$x - 2y - 4 = 0$

$8x + 6y + 1 = 0$

4.6 $7x - 2y + 3 = 0$

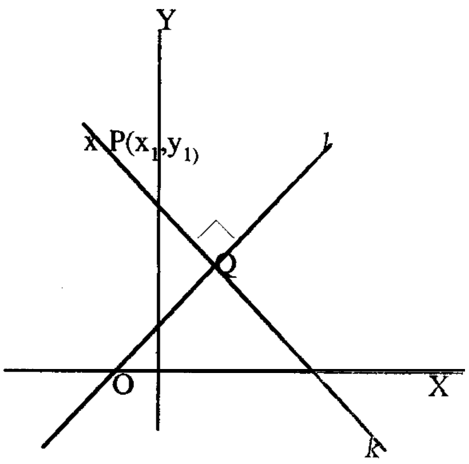
$x - 4y + 9 = 0$

$3x - y + 11 = 0$

5. ให้สี่เหลี่ยมด้านขนานมีจุดมุมเป็น A(-2,1), B(6,11), C(12,9) และ D(4,-1) จงหาจุดตัดของเส้นทะแยงมุม BD กับเส้นที่ผ่านจุด A และจุดกึ่งกลางของ CD และจงแสดงว่าจุดตัดเป็นจุดหนึ่งที่แบ่งเส้นทะแยงมุม BD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน
6. จงหาโปรเจคชันของจุด $(0,-\frac{4}{3})$ บนด้านของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น A(-2,0), B(4,0) และ C(0,6) และจงแสดงว่าจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

2.9 ระยะห่างของจุดจากเส้นตรง (Distance of a Point From a Straight Line)

ถ้า *l* เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ตามรูป 2.9.1 และ P เป็นจุดที่กำหนดให้และ Q เป็น



รูป 2.9.1

โปรเจคชันของ P บน *l* เราก็จะได้ระยะห่างของจุด P จากเส้นตรง *l* คือ $|PQ|$

ทฤษฎีบท 2.9.1 ระยะห่าง d ของจุด $P(x_1,y_1)$ จากเส้นตรง l **ที่มีสมการเป็น**

$$Ax + By + C = 0 \text{ คือ}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

พิสูจน์ ให้ k เป็นเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด P และตั้งได้ฉากกับเส้นตรง l ที่จุด Q ดังรูป 2.9.1

ถ้า l ไม่ขนานกับแกนพิกัดเราได้ความชันของ l คือ

$$-\frac{A}{B}$$

ดังนั้นความชันของ k คือ

$$\frac{-1}{-\frac{A}{B}} = \frac{B}{A}$$

เพราะฉะนั้น k มีสมการเป็น

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$$

หรือ $Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1$

และจากสมการของ l เราได้

$$Ax + By = -C$$

แก้สมการ k และ l เพื่อหาพิกัดของจุด Q เราได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} Bx_1 - Ay_1 & -A \\ -C & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & -A \\ A & B \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2}$$

และ $$y = \frac{\begin{vmatrix} B & Bx_1 - Ay_1 \\ A & -C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & -A \\ A & B \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{B^2 + A^2}$$

$\therefore$ พิกัดของจุด Q ก็คือ

$$\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2}, \frac{A^2y_1 - BC - ABx_1}{B^2 + A^2}\right)$$

ดังนั้นระยะห่าง d ระหว่างจุด P และ Q ก็จะหาได้จากสูตรดังนี้

$$d^2 = \left[\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} \quad x_1\right]^2 + \left[\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2} - y_1\right]^2$$

$$= \left[\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC - A^2x_1 - B^2x_1}{A^2 + B^2}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC - A^2y_1 - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right]^2$$

$$= \frac{(-A(Ax_1 + By_1 + C))^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{(-B(Ax_1 + By_1 + C))^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$= \frac{A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2 + B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$= \frac{(A^2 + B^2)(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$= \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

นั่นคือ $\quad d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ตัวอย่าง 2.9.1 จงหาระยะห่างของจุด (-3,-2) จากเส้นตรง

$$4x - 5y - 7 = 0$$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.9.1 เราได้

$$d = \frac{|4 \times (-3) - 5 \times (-2) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{|-9|}{\sqrt{41}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{41}}$$

หรือ $d = \dfrac{9\sqrt{41}}{41}$

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาระยะห่างของจุดที่กำหนดให้จากเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $3x - 4y - 7 = 0$, $(-1,2)$ 1.2 $2x + 5 = 0$, $(3,-2)$

1.3 $2x - 3y - 11 = 0$, $(0,1)$ 1.4 $-x + 2y - 3 = 0$, $(1,-3)$

1.5 $12x - 5y + 4 = 0$, $(0,2)$ 1.6 $x + y - 1 = 0$, $(-3,5)$

1.7 $4x + 3y - 5 = 0$, $(-3,7)$ 1.8 $x - 3y + 5 = 0$, $(3,-4)$

1.9 $2y - 3 = 0$, $(7,-6)$ 1.10 $6x - 8y + 3 = 0$, $(\frac{1}{2},\frac{-3}{2})$

2. จงหาความสูงจากจุดมุม B ถึงด้านตรงข้าม AC และพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมดังต่อไปนี้

2.1 $A(-1,1)$, $B(5,2)$, $C(3,-1)$ 2.2 $A(-2,1)$, $B(3,3)$, $C(0,-2)$

2.3 $A(-2,1)$, $B(1,7)$, $C(5,2)$ 1.4 $A(5,-2)$, $B(0,-7)$, $C(1,9)$

2.5 $A(-4,-1)$, $B(-1,5)$, $C(4,-3)$

3. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

3.1 $5x - 12y + 2 = 0$
$5x - 15 - 7 = 0$

9.2 $4x + 3y - 7 = 0$
$8x + 6y - 5 = 0$

3.3 $x - 2y + 11 = 0$
$-x + 2y - 13 = 0$

4. ระยะห่างของจุด $(5,-2)$ จากเส้นตรง l ซึ่งขนานกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

$3x - 4y + 7 = 0$,

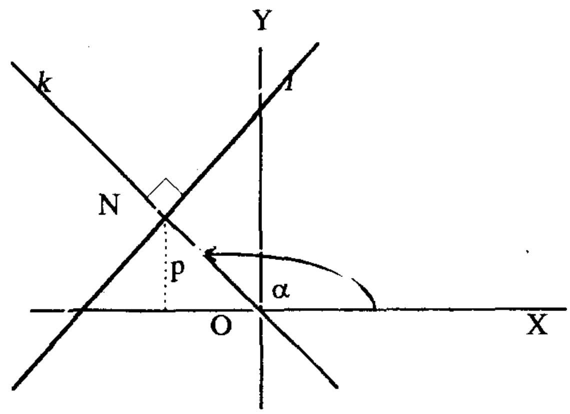
4 หน่วย จงหาสมการของเส้นตรง l

5. ในรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็น $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ จงหาระยะทางจากจุด P_2 ไปยังเส้นตรง P_1P_3 และจงแสดงว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยมคือ

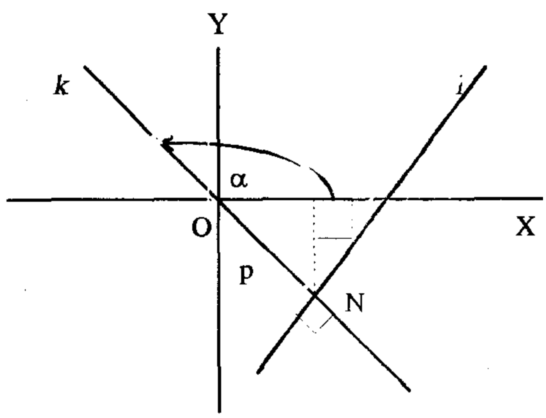
$$\frac{1}{2}\left|(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)\right|$$

2.10 สมการของเส้นตรงแบบนอร์มอล (Normal form of Equation of a Straight Line)

คำว่านอร์มอลในที่นี้หมายถึง **ตั้งได้**ฉาก ให้ *l* เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ *k* เป็น



รูป 2.10.1



รูป 2.10.2

เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งลากผ่านจุดกำเหนิด O ไปตั้งได้ฉากกับ *l* ที่ N ถ้า α เป็นความเอียงของ *k* และ

$$p = ON$$

เราจะหาสมการของเส้นตรง l ในรูปของ α และ p เนื่องจาก k มีความชัน $\tan\alpha$ และ l ตั้งได้ฉากกับ k ดังนั้น l มีความชัน

$$-\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$$

ในกรณีรูป 2.10.1 เราได้

$$p = |ON| \text{ และ}$$

พิกัดของจุด $N = (|ON|\cos(180^\circ - a), |ON|\sin(180^\circ - a))$

$$= (p\cos a, p\sin a)$$

ในกรณีรูป 2.10.2 เราได้

$$p = -|ON| \text{ และ}$$

พิกัดของจุด $N = (|ON|\cos(180^\circ + a), |ON|\sin(180^\circ + a))$

$$= ((-p)(-\cos a), (-p)(-\sin a))$$

$$= (p\cos a, p\sin a)$$

เนื่องจากเราทราบความชันของ l และพิกัดของจุด N บนเส้นตรง l

ดังนั้นเราได้สมการของ l เป็น

$$y - p\sin\alpha = (-\cot\alpha)(x - p\cos\alpha)$$

$$= (-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})(x - p\cos\alpha)$$

$$y\sin\alpha - p\sin^2\alpha = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$$

หรือ $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงแบบนอร์มอลของเส้นตรง l

ในการหาสมการของเส้นตรง l ใดๆ ให้อยู่ในแบบนอร์มอลสมมุติว่า l มีสมการเป็น

$$Ax + By + C = 0$$

ถ้า s เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ เราได้สมการของเส้นตรง l อีกรูปหนึ่งว่า

$$sAx + sBy + sC = 0$$

เมื่อเทียบกับสมการของเส้นตรง l ในแบบนอร์มอล

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

เราจึงได้

$$sA = \cos a$$

$$sB = \sin a$$

และ $sC = -p$

เพราะฉะนั้น $s^2A^2 = \cos^2\alpha$

และ $s^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$$= 1$$

หรือ $s = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

นั่นคือ ถ้า $Ax + By + C = 0$ เป็นสมการของเส้นตรง *l* เราจะได้

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

เป็นสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง *l*

เนื่องจาก $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ จึงทำให้

$$0 \leq \sin\alpha \leq 1$$

และเพราะว่า $sB = \sin\alpha$

ดังนั้น ถ้า $B \neq 0$ แล้ว sB ย่อมเป็นบวก

เพราะฉะนั้น s ต้องมีเครื่องหมายเช่นเดียวกับ B

ถ้า $B = 0$ เส้นตรง *l* ก็จะขนานกับแกน Y และ

$$\alpha = 0^\circ$$

และสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง *l* ก็คือ

$$x + \frac{C}{A} = 0$$

ตัวอย่าง 2.10.1 เส้นตรง *l* มีสมการเป็น

$$3x - 4y + 6 = 0$$

จงเขียนสมการนี้ในแบบนอร์มอลและจงหาค่า α และ p

วิธีทำ จากโจทย์เราได้ A = 3,

$$B = -4$$

และ C = 6

เนื่องจาก B เป็นลบ

ดังนั้น $s = \dfrac{1}{-\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$$= -\frac{1}{5}$$

เพราะฉะนั้นสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง *l* คือ

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

เมื่อเทียบกับสมการ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

เราได้ $\cos a = -\frac{3}{5}$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

และ $p = \frac{6}{5}$

เนื่องจาก $\cos \alpha$ เป็นลบ

ดังนั้น $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

และจากตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราได้

$$\alpha = 126^\circ 52'$$

ทฤษฎีบท 2.10.1 สำหรับ $\overline{d}$ เป็นระยะทางจากเส้นตรง *l* ไปยังจุด $P(x_1,y_1)$ ถ้า *l* มีสมการในแบบนอร์มอลเป็น

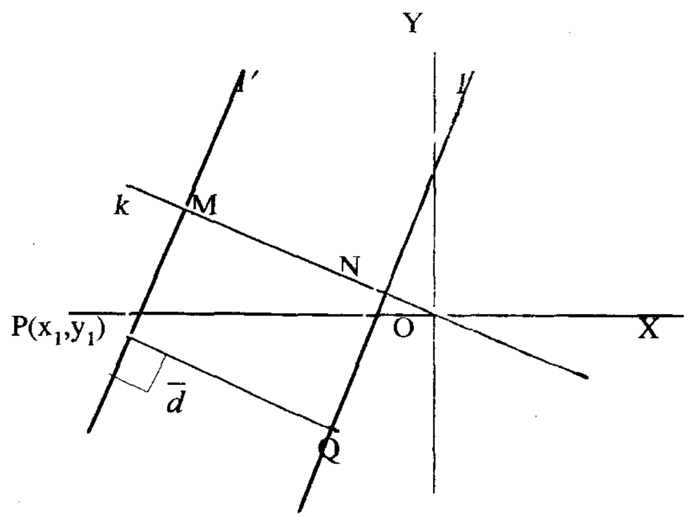
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

แล้ว $\overline{d} = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$

พิสูจน์ ให้ *l* เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งมีสมการในแบบนอร์มอลเป็น

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

และให้ $P(x_1,y_1)$ เป็นจุดที่กำหนดให้ ตามรูป 2.1.2



รูป 2.10.2

ถ้า *k* เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุดกำเหนิด O ไปตั้งฉากกับ *l* ที่จุด P
Q เป็นโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง *l* และ *l′* เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และขนานกับเส้นตรง *l* ตัดเส้นตรง *k* ที่จุด M แล้ว

$$\overline{QP} = \overline{NM}$$

ระยะทาง $\overline{d}$ จากเส้นตรง *l* ไปยังจุด $P(x_1,y_1)$ ก็คือ QP สมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง *l′* ก็คือ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \overline{OM} = 0$$

เนื่องจากจุด $P(x_1,y_1)$ อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้

ดังนั้น $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - \overline{OM} = 0$

แต่เส้นตรงที่กำหนดทิศทางตาม *k*

$$\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$$

ดังนั้น $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - \overline{ON} = \overline{NM}$

แต่ $\overline{ON} = p$ และ $\overline{NM} = \overline{QP}$

นั่นคือ $\bar{d} = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$

หมายเหตุ $\bar{d}$ จะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับจุด $P(x_1,y_1)$ จะอยู่เหนือหรือใต้เส้นตรง *l* ถ้า *l* ไม่ขนานกับแกน Y

แบบฝึกหัด 2.8

1. จงลากเส้นตรงและเขียนสมการแบบนอร์มอล ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1.1 a , p 30° = 4   1.2 α = 30°, p = 6

1.3 a = 135°, = 7   1.4 a = 45° p $\sqrt{2}$

1.5 a = 90°, = -5   1.6 a = 120°, = p 3

1.7 a = 120°, = 7   1.8 a = 0" p 3

1.9 a = p 60°, = -3   1.2 α = 45°, p = 0

2. จงเปลี่ยนสมการของเส้นตรงที่มีสมการดังต่อไปนี้ ให้อยู่ในแบบนอร์มอลและหาค่าของ a 66% p

2.1 $x + y - 3 = 0$ 2.2 $x - 3y + 6 = 0$

2.3 $2x + 3y - 10 = 0$ 2.4 $3x - 4y + 7 = a$

2.5 $4x + 3y - 5 = 0$ 2.6 $5x + 12y = 0$

2.7 $3y - 2 = 0$ 2.8 $x + y - \sqrt{2} = 0$

2.9 $2x - 3 = 0$ 2.10 $5x - 12y = 0$

2.11 $2x - y + 5 = 0$ 2.12 $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$

3. จงหาสมการของเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

3.1 แบบนอร์มอลของเส้นตรงที่ผ่านจุด (6,8) และตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ต่อจุดนี้กับจุดกำเหนิด

3.2 มีความเอียง 60° และระยะทางจากจุดกำเหนิดถึงเส้นตรงเส้นนี้เป็น 6

3.3 ขนานกับเส้นตรง $3x - y + 2 = 0$ และระยะทางจากจุดกำเหนิดถึงเส้นตรงเส้นนี้เป็น -2

3.4 ผ่านจุด (1,-7) และระยะทางจากแต่ละเส้นไปยังจุดกำเหนิดเป็น 5