บทที่ 1
เส้นพิกัดและระนาบ
(Coordinate Lines and Planes)

1.0 คำนำ

เรขาคณิตเบื้องต้นที่สอนกันอยู่ในโรงเรียนมัธยมศึกษานั้นเราเรียกว่าเรขาคณิตแบบยูคลิด(Euclidean Geometry) ยูคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกในราว 800 B.C. หวังว่าผู้อ่านคงคุ้นเคยกับหลักการและทฤษฎีบทในเรขาคณิตแบบนั้นแล้วเป็นอย่างดี สำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์เราจะได้นำเอาวิธีทางพีชคณิตมาร่วมกับวิธีทางเรขาคณิตแบบยูคลิดในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ด้วยวิธีการนี้ทำให้สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่ายและมากปัญหากว่าบางปัญหาไม่สามารถแก้ได้ด้วยเรขาคณิตแบบยูคลิดแต่เพียงอย่างเดียว นักคณิตศาสตร์และปรัชญาชาวฝรั่งเศส ชื่อ เดอส์คาร์ทส์ (Descartes 1596-1650) ได้นำความคิดพื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์มาให้เราได้รู้จักกัน ความคิดพื้นฐานนี้เองเป็นแนวทางอันสำคัญยิ่งที่แสดงความเป็นจริงทางเรขาคณิตในรูปของพีชคณิต โดยการแทนชื่อจุดใดๆในระนาบด้วยคู่หนึ่งของจำนวนจริง และเรียกจำนวนจริงคู่นั้นว่า **พิกัด**(Coordinate) ของจุดนั้น แม้ว่าเราจะได้พบแนวความคิดอันนี้มาแล้วก็ตาม เราก็จะได้ศึกษาเรื่องพิกัดและการพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานบางทฤษฎีบทเพื่อให้เข้าใจเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ดียิ่งขึ้น

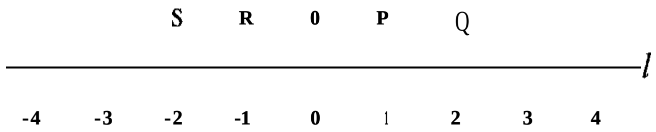
1.1 เส้นพิกัด (Coordinate Line)

ถ้ามีจุดสองจุด A และ B กำหนดเส้นตรง l หมายความว่าเส้นตรง l ย่อมผ่านจุด A และ B จุด A และ B ไม่เพียงแต่กำหนดเส้นตรง l เท่านั้น ยังกำหนด **ส่วนของเส้นตรง**

หรือ เซกเมนต์ (Segment) AB ของเส้นตรง *l* อีก**ด้วย** ส่วนของเส้นตรง AB กับส่วนของเส้นตรง CD อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือคนละเส้นก็**ตาม** ถ้ามีความยาวเท่ากันเราจะกล่าวว่า

$$AB = CD$$

บนเส้นตรง *l* ที่กำหนดให้ใดๆ ถ้าเราเลือก**จุด**ๆหนึ่ง O และเรียกว่า**จุดกำเนิด** (Origin)



รูป 1.1.1

ถ้าแบ่งส่วนย่อยเท่าๆกัน**ทั้ง**ทางซ้ายและทางขวาของ**จุด**กำเนิด O โดยให้ศูนย์อยู่ที่จุดกำเนิดดังรูป 1.1.1 เราได้ว่าทุกๆจุดบนเส้น *l* จะสมนัยกัน**กับจำ**นวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ในทางกลับกันจำนวนจริงทุกจำนวนก็สมนัยกับจุดใด**จุดหนึ่ง**บนเส้นตรง *l* จากความจริงอันนี้จึงกล่าวได้ว่า เส้นตรง *l* มีระบบพิกัด(Coordinate System) และเส้นตรง *l* ถูกเรียกว่า **เส้นพิกัด** ถ้าจำนวนจริง a สมนัยกับจุด A เรียก**จำนวน**จริง a ว่าเป็น **พิกัดของจุด** A ดังนั้นจากรูป 1.1.1 เราจึงกล่าวได้ว่า

O มีพิกัด 0

P „ „ 1

Q „ „ 2

R „ „ -1

S „ „ -2

ฯลฯ

1.2 ระยะทางบนเส้นพิกัด (Distance on a Coordinate Line)

นิยาม 1.2.1 ความยาวของเซกเมนต์ AB บนเส้นพิกัด *l* ซึ่งเขียนด้วยสัญลักษณ์ $|AB|$ มีค่าเท่ากับค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ b - a นั่นคือ

$$\boxed{|AB| = |b - a|}$$

เมื่อ a และ b เป็นพิกัดของจุด A และ B ตามลำดับ

หมายเหตุ ความยาวของเซกเมนต์ AB อาจเรียกได้ว่า **ระยะทาง** (Distance) ระหว่างจุด A และ B จึงกล่าวได้ว่า AB = CD ก็ต่อเมื่อ $|AB| = |CD|$

นิยาม 1.2.2 ระยะที่กำหนดทิศทาง (Directed Distance) จากจุด A ถึงจุด B บนเส้นพิกัดซึ่งเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{AB}$ มีค่าเท่ากับ b - a นั่นคือ

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}$$

เมื่อ a และ b เป็นพิกัดของ A และ B ตามลำดับ

ข้อสังเกต ระยะทางที่กำหนดทิศทาง จากจุด A **ถึงจุด** B อาจมีค่าบวกหรือค่าลบก็ได้ แต่ระยะทางระหว่าง A กับ B ต้องมีค่าบวกเสมอ

ถ้า B อยู่ทางขวาของ A เราย่อมได้ $b > a$ และ

$$|AB| = |b - a|$$
$$= b - a$$

ดังนั้น
$$\overline{AB} = b - a$$
$$= |AB|$$

แต่ถ้า B อยู่ทางซ้ายของ A เราจะได้ $a > b$ และ

$$|AB| = |b - a|$$
$$= |a - b|$$
$$= a - b$$

ดังนั้น

$$\overline{AB} = b - a$$
$$= -(a - b)$$
$$= -|AB|$$

จากนิยาม 1.2.2 เราทราบต่อไปอีกว่า ระยะที่กำหนดทิศทางสำหรับจุดสองจุด A และ B ใดๆบนเส้นพิกัดเส้นหนึ่ง เราได้ว่า

$$\boxed{\overline{AB} = -\overline{BA}}$$

ถ้าเราทราบระยะที่กำหนดทิศทางจากจุด A ถึงจุด B เราไม่เพียงแต่ทราบความยาวของเซกเมนต์ AB เท่านั้นเรายังทราบว่า B อยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของ A อีกด้วย

ตัวอย่าง 1.2.1 $\overline{AB} = -3$ เราทราบว่า ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B คือ 3 และจุด B อยู่ทางซ้ายของ A

ตัวอย่าง 1.2.2 ถ้า A, B และ C เป็นจุดสามจุดบนเส้นพิกัดเส้นเดียวกัน จงแสดงว่า

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

วิธีทำ กำหนดให้ A, B และ C มีพิกัดเป็น a, b และ c ตามลำดับ

เนื่องจาก $\overline{AB} = b - a$,

$\overline{BC} = c - b$ และ

$\overline{AC} = c - a$

เพราะฉะนั้น $\overline{AB} + \overline{BC} = (b - a) + (c - b)$

$= c - a$

$= AC$

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้ O, I, A, B, C และ D เป็นจุดบนเส้นพิกัดเส้นเดียวกันซึ่งมีพิกัด เป็น 0, 1, 3, -2, $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{4}{3}$ ตามลำดับ จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุดเหล่านี้และหาค่าของ

1.1 $\overline{AB}$	1.2 $\overline{BA}$
1.3 $\|AB\|$	1.4 $\|BA\|$
1.5 $\overline{OD}$	1.6 $\|OC\|$
1.7 $\|IC\| + \|CA\|$	1.8 $\overline{IC}+\overline{CA}$
1.9 $\|DO\| - \|OB\|$	1.10 $\overline{ID} + \|ID\|$
1.11 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$	

2. กำหนดให้ O, A, B, C, D และ E เป็นจุดบนเส้นพิกัดเดียวกันและมีพิกัดเป็น 0, -5, 4, $\frac{3}{2}, -\sqrt{5}$ และ $-\frac{11}{5}$ ตามลำดับ จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุดเหล่านี้และหาค่าของ

2.1 $\overline{OC}$	2.2 $\overline{OD}$
2.3 $\|BE\|$	2.4 $\|AC\|$
2.5 $\overline{AC}+\overline{CE}$	2.6 $\|AC\| + \|CE\|$
2.7 $\overline{AD}+\overline{BC}$	2.8 $\overline{DE}-\overline{ED}$
2.9 $\|OD\| + \|DO\|$	2.10 $\|AB\| + \|BD\| + \|DE\|$

3. กำหนดให้ P, Q, R, S และ T เป็นจุดบนเส้นพิกัดเส้นเดียวกันและมีพิกัดเป็น -7, $\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}$, 4 และ $\frac{13}{3}$ ตามลำดับ จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุดเหล่านี้และหาค่าของ

3.1 $\overline{PS}$	3.2 $\lvert RT \rvert$
3.3 $\overline{RQ}$	3.4 $\lvert SQ \rvert$
3.5 $\overline{TR} + \overline{RS}$	3.6 $\lvert TO \rvert + \lvert QR \rvert$
3.7 $\lvert PR \rvert + \lvert RT \rvert$	3.8 $\overline{PR} + \overline{RT} + \overline{TP}$
3.9 $\lvert PR \rvert + \lvert QS \rvert + \lvert RT \rvert$	3.10 $\lvert PT \rvert - \lvert TS \rvert$

4. กำหนดให้ U, V, W, X และ Y เป็นจุดบนเส้นพิกัดเส้นเดียวกันและมีพิกัดเป็น $3\sqrt{2}, \sqrt{5}$, 1, -2 และ -7 ตามลำดับ จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุด เหล่านี้และหาค่าของ

4.1 $\lvert UW \rvert$	4.2 $\overline{VY}$
4.3 $\overline{XV}$	4.4 $\lvert UV \rvert + \lvert VW \rvert$
4.5 $\overline{UW} + \overline{WV}$	4.6 $\lvert VW \rvert + \lvert WY \rvert$
4.7 $\lvert XY \rvert + \lvert YU \rvert$	4.8 $\overline{UX} + \overline{VW} + \overline{XV}$
4.9 $\overline{UY} + \overline{VX} + \overline{YX}$	4.10 $\overline{UY} + \overline{YW} + \overline{WY} + \overline{XV}$

5. ถ้ากำหนดให้ A, B และ C เป็นจุดสามจุดบนเส้นพิกัดเดียวกันจะมีเงื่อนไขอะไรบ้างที่ทำให้

$$\lvert AB \rvert + \lvert BC \rvert = \lvert AC \rvert$$

และ D เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นพิกัดเส้นนี้ จงพิสูจน์ว่า

5.1 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$

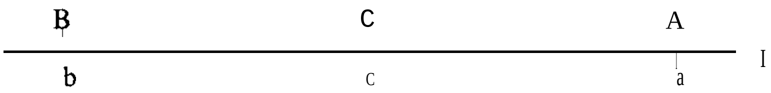
5.2 $\overline{AB}\,\overline{CD} + \overline{AC}\,\overline{DB} + \overline{AD}\,\overline{BC} = 0$

5.3 $\overline{DA}^2\,\overline{BC} + \overline{DB}^2\,\overline{CA} + \overline{DC}^2\,\overline{AB} = \overline{AB}\,\overline{BC}\,\overline{AC}$

1.3 การแบ่งเซกเมนต์ตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ (division of a Segment in a Given Ratio)

ทฤษฎีบท 1.3.1 **ถ้า A และ B มีพิกัด a และ b ตามลำดับ แล้วจุดกึ่งกลางของ AB มีพิกัดเป็น** $\frac{a+b}{2}$

พิสูจน์ ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดบนเส้นพิกัด l ให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ AB และให้ C มีพิกัด c ดังรูป 1.3.1



รูป 1.3.1

เนื่องจาก $\overline{AC} = c - a$,

$\overline{CB} =$ **b - c** และ

$AC = CB$

เพราะฉะนั้น c - a = b - c

นั่นคือ $\boxed{c = \frac{a+b}{2}}$

ตัวอย่าง 1.3.1 ถ้ากำหนดให้ A มีพิกัด -1 และ B มีพิกัด 4 จุดกึ่งกลางของ AB มีพิกัด $\frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$

ทฤษฎีบท 1.3.2 **สำหรับจุดสามจุด A, B และ C ใดๆ บนเส้นพิกัดเส้นหนึ่ง ถ้า A และ B มีพิกัดเป็น a และ b ตามลำดับและ** $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$ **แล้ว C ย่อมมีพิกัดเป็น:** $\boxed{c = \frac{a+rb}{1+r}}$

พิสูจน์ กำหนดให้ a, b และ c เป็นพิกัดของจุด A, B และ C ตามลำดับ และ

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$$

เราจึงได้ $\frac{c-a}{b-c} = r$

$$\therefore c - a = r(b-c)$$

$$= rb - rc$$

$$\therefore c + rc = a + rb$$

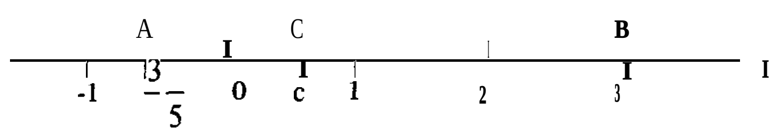
$$\therefore (1+r)c = a + rb$$

$$\therefore c = \frac{a+rb}{1+r}$$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 13.2 แสดงให้เห็นว่า C แบ่งเซกเมนต์ AB ด้วยอัตราส่วน r

ตัวอย่าง 1.3.2 ถ้ากำหนดให้ A และ B มีพิกัด $-\frac{3}{5}$ และ 3 ตามลำดับ จงหาพิกัด c ของจุด C ซึ่งอยู่ที่จุดที่แบ่งเซกเมนต์ AB ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกันและอยู่ใกล้ A กว่า B

วิธีทำ



รูป 13.2

จากโจทย์เราได้ $\overline{CB} = 2\overline{AC}$

ดังนั้น $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore c = \frac{-\frac{3}{5} + (\frac{1}{2} \times 3)}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\text{z}\ \frac{-6+15}{10}\ \text{x}\ \frac{2}{3}$$

$$\text{Z}\ \frac{9}{10}\ \text{X}\ \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{5}$$

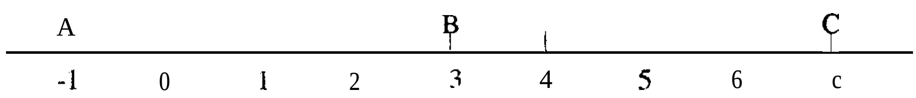
<u>**ตอบ**</u>

หมายเหตุ เราอาจตรวจสอบคำตอบนี้ได้โดยหาค่า $|AC|$ และ $|AB|$ แล้วแสดงให้เห็นว่า

$$|AC| = \frac{|AB|}{3}$$

ตัวอย่าง 1.3.3 กำหนดให้ A และ B มีพิกัด -1 และ 3 ตามลำดับจงหาพิกัด c ของ C ซึ่งทำให้ได้ $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -2$

วิธีทำ



รูป 1.3.3

ตามทฤษฎีบท 1.3.2 เรามี a = -1, b = 3 และ r = -2

เพราะฉะนั้น $c = \dfrac{-1+(-2)\times 3}{1-2}$

$= 7$ ตอบ

ตรวจสอบคำตอบ เราอาจทำได้โดยง่ายโดยการแสดงให้เห็นว่า $\overline{AC} = 8$ และ $\overline{CB} = -4$

เราจึงได้ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -2$ ตามต้องการ

ข้อสังเกต ในกรณีที่ r เป็นลบ เราพบว่า C อยู่ภายนอกเซกเมนต์ AB และถ้า r เป็นบวก C ย่อมอยู่ภายในเซกเมนต์ AB

แบบฝึกหัด *1.2*

1. กำหนดให้ A, B และ D อยู่บนเส้นพิกัดเส้นเดียวกันและมีพิกัดเป็น 2, 4 และ -5 ตามลำดับ จงหา

    1.1 พิกัดของจุดกึ่งกลางของ AB

    1.2 พิกัดของจุดที่แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน

    1.3 พิกัดของจุดที่แบ่ง BD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน

    1.4 พิกัดของจุด C เมื่อ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -4$

    1.5 พิกัดของจุด C เมื่อ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \sqrt{2}$

    1.6 พิกัดของจุด C เมื่อ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 2$

    1.7 พิกัดของจุด C เมื่อ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\dfrac{99}{100}$

    1.8 สมมุติว่า D เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ AB ในอัตราส่วน r จงหาค่าของ r

    1.9 สมมุติว่า B เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ DA ในอัตราส่วน r จงหาค่าของ r

1.10 สมมุติว่า A เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ BD ในอัตราส่วน r จงหาค่าของ r

2. กำหนดให้ P, Q และ R อยู่บนเส้นพิกัดเส้นเดียวกันและมีพิกัดเป็น 7, -4 และ 2 ตามลำดับ จงหา

2.1 พิกัดของจุดกึ่งกลางของ PR

2.2 พิกัดของจุดซึ่งแบ่ง RQ ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

2.3 พิกัดของจุด S เมื่อ $\frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}} = 4$

2.4 พิกัดของจุด S เมื่อ $\frac{\overline{QS}}{\overline{RS}} = -1$

2.5 พิกัดของจุด S เมื่อ $\frac{\overline{PS}}{\overline{SR}} = \sqrt{3}$

2.6 พิกัดของจุด S เมื่อ $\frac{\overline{RS}}{\overline{SQ}} = -\frac{1}{2}$

2.7 พิกัดของจุด S เมื่อ $\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = 3$

2.8 สมมุติว่า P เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ RQ ในอัตราส่วน r จงหาค่า r

2.9 สมมุติว่า Q เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ PS ในอัตราส่วน r จงหาค่า r

2.10 สมมุติว่า R เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ PQ ในอัตราส่วน r จงหาค่า r

3. สำหรับ A, B และ C ใดๆ บนเส้นพิกัดเส้นเดียวกัน ถ้า P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ BC, CA และ AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า จุดกึ่งกลางของ CR คือจุดกึ่งกลางของ PQ และ ถ้า $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$ จงหา

3.1 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$

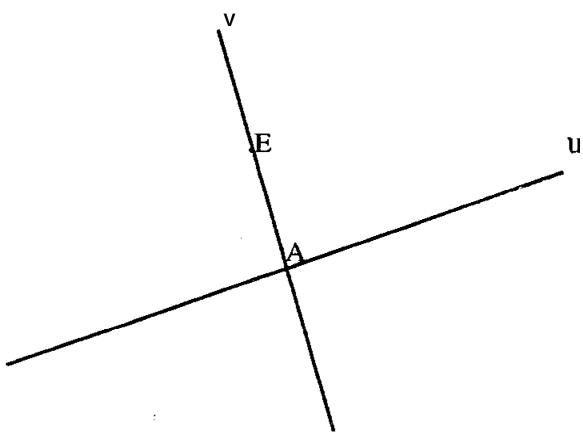
3.2 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

3.3 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$

1.4 ระบบพิกัดฉาก(Rectangular Coordinate System)

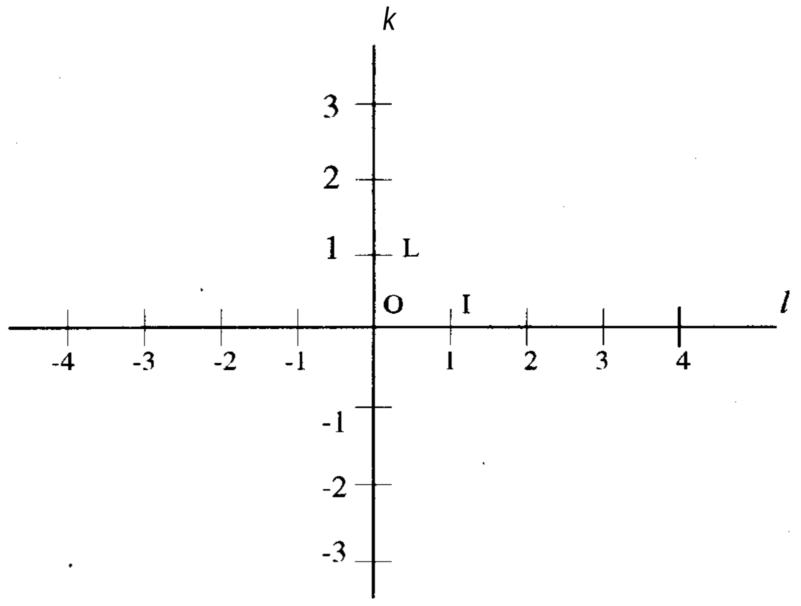
สำหรับเส้นตรงใดๆ u และ E เป็นจุดๆ หนึ่ง ถ้าเส้นตรง v เป็นเส้นที่ลากผ่าน E ไปตั้งฉากกับ u ที่จุด A เรียกจุด A ว่าเป็น**โปรเจคชัน** (Projection) ของจุด E บนเส้น u

พิจารณาเส้นพิกัด l ที่เป็น**เส้นระดับ** (Horizontal Line) ที่มีทิศทางไปทางขวา เส้นตรง k เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O และตั้งได้ฉากกับเส้นตรง l ดังรูป 1.4.2 เราจึงได้เส้นตรง k



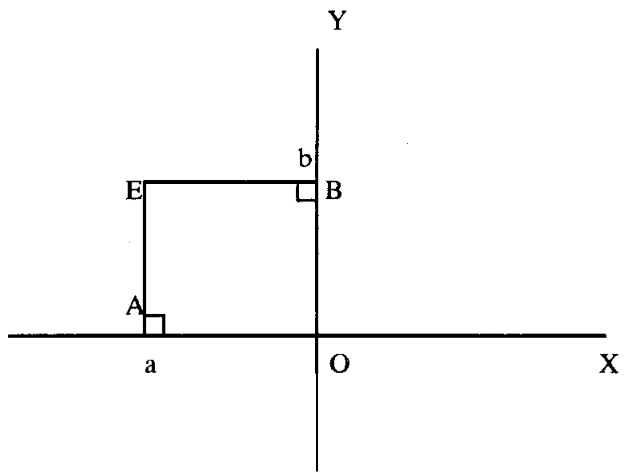
รูป 1.4.1

เป็น **เส้นดิ่ง**(Vertical Line) ถ้าจุด L บนเส้นตรง k อยู่เหนือ O โดยให้ OL = OI และให้ L มีพิกัดเป็น 1 เราจะเรียกได้ว่าเส้นตรง k เป็นเส้นพิกัดได้เช่นเดียวกับ l และ k มี ทิศทางขึ้นข้างบน นั่นคือจุดต่างๆ ที่มีพิกัดเป็นบวกอยู่เหนือจุด O โดยทั่วๆ ไป เราจะเรียกเส้นระดับ l ว่าแกน X (x-axis) เส้นดิ่ง k ว่าแกน Y (y-axis) และเรียกแกนทั้งสองนี้ว่า **แกนพิกัด(Coordinate axes)**



รูป 1.4.2

สำหรับจุด E ใดๆ ในระนาบ และให้ A และ B เป็นโปรเจคชันของ E บนแกน X



รูป 1.4.3

แล้ว a และ b เรียกว่าเป็นพิกัด (coordinate) ของจุด E และเรียก a ว่า x-coordinate ของจุด E และ เรียก b ว่า y-coordinate ของจุด E เขียนแทนจุด E ด้วยสัญลักษณ์ (a, b) หรือ

E(a, b) เนื่องจาก a = $\overline{OA}$ และ b = $\overline{OB}$ เราอาจเขียนแทนจุด E ได้ด้วย ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$) สำหรับจุด A ใดๆบนแกน X มีพิกัด a แล้ว A ย่อมมีพิกัด (a, 0) ในระนาบ และจุด B ใดๆ บนแกน Y มีพิกัด b แล้ว B ย่อมมีพิกัด (0, b) ในระนาบ สำหรับจุด O ซึ่งมีพิกัด (0, 0) เรียกได้ว่าเป็น **จุดกำเนิด (origin)**

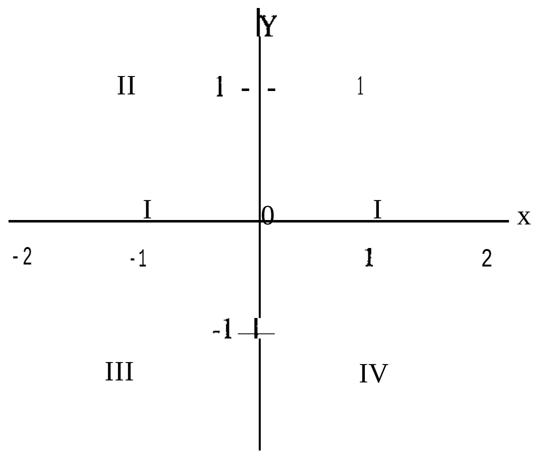
แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็นสี่ส่วน ดังรูป 1.4.4

จุด E (a, b) อยู่ในระนาบส่วนที่ **I** เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

จุด E (a, b) อยู่ในระนาบส่วนที่ **II** เมื่อ $a < 0$ และ $b > 0$

จุด E (a, b) อยู่ในระนาบส่วนที่ **III** เมื่อ $a < 0$ และ $b < 0$

จุด E (a, b) อยู่ในระนาบส่วนที่ **IV** เมื่อ $a > 0$ และ $b < 0$



รูป 1.4.4

แกน X และแกน Y นับได้ว่าเป็นสิ่งที่เริ่มแรกที่นำไปสู่ระบบพิกัดพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)บนระนาบ ดังนั้นจุดทุกจุดบนระนาบสามารถเขียนแทนได้ด้วยจำนวน และ Y ตามลำดับ ตามรูป 1.4.3 ถ้า A มีพิกัด a บนแกน X และ B มีพิกัด b บนแกน Y จริงคู่หนึ่งซึ่งเป็นพิกัดของจุดนั้น ในทางกลับกันจำนวนจริงคู่หนึ่งหมายถึงจุดๆ หนึ่งใน ระนาบ ระนาบที่มีระบบพิกัดพิกัดฉาก เช่นนี้ เรียกว่าเป็น**ระนาบพิกัด** การแสดงตำแหน่ง

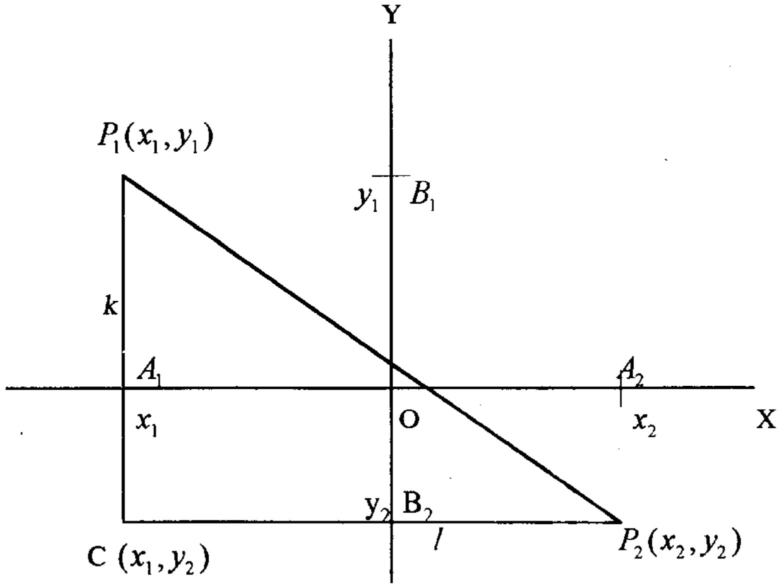
ของจุดต่างๆ บนระนาบโดยการใช้จำนวนจริงคู่หนึ่งเช่นนี้นับได้ว่าเป็นพื้นฐานของวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบ (Plane Analytic Geometry) อันสำคัญยิ่ง

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงเขียนภาพแสดงตำแหน่งของจุด (-1, -3), (4, 1), (2, -5), (-3, 3), (0, 2), (-3, 0), $(\frac{1}{4}, 3)$, $(-\frac{2}{3}, -1)$, $(4, -\frac{5}{2})$, $(-5, \frac{3}{4})$, (0, 0), $(\frac{1}{2}, 0)$
2. จงเขียนรูปสามเหลี่ยมที่จุดมุมคือ A(2, 3), B(-1, 5) และ C(4, 7)
3. จงเขียนรูปสามเหลี่ยมที่จุดมุมคือ A(2, 3), B(2, -2) และ C(-4, 3) และหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้
4. จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมที่จุดมุมคือ $A(1,-\frac{3}{2})$, $B(3, \frac{3}{4})$, C(-2, 4) และ D(-3, 0)
5. จงหาความยาวของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมคือ A(4, -2), B(4, 5) และ C(-3, -2)
6. จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จุดมุมคือ A(2,-8), B(2, -2), C(8, -2) และ D(8, -8) และหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปนี้
7. ถ้า (-1, -1), (-1, 4), และ (3, -1) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหาพิกัดของจุดมุมที่สี่
8. ถ้าจุด (4, 1), และ (-1, -2) เป็นจุดมุมตรงกันข้ามของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านขนานกับแกนพิกัด จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือ
9. ถ้า (-3, -2), (2, -2), และ (0, 1) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาพิกัดของจุดมุมที่สี่และมีจุดเดียวแน่นอนหรือไม่
10. จงอธิบายเงื่อนไขของจุดต่างๆ บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และผ่านจุด (0, 2)
11. จงอธิบายเงื่อนไขของจุดต่างๆ บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และผ่านจุด (-3, 0)

1.5 สูตรระยะทาง (Distance Formular)

ในหัวข้อ 1.2 เราได้แสดงวิธีหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนเส้นพิกัด ในหัวข้อนี้เราจะได้แสดงวิธีหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนระนาบพิกัด กำหนดให้ $P_1(x_1, y_1)$และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นสองจุดบนระนาบพิกัดตามรูป 1.5.1 ให้โปรเจคชันของจุด P_1 บนแกน X และแกน Y คือ A_1 และ B_1 ตามลำดับและโปรเจคชันของจุด P_2 บนแกน X และแกน Y คือ A_2 และ B_2 ตามลำดับ ให้เส้นตรง l ที่ลากผ่าน P_2 และขนานกับแกน X และ k เป็นเส้นตรงที่ลากผ่าน P_1 และขนานกับแกน Y และ C เป็นจุดตัดกันระหว่างเส้นตรง l กับ k



รูป 1.5.1

C ย่อมมีพิกัด (x_1, y_2) เราจะได้ว่า

$$|CP_2| = |A_1A_2|,$$

และ $$|A_1A_2| = |x_2 - x_1|$$

ดังนั้น $$|CP_2| = |x_2 - x_1|$$

ในทำนองเดียวกัน $$|CP_1| = |y_2 - y_1|$$

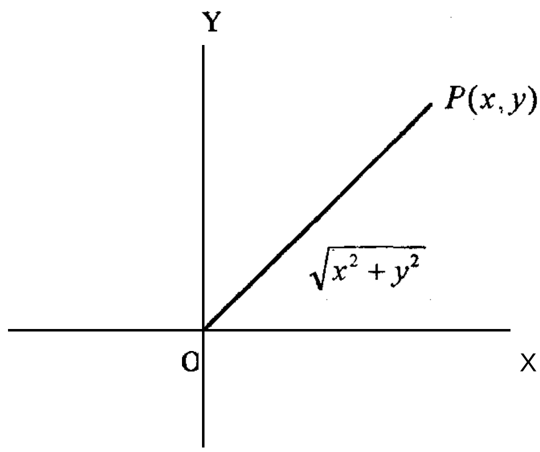
เนื่องจากสามเหลี่ยม P_1CP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและโดยทฤษฎีบทของ Pythagorus เราย่อมได้

$$|P_1P_2|^2 = |CP_2|^2 + |CP_1|^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

แต่ $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$

และ $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$

เพราะฉะนั้น $\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ ซึ่งเป็นสูตรระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 บนระนาบพิกัด ในกรณีที่จุด P_1 หรือ จุด P_2 จุดใดจุดหนึ่งเป็นจุดกำเนิดและอีกจุดหนึ่งคือ $P(x,y)$ ดังรูป 1.5.2 เราย่อมได้ระยะทางระหว่างจุด O กับจุด P คือ $\sqrt{x^2 + y^2}$



รูป 1.5.2

ตัวอย่าง 1.5.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด A(-4, -2) และ B(3, 5)

วิธีทำ จากสูตรระยะทางเราได้

$$|AB| = \sqrt{(3-(-4))^2 + (5-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{98}$$

$= 7\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 1.5.2 จงแสดงว่า A(-1, 3), B(4, 1) และ C(2, -4) เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉาก

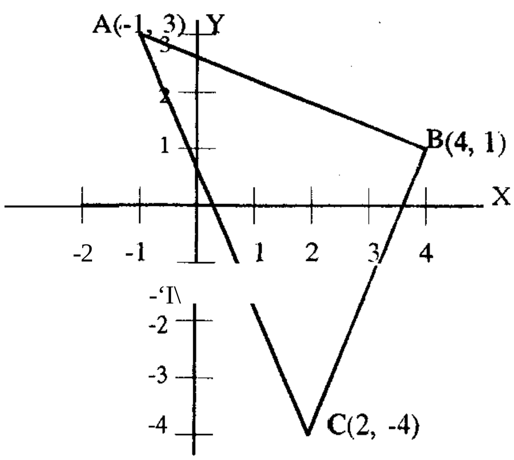
วิธีทำ จากสูตรระยะทาง

$$|AB| = \sqrt{(4-(-1))^2+(1-3)^2}$$
$$= \sqrt{29},$$
$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2+((-4)-1)^2}$$
$$= \sqrt{29},$$

และ $|AC| = \sqrt{(2-(-1))^2+((-4)-3)^2}$
$$= \sqrt{58}$$

พบว่า $|AB|^2+|BC|^2 = |AC|^2$

นั่นคือ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมุมที่ B เป็นมุมฉาก



รูป 1.5.3

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 (1, 3), (8, 9) 1.2 (-2, 3), (5, 1)

1.3 (-5, -4), (-2, 5) 1.4 (6, -1), (-4, -3)

1.5 $(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$, $(-\frac{5}{3},-2)$ 1.6 (8, -2), (-7, 3)

1.7 $(\sqrt{8},3)$, $(-\sqrt{2},-5)$ 1.8 $(3,\sqrt{3})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{6})$

1.9 $(\sqrt{2},\pi)$, $(-\pi,5)$ 1.10 $(2\pi,1)$, (5, 3)

2. จงหาความยาวของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมที่จุดมุมคือ

2.1 A(1,1), B(2, 5), C(7,3) 2.2 A(3, -2), B(-2,-4), C(-7, 5)

2.3 A(4, 2), B(-7, 3), C(-7, -3) 2.4 $A(-\frac{1}{2},3), B(1,-\frac{2}{3}), C(\frac{7}{2},\frac{8}{3})$

3. จุดสามจุดต่อไปนี้ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยม จงตรวจดูว่าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือสามเหลี่ยมมุมฉาก หรือเป็นทั้งสามเหลี่ยมหน้าจั่วและสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย ถ้าเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากให้หาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นด้วย

3.1 (3, 8), (-11, 3), (-8, -2) 3.2 (7, 5), (2, 3), (6, -7)

3.3 (-2, 1), (2, -3), (6, 5) 3.4 (-5, -3), (-7, 3), (2, 6)

3.5 (7, 0), (4, 1), (6, 7) 3.6 (-1, 5), (1, 1), (5, -1)

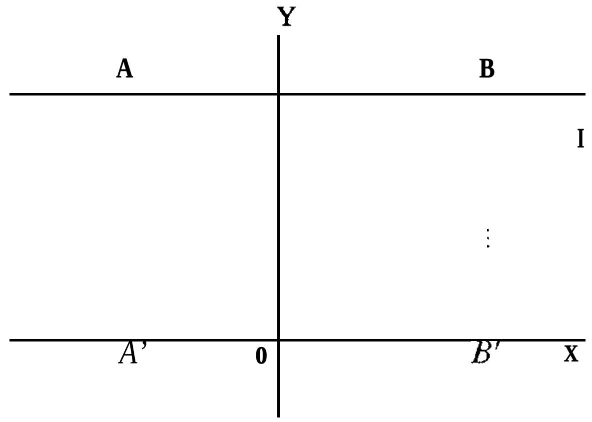
1.6 ระยะที่กำหนดทิศทางบนเส้นตรงใดๆ (Directed Distance on any Line)

ในหัวข้อ 1.2 เราได้นิยามระยะที่กำหนดทิศทางบนเส้นพิกัดเส้นหนึ่ง และในหัวข้อ 1.4 เรากล่าวถึงระยะที่กำหนดทิศทางบนเส้นพิกัดสองเส้น ดังนั้นเราอาจกำหนดทิศทางของระยะทางบนเส้นใดๆซึ่งขนานกับแกนพิกัดได้ นั่นคือสำหรับจุดสองจุด A และ B ใดๆบน

เส้นตรง l ซึ่งขนานกับแกน X ตามรูป 1.6.1 A' และ B' เป็นโปรเจคชันบนแกน X ของ A และ B ตามลำดับ เราจึงได้ระยะที่กำหนดทิศทาง $\overline{AB}$ จาก A ถึง B คือ $\overline{A'B'}$ เพราะฉะนั้นในกรณีนี้

$\overline{AB}$ = (x-coordinate ของ B) - (x-coordinate ของ A)

ในกรณีที่เส้นตรง l ขนานกับแกน Y เราก็จะพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน สำหรับทิศทางบนเส้นตรงอื่นๆ ที่ไม่ขนานกับแกน X และแกน Y เช่นถ้าให้ C และ D เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง l ดังรูป 1.6.2



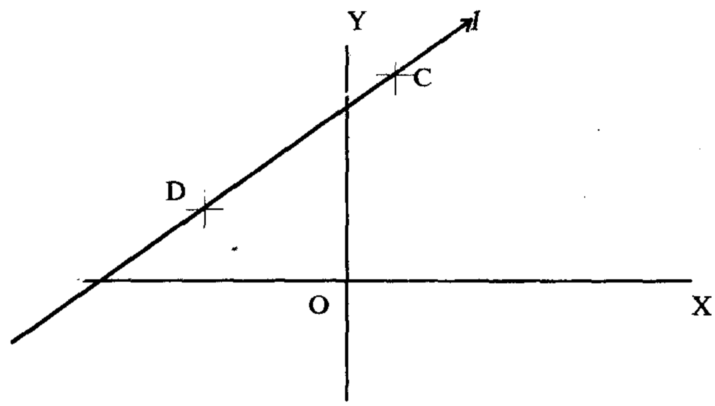
รูป 1.6.1

นิยาม 1.6.1 ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง l ระยะที่กำหนดทิศทาง $\overline{AB}$ จาก A ไปยังB คือ |AB| หรือ -|AB| ก็แล้วแต่ว่าจุดที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นนั้นจาก A ไปยัง B จะเคลื่อนที่ในทิศของหัวลูกศรหรือในทิศทางตรงกันข้าม ตามรูป 1.6.2 เราจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า

$$\overline{CD} = -|CD|$$

และ $$\overline{DC} = |DC|$$

สมมุติว่ามีจุดๆ หนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง l มันก็อาจจะเคลื่อนที่จากจุด C ไปยังจุด D หรือจากจุด D ไปยังจุด C ทางใดทางหนึ่งแต่เราก็อาจกำหนดทิศทางของมันเสียได้



รูป 1.6.2

ด้วยลูกศรไว้บนเส้นตรง l ตามรูป 1.6.2 ทิศทางที่กำหนดก็คือจากจุด D ไปยัง C เราจึงกล่าวได้ว่าถ้า A และ B เป็นจุดบนเส้นตรงที่ได้กำหนดทิศทางไว้ (Directed Line)และ

$$\boxed{\overline{AB} = -\overline{BA}}$$

และถ้า A, B และ C เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงที่ได้กำหนดทิศทางไว้แล้ว

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

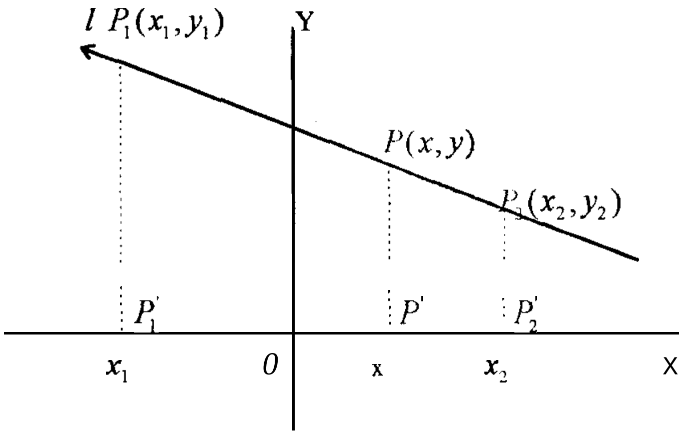
1.7 การแบ่งเซกเมนต์ในระนาบตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ (Division of a Segment in the Plane in a Given Ratio)

ทฤษฎีบท 1.7.1 สำหรับจุดสามจุด $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ และ $P(x,y)$ ใดๆ บนเส้นที่กำหนดทิศทางไว้เส้นเดียวกัน ถ้า $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$ แล้วจุด $P(x,y)$ ย่อมมีพิกัดเป็น

$$\boxed{(x,y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ l เป็นเส้นซึ่งไม่ขนานกับแกนพิกัดใดๆ และ ให้ $P_1(x_1,y_1)$และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง l ดังรูป 1.7.1 เรากำหนดทิศทางให้กับเส้นตรง l เสียเพื่อเราจะได้ใช้ระยะที่กำหนดทิศทาง เรามีความประสงค์ที่จะหาจุด $P(x,y)$ ซึ่ง จะหาจุด P บน l ให้ได้ $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=r$

ให้ P_1', P_2' และ P' เป็นโปรเจคชันบนแกน X ของ P_1, P_2และ P ตามลำดับ ดังนั้น P_1', P_2' และ P' เป็นจุดสามจุดบนเส้นพิกัด โดยมีพิกัด x_1, x_2และ x ตามลำดับ



รูป 1.7.1

เนื่องจากเส้นตรง P_1P_1' เส้นตรง P_2P_2' และเส้นตรง PP' ต่างขนานซึ่งกันและกัน และเส้นขนานเหล่านี้ถูกตัดโดยเส้นตรง l และแกน X เราก็จะได้ว่า

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|P_1'P'|}{|P'P_2'|}$$

นอกจากนี้เรายังทราบอีกว่า $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ เป็นบวกก็ต่อเมื่อ P อยู่ระหว่าง P_1 และ P_2 และ $\dfrac{\overline{P_1'P'}}{\overline{P'P_2'}}$ เป็นบวกก็ต่อเมื่อ P' อยู่ระหว่าง P_1' และ P_2' แต่จะเห็นได้ชัดเจนว่า P' อยู่ระหว่าง

P_1' และ P_2' ก็ต่อเมื่อ P อยู่ระหว่าง P_1 และ P_2 ดังนั้นอัตราส่วนเหล่านี้ จะมีเครื่องหมายอย่างเดียวกันเสมอ

เพราะฉะนั้น $\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|P_1'P'|}{|P'P_2'|} = r$

โดยทฤษฎีบท 1.3.2 เราได้ $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$

ในทำนองเดียวกันถ้าเราใช้โปรเจคชันของ P_1, P_2 และ P บนแกน Y เราก็จะได้

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

นั่นคือจุด P มีพิกัดเป็น $(x, y) = (\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r})$

1.8 สูตรจุดกึ่งกลาง (Midpoint Formular)

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนระนาบพิกัด แล้วจุดกึ่งกลางของเซคเมนต์ P_1P_2 มีพิกัดเป็น

$$\boxed{(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})}$$

การพิสูจน์กระทำได้โดยง่ายโดยใช้หัวข้อ 1.7 เราจะได้

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = 1$$

แล้วแทนค่า r = 1 ในสูตรดังกล่าวเราได้

$$(x, y) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

ตัวอย่าง 1.8.1 กำหนดจุดสองจุด A(7, 5) และ B(-6, 1) ให้ จงหาจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ AB

วิธีทำ จุดกึ่งกลางของ AB มีพิกัดเป็น

$$(\frac{7 + (-6)}{2}, \frac{5+1}{2}) = (\frac{1}{2}, 3) \qquad \text{ตอบ}$$

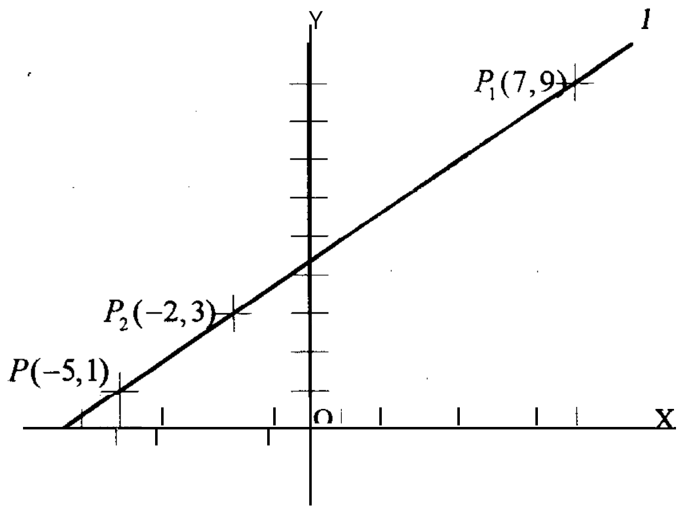
ตัวอย่าง 1.8.2 กำหนดให้เส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(7,9)$ และ $P_2(-2,3)$ จงหาจุด P บนเส้นตรง l ซึ่งทำให้

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -4$$

วิธีทำ จุด P มีพิกัดเป็น

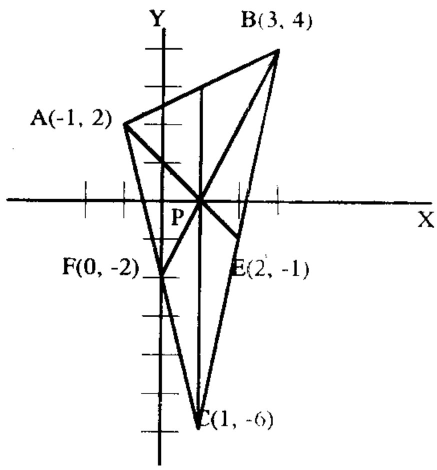
$$\left(\frac{7+(-4)(-2)}{1+(-4)}, \frac{9+(-4)(3)}{1+(-4)}\right) = (-5,1) \qquad \text{ตอบ}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.8.2 และสร้างรูปได้ดังรูป 1.8.1 เราเห็นได้ว่าจุด P อยู่ภายนอกของเซกเมนต์ P_1P_2 เพราะว่า r เป็นลบ



รูป 1.8.1

ตัวอย่าง 1.8.3 รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดมุมเป็น A(-1, 2), B(3, 4) และ C(1, -6) จงพิสูจน์ว่าเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมรูปนี้ตัดกันที่จุดๆ หนึ่งซึ่งเป็นจุดแบ่งระยะทางจากจุดมุมแต่ละจุดถึงจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามเป็น $\frac{2}{3}$



รูป 1.8.2

วิธีทำ สามเหลี่ยม ABC นี้มีลักษณะดังรูป 1.8.2 จากสูตรของจุดกึ่งกลางเราได้จุดกึ่งกลางของ AB, BC และ AC คือ D(1, 3), E(2, -1) และ F(0, -2) ตามลำดับ ถ้า P เป็นจุดบนเส้นมัธยฐาน AE ซึ่งแบ่ง AE ออกตามอัตราส่วน $\frac{2}{3}$ โดยมีอัตราส่วน

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} = 2$$

เราจึงได้พิกัดของจุด P เป็น

$$\left(\frac{-1+(2)(2)}{1+2}, \frac{2+(2)(-1)}{1+2}\right) = (1,0)$$

ในทำนองเดียวกันเราอาจแสดงได้ว่า
จุดที่แบ่ง BF ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{2}{3}$ และ จุดที่แบ่ง CD ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{2}{3}$ มีพิกัดเป็น (1, 0) เท่ากันและเป็นจุดเดียวกับ P นั่นเอง
เพราะฉะนั้นเรากล่าวได้ว่าเส้นมัธยฐานทั้งสามตัดกันที่จุดเดียวกัน

แบบฝึกหัด 1.5

1. **จงหาจุดที่แบ่ง P_1P_2 ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน**

   1.1 $P_1(4,-1), p_2(7,5)$

   1.2 $P_1(1,7), p_2(6,-3)$

   1.3 $P_1(-5,2), p_2(8,-4)$

   1.4 $P_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2}), P_2(-\frac{5}{2},-7)$

   1.5 $P_1(\sqrt{2},-3), p_2(-\sqrt{8},\frac{5}{2})$

   1.6 $P_1(5,7), p_2(9,3)$

2. **จงหาพิกัดของจุด** P(x, y) **ที่แบ่งเซกเมนต์ P_1P_2 ซึ่ง**

   $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ ถ้า 1

   2.1 $P_1(-1,-4), p_2(-6,2), r = \frac{1}{5}$

   2.2 $P_1(3,7), p_2(-2,4), r = 3$

   2.3 $P_1(4,-3), p_2(1,4), r = 2$

   2.4 $P_1(5,3), p_2(-3,-3), r = \frac{1}{3}$

   2.5 $P_1(-2,3), p_2(3,-2), r = \frac{2}{5}$

   2.6 $P_1(0,3), p_2(7,4), r = -\frac{2}{7}$

   2.7 $P_1(2,-5), p_2(6,3), r = \frac{2}{4}$

3. ถ้า A(-4, 3), B(3, 2) และ C อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน และ B เป็นจุดกึ่งกลางของ AC จงหาพิกัดของจุด C

4. ถ้า A(-2, 5), B(l, 2) และ C อยู่ในเส้นตรงเดียวกันและ $|AC| = 3|AB|$ จงหา พิกัด ของจุด C

5. ถ้า P(-3, -6), Q(4, 2) และ R อยู่ในเส้นตรงเดียวกันอยู่ระหว่าง P กับ Q และ

   $|PQ| = 4|RQ|$

   จงหา พิกัดของจุด R

6. ถ้า P(0, 4), Q(5, 0) และ R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน P อยู่ระหว่าง R กับ Q และ $|RP| = 10|PQ|$ จงหาพิกัดของจุด

7. จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมทั้งสามดังต่อไปนี้

7.1 A(0, 0), B(-2, 6), C(4, 4)
7.2 A(-3, -1), B(1, 17), C(9, -3)
7.3 A(-4, 3), B(3, 3), C(6, -8)
7.4 A(12, 3), B(-1, -3), C(-12, 8)
7.5 A(l, 6), B(9, -2), C(-5, -4)
7.6 A(3, 4), B(9, 0), C(l, -8)

8 จงแสดงว่าจุด A(5, -2), B(1, 2) และ C(-2, 5) อยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกัน จงหาค่าของ $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ และ $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

9. ถ้า P, Q และ R อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน และ $\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = r$ จงหาค่าของ $\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ และ $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$

10. กำหนดให้ A(3, 5), B(-2, 6) และ C(1, -4) เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยม ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จงแสดงว่า

$$|PQ| = \frac{|AB|}{2}$$

11. กำหนดให้ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยม ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จงแสดงว่า

$$|PQ| = \frac{|AB|}{2}$$

12. กำหนดให้ O(0, 0), A(a, 0) และ B(b, c) เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมอยู่ที่จุดกึ่งกลางของด้าน

ทั้งสามของสามเหลี่ยม OAB และจงแสดงให้เห็นว่าเป็น $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของสามเหลี่ยม OAB

13. ถ้า $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ และ $P_3(x_3, y_3)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า จุด $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ เป็นจุดหนึ่งที่แบ่งมัธยฐานทั้งสามออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน

14. จงแสดงจุดมุมของสามเหลี่ยมซึ่งจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามเป็น

14.1 (-2, I), (5, 2), (2, -3) 14.2 (3, 2), (-1, -2), (S,-4)

14.3 (5, 7), (1, -3), (-5, 1) 14.4 (-3, 1), (2, 4), (6, -2)

15. จงพิสูจน์ว่าทฤษฎีบท 1.7.1 เป็นจริงถ้าเซกเมนต์ P_1P_2 ขนกับแกนพิกัดแกนใดแกนหนึ่ง