บทที่ 1
เส้นพิกัดและระนาบ
(Coordinate Lines and Planes)

1.0 คำนำ

เรขาคณิตเบื้องต้นที่สอนกันอยู่ในโรงเรียนมัธยมศึกษานั้นเราเรียกว่าเรขาคณิตแบบยูคลิด(Euclidean Geometry) ยูคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกในราว 800 B.C. หวังว่าผู้อ่านคงคุ้นเคยกับหลักการและทฤษฎีบทในเรขาคณิตแบบนั้นแล้วเป็นอย่างดี สำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์เราจะได้นำเอาวิธีทางพีชคณิตมาร่วมกับวิธีทางเรขาคณิตแบบยูคลิดในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ด้วยวิธีการนี้ทำให้สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่ายและมากปัญหากว่าบางปัญหาไม่สามารถแก้ได้ด้วยเรขาคณิตแบบยูคลิดแต่เพียงอย่างเดียว นักคณิตศาสตร์และปรัชญาชาวฝรั่งเศส ชื่อ เดอส์คาร์ทส์ (Descartes 1596-1650) ได้นำความคิดพื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์มาให้เราได้รู้จักกัน ความคิดพื้นฐานนี้เองเป็นแนวทางอันสำคัญยิ่งที่แสดงความเป็นจริงทางเรขาคณิตในรูปของพีชคณิต โดยการแทนชื่อจุดใดๆในระนาบด้วยคู่หนึ่งของจำนวนจริง และเรียกจำนวนจริงคู่นั้นว่า **พิกัด**(Coordinate) ของจุดนั้น แม้ว่าเราจะได้พบแนวความคิดอันนี้มาแล้วก็ตาม เราก็จะได้ศึกษาเรื่องพิกัดและการพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานบางทฤษฎีบทเพื่อให้เข้าใจเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ดียิ่งขึ้น

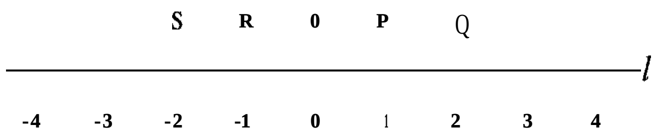
1.1 เส้นพิกัด (Coordinate Line)

ถ้ามีจุดสองจุด A และ B กำหนดเส้นตรง l หมายความว่าเส้นตรง l ย่อมผ่านจุด A และ B จุด A และ B ไม่เพียงแต่กำหนดเส้นตรง l เท่านั้น ยังกำหนด **ส่วนของเส้นตรง**

หรือ เซกเมนต์ (Segment) AB ของเส้นตรง l อีกด้วย ส่วนของเส้นตรง AB กับส่วนของเส้นตรง CD อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือคนละเส้นก็ตาม ถ้ามีความยาวเท่ากันเราจะกล่าวว่า

$$AB = CD$$

บนเส้นตรง l ที่กำหนดให้ใดๆ ถ้าเราเลือกจุดๆหนึ่ง O และเรียกว่า**จุดกำเนิด** (Origin)



รูป 1.1.1

ถ้าแบ่งส่วนย่อยเท่าๆกันทั้งทางซ้ายและทางขวาของจุดกำเนิด O โดยให้ศูนย์อยู่ที่จุดกำเนิดดัง รูป 1.1.1 เราได้ว่าทุกๆจุดบนเส้น l จะสมนัยกันกับจำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ในทางกลับกันจำนวนจริงทุกจำนวนก็สมนัยกับจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง l จากความจริงอันนี้จึงกล่าวได้ว่า เส้นตรง l มีระบบพิกัด(Coordinate System) และเส้นตรง l ถูกเรียกว่า **เส้นพิกัด** ถ้าจำนวนจริง a สมนัยกับจุด A เรียกจำนวนจริง a ว่าเป็น **พิกัดของจุด** A ดังนั้น จากรูป 1.1.1 เราจึงกล่าวได้ว่า

O มีพิกัด 0

P ,, ,, 1

Q ,, ,, 2

R ,, ,, -1

S ,, ,, -2

ฯลฯ

1.2 ระยะทางบนเส้นพิกัด (Distance on a Coordinate Line)

นิยาม 1.2.1 ความยาวของเซกเมนต์ AB บนเส้นพิกัด l ซึ่งเขียนด้วยสัญลักษณ์ $|AB|$ มีค่าเท่ากับค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ b - a นั่นคือ

$$\boxed{|AB| = |b - a|}$$

เมื่อ a และ b เป็นพิกัดของจุด A และ B ตามลำดับ

หมายเหตุ ความยาวของเซกเมนต์ AB อาจเรียกได้ว่า **ระยะทาง** (Distance) ระหว่างจุด A และ B จึงกล่าวได้ว่า AB = CD ก็ต่อเมื่อ $|AB| = |CD|$

นิยาม 1.2.2 ระยะที่กำหนดทิศทาง (Directed Distance) จากจุด A ถึงจุด B บนเส้นพิกัดซึ่งเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{AB}$ มีค่าเท่ากับ b - a
นั่นคือ

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}$$

เมื่อ a และ b เป็นพิกัดของ A และ B ตามลำดับ

ข้อสังเกต ระยะทางที่กำหนดทิศทาง จากจุด A ถึงจุด B อาจมีค่าบวกหรือค่าลบก็ได้ แต่ระยะทางระหว่าง A กับ B ต้องมีค่าบวกเสมอ

ถ้า B อยู่ทางขวาของ A เราย่อมได้ b > a และ

$$|AB| = |b - a|$$
$$= b - a$$

ดังนั้น
$$\overline{AB} = b - a$$
$$= |AB|$$

แต่ถ้า B อยู่ทางซ้ายของ A เราจะได้ a > b และ

$$|AB| = |b - a|$$
$$= |a - b|$$
$$= a - b$$

ดังนั้น

$$\overline{AB} = b - a$$
$$= -(a - b)$$
$$= -|AB|$$

จากนิยาม 1.2.2 เราทราบต่อไปอีกว่า ระยะที่กำหนดทิศทางสำหรับจุดสองจุด A และ B ใดๆบนเส้นพิกัดเส้นหนึ่ง เราได้ว่า

$$\boxed{\overline{AB} = -\overline{BA}}$$

ถ้าเราทราบระยะที่กำหนดทิศทางจากจุด A ถึงจุด B เราไม่เพียงแต่ทราบความยาวของเซกเมนต์ AB เท่านั้นเรายังทราบว่า B อยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของ A อีกด้วย

ตัวอย่าง 1.2.1 $\overline{AB} = -3$ เราทราบว่า ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B คือ 3 และจุด B อยู่ทางซ้ายของ A

ตัวอย่าง 1.2.2 ถ้า A, B และ C เป็นจุดสามจุดบนเส้นพิกัดเส้นเดียวกัน จงแสดงว่า

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

วิธีทำ กำหนดให้ A, B และ C มีพิกัดเป็น a, b และ c ตามลำดับ

เนื่องจาก $\overline{AB} = b - a$,

$\overline{BC} = c - b$ และ

$\overline{AC} = c - a$

เพราะฉะนั้น $\overline{AB} + \overline{BC} = (b - a) + (c - b)$

= c - a

= AC

แบบฝึกหัด 1.1

1.

1.11 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

2. กำหนดให้ O, A, B, C, D และ E เป็นจุดบนเส้นพิกัดเดียวกันและมีพิกัด เป็น 0, -5, 4, $\frac{3}{2}$, $-\sqrt{5}$ และ $-\frac{11}{5}$ ตามลำดับ จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุดเหล่านี้ และหาค่าของ

2.1 $\overline{OC}$

2.2 $\overline{OD}$

2.3 $|BE|$

2.4 $|AC|$

2.5 $\overline{AC}+\overline{CE}$

2.6 $|AC|+|CE|$

2.7 $\overline{AD}+\overline{BC}$

2.8 $\overline{DE}-\overline{ED}$

2.9 $|OD|+|DO|$

2.10 $|AB|+|BD|+|DE|$