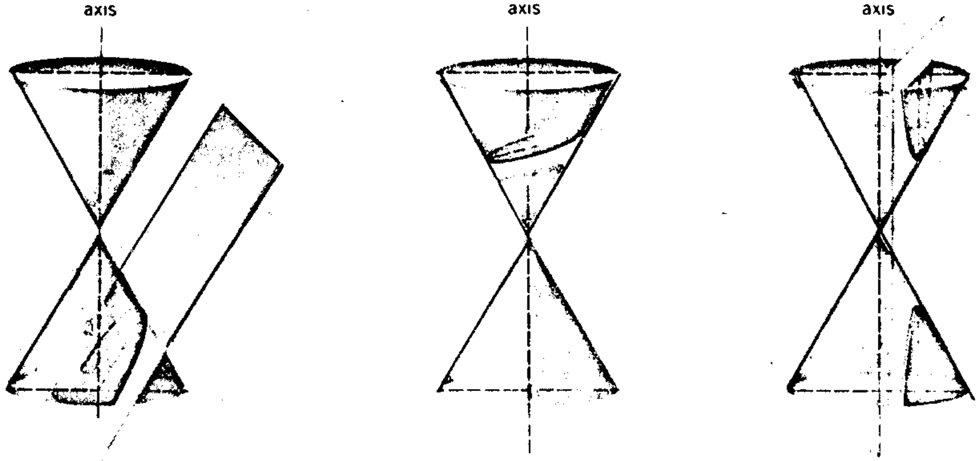
บทที่ 5
การตัดกรวย
(Conic Section)

5.1 คำนำ

ถ้ากรวย 2 อัน ถูกตัดด้วยระนาบ ผลที่ได้จากการตัดเรียกว่า ภาคตัดกรวย (Conic section หรือ Conic) ในรูป 5.1.1 แสดงภาคตัดกรวย 3 แบบ



รูป 5.1.1

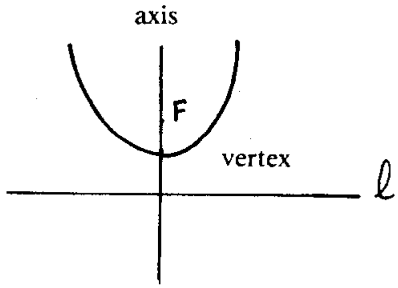
ถ้าเลือกระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยจะได้ภาคตัดกรวยเป็นวงกลม หรือเลือกระนาบที่ผ่านจุดยอดของกรวยและตั้งฉากกับแกนของกรวยจะได้จุด 1 จุด กรณีอื่น ๆ อาจจะเป็นเส้นตรง 1 เส้น หรือเป็นเส้นตรง 1 คู่

5.2 พาราโบลา (Parabola)

นิยาม 5.2.1 เส้นตรง l เป็นเส้นคงที่ 1 เส้น และจุด F เป็นคงที่ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรง l

พาราโบลา คือเซตของจุด P ทั้งหลายที่มีระยะทางห่างจากเส้นตรง l และระยะทางห่างจากจุด F เท่ากัน

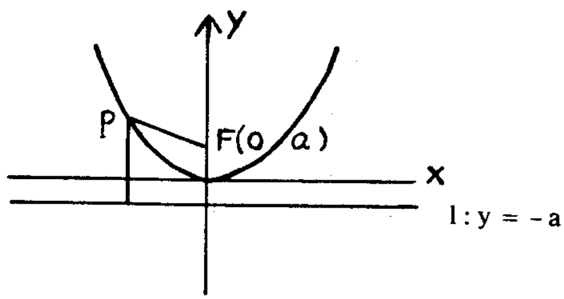
เส้นตรง l เรียกว่า เส้นไดเรคทริกซ์ (Directrix) ของพาราโบลา จุด F เรียกว่า โฟกัส (Focus) เส้นที่ผ่านจุด F ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง l เรียกว่า แกน (Axis) ของพาราโบลา จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลาเรียกว่า จุดยอด (Vertex) ดังรูป 5.2.1



รูป 5.2.1

การหาสมการของพาราโบลา ให้จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและโฟกัสอยู่บนแกนโค-ออร์ดิเนต

สมมติให้ F อยู่บนแกน Y, F มีโคออร์ดิเนต (0, a) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด เส้นได-เรคทริกซ์มีสมการคือ y = −a ดังรูป 5.2.2



รูปที่ 5.2.2

จุด P(x, y) ที่อยู่บนพาราโบลาจะมีคุณสมบัติว่า

$$d(P, F) = d(P, l)$$

เนื่องจาก

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$$

$$d(P, l) = |y + a|$$

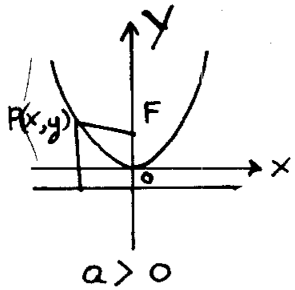
$$\therefore \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y + a|$$

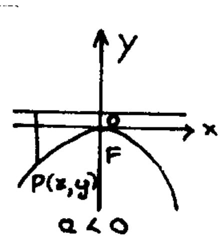
$$x^2 + (y-a)^2 = |y + a|^2$$

$$= (y + a)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\boxed{x^2 = 4ay}$$





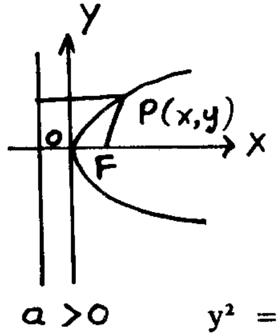
$$x^2 = 4ay$$

$x^2 = 4ay$ แทนพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิดและโฟกัสอยู่ที่ (0, a)

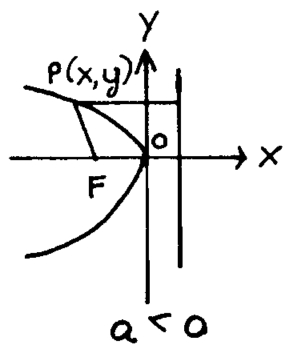
เมื่อเปลี่ยนแกนพาราโบลาจากแกน Y เป็นแกน X ก็จะได้สมการพาราโบลา เป็น

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

ซึ่งเป็นสมการที่แทนพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่ที่ (a, 0)



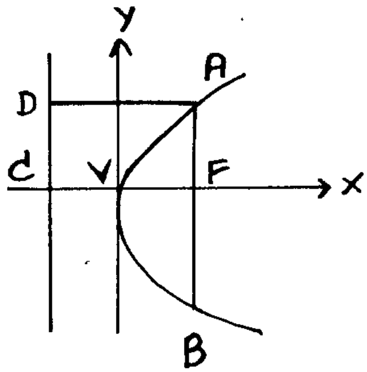
$$y^2 = 4ax$$



คอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งได้ฉากกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า ลาตัส เรคตัม (Latus rectum) ของพาราโบลา ดังรูป 5.2.3

เส้นลาตัส เรคตัม คือ AB ตามนิยามของพาราโบลาจะได้ว่า

$$|AD| = |AF|$$



รูปที่ 5.2.3

แต่ $|AD| = |DC| = |2a|$

ดังนั้น $|AF| = |2a|$

และ $|AB| = |2AF|$

$\therefore$ $|AB| = |4a|$

จากรูปสมการของพาราโบลา

$$y^2 = 4ax$$

จะเห็นว่า ความยาวของเส้น ลาตัสเรคตัม ของพาราโบลาคือค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของ x ในสมการ

ในทำนองเดียวกัน ถ้ารูปสมการของพาราโบลา คือ

$$x^2 = 4ay$$

ความยาวของเส้นลาตัสเรคตัมของพาราโบลา คือค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของ y ในสมการ

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงเขียนพาราโบลา หาโฟกัส, ไดเรคทริกซ์, แกนของพาราโบลา และความยาวของเส้นลาตัสเรคตัม

a) $x^2 = -4y$

b) $y^2 = 3x$

วิธีทำ a) $x^2 = -4y$

จาก $x^2 = 4ay$

$a = -1$

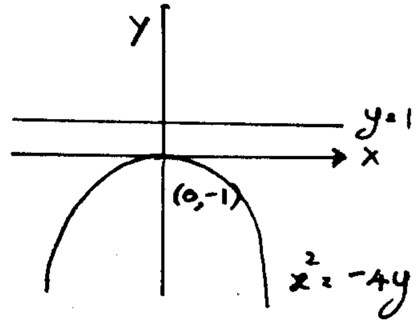
จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

โฟกัสอยู่ที่ $(0, -1)$

ไดเรคทริกซ์ คือ $y = 1$

แกนของพาราโบลา คือแกน Y

ความยาวของลาตัสเรคตัม คือ 4



b) $y^2 = 3x$

$a = \frac{3}{4}$

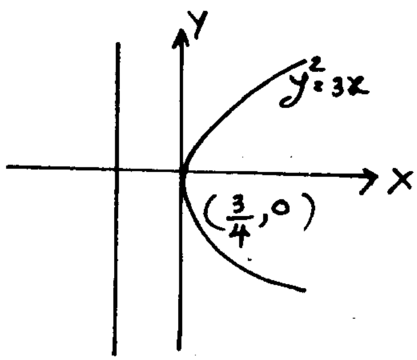
จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

โฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

ไดเรคทริกซ์คือ $x = -\frac{3}{4}$

แกนของพาราโบลา คือแกน X

ความยาวของลาตัสเรคตัม คือ 3



$x = -\frac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 5.2.2 **จงหาสมการของพาราโบลา โคออร์ดิเนตของโฟกัสและสมการของเส้นไดเรคทริกซ์ ถ้าจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน X ไปทางขวาของจุดยอด และความยาวของลาตัสเรคตัม = 24**

วิธีทำ เนื่องจากโฟกัสอยู่ทางขวาของจุดยอด

ดังนั้น a เป็นบวก และ $a = \frac{1}{2} \times 24 = 12$

และเนื่องจากโฟกัสอยู่บนแกน X ดังนั้นสมการพาราโบลาคือ

$$y^2 = 24x$$

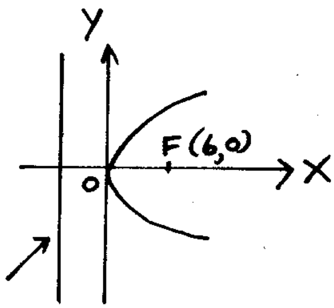
โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ (6, 0)

สมการของเส้นไดเรคทริกซ์ คือ

$$x + 6 = 0$$

หรือ $x = -6$

ดังรูป



x + 6 = 0

ตัวอย่างที่ 5.2.3 จงหาจุดตัดของ $2x - 3y + 1$ และพาราโบลา $y = x^2$

วิธีทำ จาก $2x - 3y + 1 = 0$

แทนค่า $y = x^2$ จะได้

$$2x - 3x^2 + 1 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$= \frac{1 \pm 2}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}, 1$$

$$y = \frac{1}{9}, 1$$

จุดตัดคือ $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ และ (1, 1) **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาโคออร์ดิเนตของโฟกัส, สมการของเส้นไดเรคทริกซ์, แกนของพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรคตัม

   1.1 $y^2 = 2x$

   1.2 $x^2 = -3y$

   1.3 $y^2 = 16x$

   1.4 $y^2 + 28x = 0$

   1.5 $x^2 + 40y = 0$

   1.6 $5x^2 = 12x$

   1.7 $2x^2 = 7y$

   1.8 $7x^2 = 15y$

2. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมีเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 โฟกัสคือ $(2, 0)$

   2.2 โฟกัสคือ $(0, 2)$

   2.3 โฟกัสคือ $(8, 0)$

   2.4 ไดเรคทริกซ์ คือ $x = \frac{-1}{2}$

   2.5 ไดเรคทริกซ์ คือ $y = -\frac{1}{2}$

   2.6 ไดเรคทริกซ์ คือ $y - 2 = 0$

   2.7 ผ่านจุด $(5, 10)$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

   2.8 ผ่านจุด $(6, 18)$ และ $(-6, 18)$

3. จงหาจุดซึ่งเส้น $y = 4x$ ตัดกับ $y^2 = 4x$

4. จงหาจุดซึ่งพาราโบลา $x^2 = 3y$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 = 14$

5. จงหาจุดซึ่งเส้น $y = 5x - 20$ ตัดกับ $y^2 = 50x$

6. จงหาจุดตัดของพาราโบลาต่อไปนี้

   6.1 $x^2 = 5y$ และ $y^2 = -2x$

   6.2 $y^2 = 2x$ และ $x^2 = 2y$

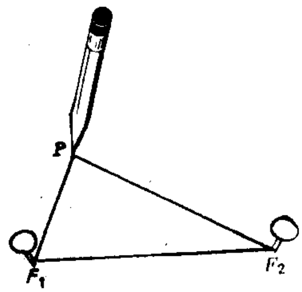
   6.3 $2y^2 = 9x$ และ $3x^2 + 4y = 0$

5.3 วงรี (Ellipse)

นิยาม 5.3.1 ให้ F_1 และ F_2 เป็นจุดคงที่ 2 จุด และ $2a$ เป็นตัวคงที่ ซึ่งมากกว่าระยะทางระหว่าง F_1 และ F_2

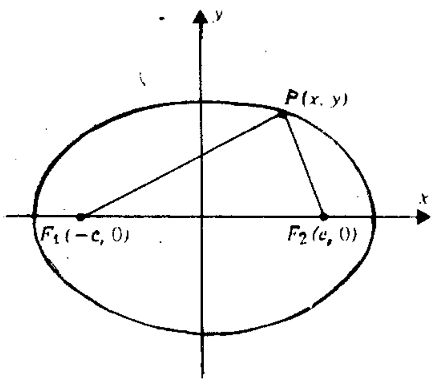
วงรี คือ เซตของจุด P ซึ่ง $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ ....(5.3.1)

F_1 และ F_2 เรียกว่า โฟไซ (foci) จุดกึ่งกลางของเส้นที่เชื่อมจุด F_1 และ F_2 เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center)



รูป 5.3.1

รูปมาตรฐานของสมการของวงรี คือมีโฟไซอยู่บนแกน X จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ให้ $2c$ เป็นระยะทางระหว่าง F_1 และ F_2 ดังนั้น โคออร์ดิเนตของ F_1 คือ $(c, 0)$ และโคออร์ดิเนตของ F_2 คือ $(-c, 0)$



รูป 5.3.2

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บน วงรี จากนิยาม 5.3.1 จะได้ว่า

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4(a^2-cx)$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

เนื่องจาก $2a > 2c$

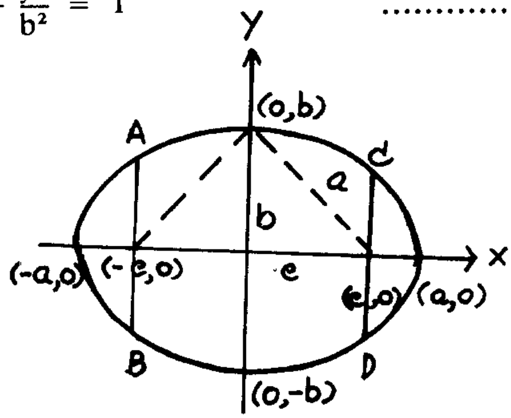
$$a > c$$

ดังนั้น $a^2 > c^2$ หรือ $a^2 - c^2 > 0$

ให้ $b^2 = a^2 - c^2$

สมการเอลลิพส์ คือ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{.......................(5.3.2)}$$



รูป 5.3.3

วงรีมีจุดยอด4จุด ตามรูป 5.3.3 คือ (a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, - b) เส้นที่เชื่อมจุดยอด 2 จุด และผ่านจุดโฟไซเรียกว่า แกนเมเจอร์เส้นที่เชื่อมจุด(0, b) และ (0, -b) คือ แกนไมเนอร์

ความยาวของแกนเมเจอร์ = 2a

ความยาวของแกนไมเนอร์ = 2b

จุดที่แกนเมเจอร์ และแกนไมเนอร์ตัดกัน เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงรี

ถ้าให้แกนเมเจอร์อยู่บนแกน Y สมการ วงรี คือ

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2} = 1} \qquad \text{.................(5.3.3)}$$

a จะต้องมากกว่า b เสมอ ยกเว้นกรณี $c = 0$ จะได้ว่า $a = b$ ในกรณีนี้สมการเอธ วงรี ก็จะกลายเป็นสมการวงกลม

จากสมการ (5.3.2) จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{และ} \quad x &= \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....................(5.3.4)}$$

จะเห็นว่า $x^2 \leqslant a^2$ และ $y^2 \leqslant b^2$ ดังนั้นเวงรี อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งเกิดจากด้าน $x = \pm a$ และ $y = \pm b$

วงรี จะสมมาตรเทียบกับแกน X, แกน Y และจุดกำเนิดตัดแกน X ที่ $\pm a$ ตัดแกน Y ที่ $\pm b$

คอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเมเจอร์ เรียกว่า ลาตัสเรคตัม ความยาวของลาตัสเรคตัม $= \dfrac{2b^2}{a}$

เอคเซนทริคซิตี้ (eccentricity) คือ อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ ใช้สัญลักษณ์ e ดังนั้น

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

เนื่องจาก c น้อยกว่า a เสมอ ดังนั้นเอคเซนทริคซิตี้ของวงรี น้อยกว่า 1 เสมอ

รูปร่าง (shape) ของวงรี (ไม่ใช่ขนาด (size)) ขึ้นอยู่กับค่าเอคเซนทริคซิตี้

ตัวอย่างที่ 5.3.1 จงเขียนกราฟของ $16x^2 + 25y^2 = 400$

วิธีทำ $16x^2 + 25y^2 = 400$

$$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

แกน X เป็นแกนเมเจอร์

$a = 5,\ b = 4$

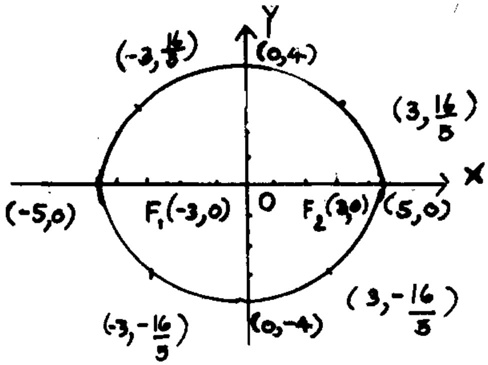
$$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9} = 3$$

$F_1(-3, 0),\ F_2(3, 0)$

แกนเมเจอร์ยาว $= 2a = 10$

แกนไมเนอร์ยาว $= 2b = 8$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด



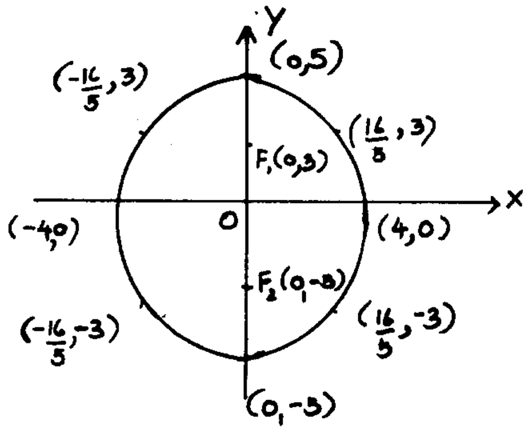
ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงเขียนกราฟของ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

วิธีทำ แกน Y เป็นเมเจอร์

$F_2(0, -3), F_1(0, 3)$

แกนเมเจอร์ยาว $= 10$

แกนไมเนอร์ยาว $= 8$



ตัวอย่างที่ 5.3.3 จงเขียนกราฟของ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

วิธีทำ แกน X เป็นแกนเมเจอร์

$a = 5, b = 3$

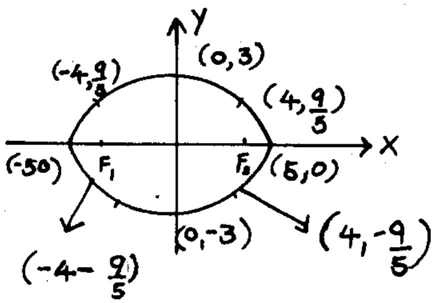
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\quad = \sqrt{16} = 4$

$F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$

แกนเมเจอร์ยาว $= 10$

แกนไมเนอร์ยาว $= 6$



ตัวอย่างที่ 5.3.4 จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ความยาวของ

ลาตัสเรคตัม และเขียนภาพของวงรี

วิธีทำ $\because$ จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$

$\therefore a = 4$

จาก $c = ae$

$\therefore \quad c = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

โคออร์ดิเนตของโฟกัสทั้งสองคือ $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$

$\because b^2 = a^2 - c^2$

$= 16 - 12$

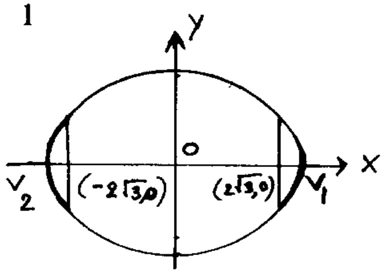
$= 4$

$\therefore b = 2$

ความยาวของลาตัสเรคตัม $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{4} = 2$

สมการวงรี ที่ต้องการ คือ

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$

แบบฝึกหัด 5.2

จงหา

a. จุดยอดทั้งสอง

b. จุดปลายของแกนไมเนอร์

c. จุดโฟกัสทั้งสอง

d. ความยาวของแกนเมเจอร์

e. ความยาวของแกนไมเนอร์

f. ความยาวของลาตัสเรคตัม

g. เอคเซนทริคซิตี้

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $25x^2 + 169y^2 = 4225$
3. $x^2 + 9y^2 = 9$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $2x^2 + y^2 = 50$
6. $x^2 + 4y^2 = 9$
7. $3x^2 + 4y^2 = 12$
8. $64x^2 + 81y^2 = 64$
9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
10. $3x^2 + 2y^2 = 12$
11. $3x^2 \quad 4y^2 - 12 = 0$
12. $4x^2 + y^2 = 64$

จงหาสมการวงรี ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

13. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 13, 0)$, โฟไซอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$
14. จุดโฟไซอยู่ที่ $(\pm 8, 0)$, $a = 17$
15. จุดโฟไซอยู่ที่ $(0, \pm 6)$, $b = 8$
16. จุดโฟไซอยู่ที่ $(0, \pm 3)$, $a = 4$
17. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$, $e = \frac{3}{5}$
18. จุดโฟไซอยู่ที่ $(0, \pm 6)$, $e = \frac{1}{2}$

19. จุดโฟไซอยู่ที่ $(\pm 1, 0)$ ความยาวของแกนไมเนอร์ $= 2\sqrt{2}$

20. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 4)$ ความยาวของลาตัสเรคตัม $= 6$

21. จุดปลายของแกนไมเนอร์คือ $(0, \pm 4)$ ความยาวของลาตัสเรคตัม $= \frac{8}{5}$

22. จุดปลายของแกนไมเนอร์คือ $(0, \pm 8)$ เอคเซนทริคซิตี้ $= \frac{3}{5}$

23. จุดโฟไซอยู่ที่ $(0, \pm 2\sqrt{3})$ ความยาวของลาตัสเรคตัม $= 2$

24. จุดปลายของแกนไมเนอร์ คือ $(3, 0)$, $e = \frac{2}{7}$

จงหาสมการของ วงรี ซึ่งผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้

25. $(3, 2)$, $(1, 4)$

26. $(5, 2)$, $(4, 3)$

27. $(5, 2)$, $(2, 4)$

28. $(3, 2\sqrt{3})$, $(\sqrt{21}, 2)$

29. จงหาจุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้น $x + 2y = 8$ และ $x^2 + 4y^2 = 40$

30. จงหาจุดที่เกิดจากการตัดกันของ $3x^2 + 5y^2 = 612$ และ $y^2 = 3x$

5.4 ไฮเปอร์โบลา (Hyperbola)

นิยาม 5.4.1 ให้ F_1 และ F_2 เป็นจุดคงที่ 2 จุด

ให้ $2c$ เป็นระยะทางระหว่างจุด F_1 และ F_2

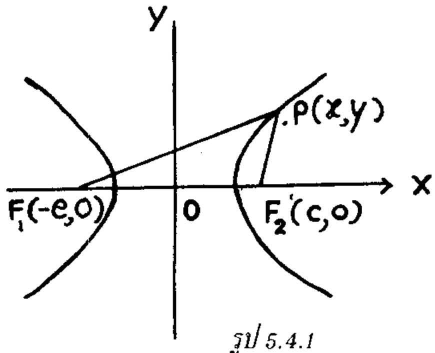
และให้ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 < a < c$

ไฮเปอร์โบลา คือ เซตของจุด P ซึ่ง

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

F_1 และ F_2 เรียก โฟไซ จุดกึ่งกลางระหว่าง F และ F_2 เรียกว่าจุดศูนย์กลาง (center) เส้นที่ผ่านจุดโฟไซเรียกว่า principal axis ของไฮเปอร์โบลา

รูปมาตรฐานของสมการไฮเปอร์โบลา มีโฟไซอยู่บนแกน X และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น โคออร์ดิเนตของโฟไซคือ $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ ดูรูป 5.4.1



รูป 5.4.1

ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลา จากนิยาม 5.4.1 จะได้ว่า

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

เนื่องจาก $a < c$

$a^2 < c^2$

$\therefore c^2 - a^2 > 0$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$

สมการไฮเปอร์โบลา คือ

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad ....(5.4.1)$$

สมการ (5.4.1) เป็นสมการไฮเปอร์โบลาที่มีโฟไซอยู่ที่ $(\pm c, 0)$ บนแกน X

เมื่อให้โฟไซอยู่ที่ $(0, \pm c)$ บนแกน Y จะได้สมการไฮเปอร์โบลา คือ

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad ....(5.4.2)$$

ในสมการไฮเปอร์โบลา a อาจจะน้อยกว่า หรือเท่ากับ หรือมากกว่า b การพิจารณาโฟไซอยู่บนแกน X หรืออยู่บนแกน Y พิจารณาจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ว่าตัวไหนเป็นบวก โฟไซก็จะอยู่บนแกนนั้น

จากสมการ (5.4.1) จะได้

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{.............................(5.4.3)}$$

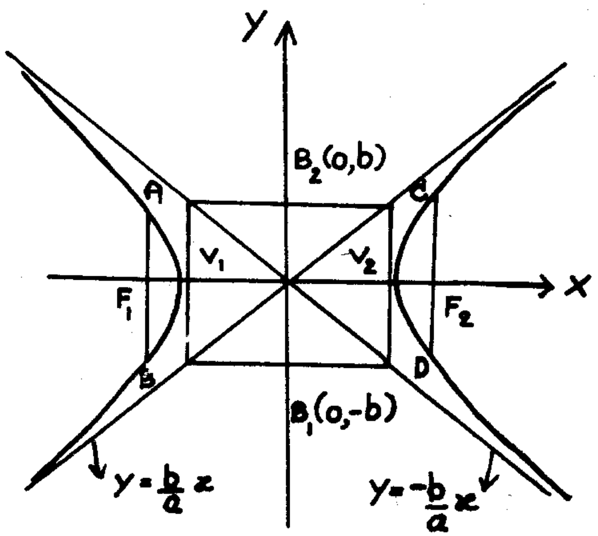
และ $$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \qquad \text{.............................(5.4.4)}$$

จากสมการ (5.4.3) จะเห็นว่า ถ้า $x^2 < a^2$ ค่า y จะไม่ใช่จำนวนจริง ดังนั้น $-a < x < a$ เป็นช่วงของ x ที่ไม่อยู่บนไฮเปอร์โบลา

จากสมการ (5.4.4) จะเห็นว่าทุกค่า y จะให้ค่า x ได้ 2 ค่า

ไฮเปอร์โบลาสมมาตรเทียบกับแกน X, แกน Y และจุดกำเนิด

จุดตัดของไฮเปอร์โบลาในสมการ 5.4.1 กับแกน X คือ $x = \pm a$ จุด $V_1(-a, 0)$ และ $V_2(a, 0)$ คือจุดยอด (vertices) เซกเมนต์ V_1V_2 ซึ่งยาว $= 2a$ เรียกว่า แกนขวาง (transverse axis) ของไฮเปอร์โบลา แม้ว่าไฮเปอร์โบลาจะไม่ตัดกับแกน Y เรายังเรียกเซกเมนต์จาก $B_1(0, -b)$ ไปยัง $B_2(0, b)$ ซึ่งยาว $= 2b$ เรียกว่า แกนสังยุค (conjugate axis)



เส้น $y = \pm \frac{b}{a}x$ เรียกว่า เส้นแอสซัมโทต (asymptotes) ของไฮเปอร์โบลา

สำหรับไฮเปอร์โบลาที่มีโฟไซอยู่บนแกน Y จะได้เส้น $y = \pm \frac{a}{b}x$ เป็นเส้นแอสซัมโทตของไฮเปอร์โบลา

คอร์ด AB และคอร์ด CD เรียกว่า ลาตัสเรคตัม (latus rectum) ความยาวของ

ลาตัสเรคตัม $= \dfrac{2b^2}{a}$

การเขียนไฮเปอร์โบลาทำได้โดยการเขียนเส้นแอสซัมโทตเขียนจุดยอด จุดปลายของลาตัสเรคตัม และหาจุดบางจุดจากสมการไฮเปอร์โบลา จากนั้นเขียนเส้นผ่านจุดเหล่านี้และให้เข้าใกล้เส้นแอสซัมโทต ก็จะได้ไฮเปอร์โบลาที่ต้องการ

อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า เอคเซนทริตซิตี้ แทนด้วย e ดังนั้น

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

สำหรับไฮเปอร์โบลา a น้อยกว่า c เสมอ ดังนั้น เอคเซนทริตซิตี้ของไฮเปอร์โบลามากกว่า 1 เสมอ

ตัวอย่างที่ 5.4.1 จากสมการ $16x^2 - 9y^2 = 144$ จงหาจุดยอด, โฟไซ, เอคเซนทริตซิตี้, ความยาวของลาตัสเรคตัม, สมการของเส้นแอสซัมโทต และเขียนรูปของไฮเปอร์โบลา

วิธีทำ จาก $16x^2 - 9y^2 = 144$

$$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

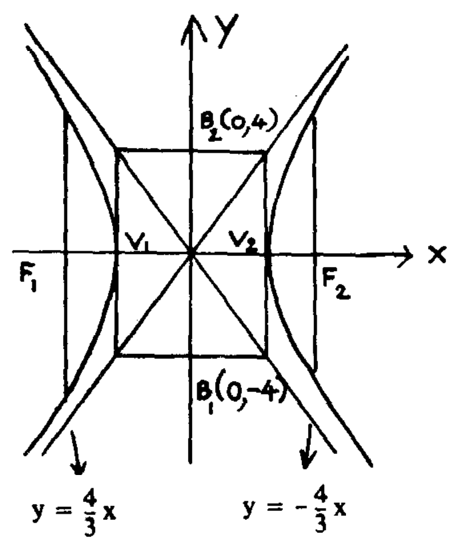
$a = 3, b = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

และ $e = \frac{c}{a}$

$= \frac{5}{3}$

เนื่องจากแกนขวางอยู่บนแกน X ดังนั้นจุดยอดอยู่ที่ $(\pm 3, 0)$ และโฟไซอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$



สมการของเส้นแอสซัมโทตคือ $y = \pm \frac{4}{3}x$

ความยาวของลาตัสเรคตัม $= \frac{2b^2}{a}$

$= \frac{32}{3}$

จุดปลายของลาตัสเรคตัม คือ $\left(5, \frac{32}{3}\right), \left(5, -\frac{32}{3}\right), \left(-5, \frac{32}{3}\right), \left(-5, -\frac{32}{3}\right)$

ตัวอย่างที่ 5.4.2 จุดยอดของไฮเปอร์โบลาอยู่ที่ $(0, \pm 8)$ สมการของเส้นแอสซัมโทต คือ $3y = \pm 4x$ จงหาโคออร์ดิเนตของโฟไซ, เอคเซนตริคซิตี้ และสมการของไฮเปอร์โบลา

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดอยู่บนแกน Y

ดังนั้น เส้นแอตซัมโทต คือ

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

$$= \pm \frac{4}{3}x$$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $a = 8$

$$\frac{8}{b} = \frac{4}{3}$$

$$b = 6$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2}$$

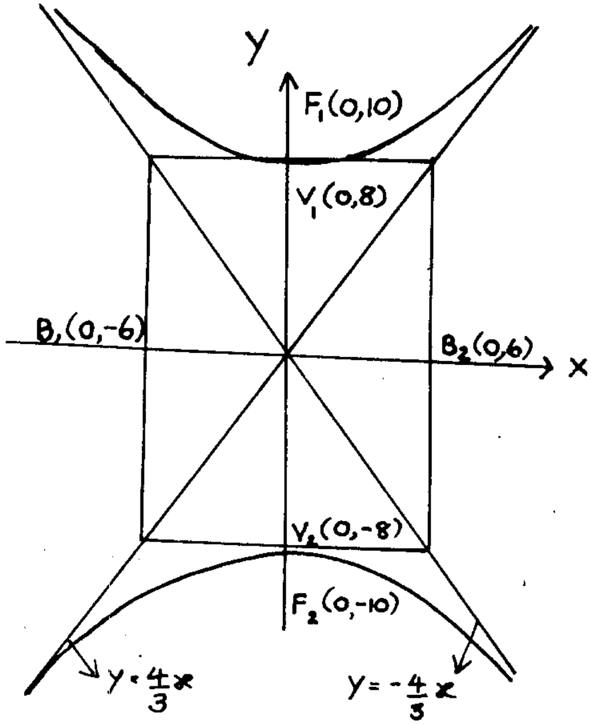
$$= 10$$

และ $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

โคออร์ดิเนตของโฟไซคือ (0, ± 10)

และสมการที่ต้องการคือ

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$



ถ้าให้ b = a สมการ (5.4.1) จะกลายเป็น

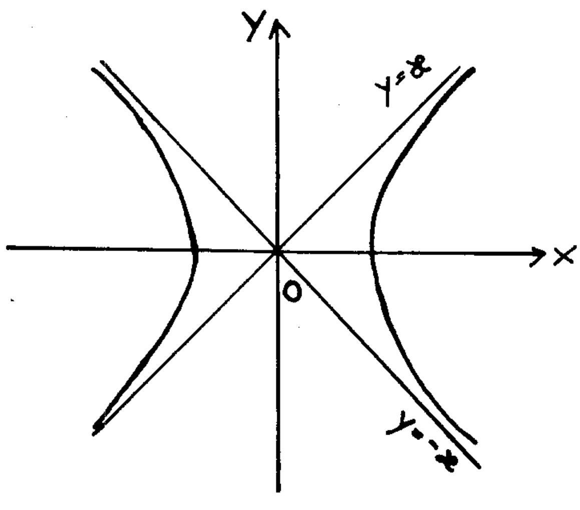
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

ในกรณีนี้เรียกว่าอีควิแลทเทอรัล (equilateral) หรือ เรคแทงกูลาร์ ไฮเปอร์โบลา (rectangular hyperbola)

$$e = \sqrt{2}$$

เส้นแอสซิมโทตคือ $y = \pm x$ เส้นแอสซิมโทตทั้ง 2 ตั้งฉากซึ่งกันและกัน



แบบฝึกหัด 5.3

จงหาจุดยอด, โฟไซ, เอคเซนทริคซิตี้, ความยาวของลาตัสเรคตัม และสมการของเส้นแอสซัมโทต และเขียนรูปของไฮเปอร์โบลา

1. $25x^2 - 144y^2 = 3600$
2. $x^2 - 4y^2 = 16$
3. $16x^2 - 25y^2 = 400$
4. $x^2 - 9y^2 = 36$
5. $y^2 - x^2 = 16$
6. $9y^2 - 25x^2 = 225$
7. $9y^2 - 4x^2 = 36$
8. $8y^2 - x^2 = 8$
9. $3x^2 - y^2 = 3$
10. $x^2 - 3y^2 = 9$
11. $x^2 - y^2 = 1$
12. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

จงหาสมการไฮเปอร์โบลาตามเงื่อนไขต่อไปนี้

13. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 2, 0)$, โฟไซอยู่ที่ $(\pm 3, 0)$
14. โฟไซอยู่ที่ $(\pm 10, 0)$, $e = \frac{5}{4}$
15. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 15, 0)$, สมการของเส้นแอสซัมโทตคือ $5y = \pm 4x$
16. โฟไซอยู่ที่ $(0, \pm 6)$ ความยาวของแกนสังยุค $= 4\sqrt{5}$
17. จุดปลายของแกนสังยุค คือ $(\pm 4, 0)$ เส้นแอสซัมโทตคือ $2y = \pm 3x$
18. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm)$ ความยาวของลาตัสเรคตัม $= 10$
19. โฟไซอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$ เส้นแอสซัมโทตคือ $2y = \pm x$
20. จุดปลายของแกนสังยุคอยู่ที่ $(0, \pm 3)$, $e = 2$
21. โฟไซอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$ ความยาวของลาตัสเรคตัม $= \frac{9}{2}$

22. ลาตัสเรคตัมขนานกับแกน Y และยาว $= 9$ เส้นแอสซัมโทต คือ $4y = \pm 3x$

23. ผ่านจุด (5, 9) และเส้นแอสซัมโทตคือ $y = \pm x$

24. ผ่านจุด (4, 2) และเส้นแอสซัมโทต คือ $3y = \pm 2x$

25. ผ่านจุด (–5, 2) และ (7, 10)

26. ผ่านจุด (4, 2) และ (8, –6)

27. จงหาจุดตัดของ $3x^2 - 7y^2 = 5$ และ $9y^2 - 2x^2 = 1$

28. จากสมการไฮเปอร์โบลาซึ่งมีโฟไซหมือนกับโฟไซของเอลลิพส์ ซึ่งมีสมการคือ $3x^2 + 16y^2 = 48$ และเส้นแอสซัมโทตคือ $3y = \pm 2x$