# บทที่ 4
# วงกลม
## (Circle)

**4.1 รูปมาตรฐาน** (Standard form) ของฟังก์ชันกำลังสอง คือ

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E = 0$$

ถ้า A = B และเครื่องหมายเหมือนกัน ได้กราฟ วงกลม

$A \neq B$ ,, ,, ,, วงรี (เอลลิพส์)

A , B ,, เครื่องหมายตรงข้าม ,, ไฮเปอร์โบลา

A หรือ B = 0 ,, ,, พาราโบลา

A = B = 0 ,, เส้นตรง

**4.2 สมการวงกลม** (The Equation of a Circle)

นิยาม 4.2.1 วงกลม คือ โลกัสของจุดที่มีระยะทางจากจุดคงที่จุดหนึ่งเท่ากับระยะทางคงที่

จุดคงที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center)

ระยะทางคงที่ เรียกว่า รัศมี (Radius)

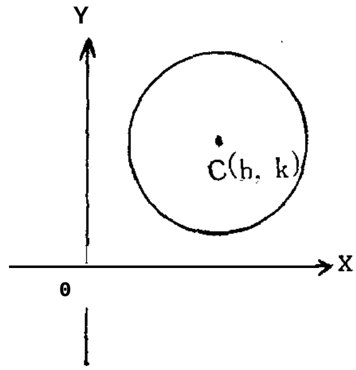
ในการหาสมการวงกลมจากนิยาม

ให้ C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลาง ให้ r เป็นรัศมี ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม จากสูตรระยะทาง จะได้ว่า

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2} \qquad \text{............(4.2.1)}$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k) และรัศมี = r




ในทางกลับกัน ถ้าโคออร์ดิเนตของจุด P(x, y) คล้องตามสมการ (4.2.1) ระยะทางระหว่างจุด P กับจุด C เท่ากับ r แล้วจุด P จะอยู่บนวงกลม

ถ้า h, k ต่างเท่ากับศูนย์ สมการ (4.2.1) จะเป็น

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad \text{............(4.2.2)}$$

ซึ่ง คือสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี = r

จากสมการ (4.2.1) กระจายออกมาได้

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0$$

สมการนี้อยู่ในรูปทั่วไป คือ

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0} \qquad \text{............(4.2.3)}$$

ดังนั้น วงกลมทุกวงจะมีสมการในแบบสมการ (4.2.3)

ถ้ากำหนดสมการวงกลมในแบบสมการ (4.2.3) ต้องทำให้เป็นแบบสมการ (4.2.1) ทำให้รู้จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

ถ้า D และ E เป็นศูนย์ ก็จะได้สมการ (4.2.2)

**ทฤษฎีที่ 4.2.1** กราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ และรัศมี } = r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

พิสูจน์ จากสมการวงกลมทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2 = \frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$$

หรือ $\sqrt{(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ ............(4.2.4)

ทางซ้ายมือของสมการ (4.2.4) คือ ระยะทางระหว่างจุด $(x, y)$ และจุด $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และทางขวามือเป็นค่าคงที่

กราฟของสมการขึ้นอยู่กับค่า $\sqrt{D^2+E^2-4F}$ ดังนี้

a) ถ้า $D^2+E^2-4F > 0$ ทางขวามือของสมการ (4.2.4) เป็นจำนวนจริง และมากกว่าศูนย์ ดังนั้น โลกัสของ (4.2.4) เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และรัศมี $= \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

b) ถ้า $D^2+E^2-4F = 0$ กราฟของ (4.2.4) คือจุดเพียงจุดเดียว คือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ในกรณีนี้เรียกวา a point circle หรือ circle of zero radius (วงกลมซึ่งมีรัศมี $= 0$)

c) ถ้า $D^2+E^2-4F < 0$ ไม่มีจุดบนกราฟ ในกรณีนี้เรียกว่า an imaginary circle

ซตพ.

**ตัวอย่างที่ 4.2.1** a) $(x-2)^2+(y-1)^2 = 4$

คือ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (2, 1) และรัศมี $= 2$

b) $(x-2)^2+(y+1)^2 = 5$

คือ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (2, −1) และรัศมี $= \sqrt{5}$

c) $x^2+y^2 = 1$

คือ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และรัศมี = 1 เรียกว่า unit circle

**ตัวอย่างที่ 4.2.2** จงแสดงว่า $x^2+y^2-2x-6y-15 = 0$ แทนวงกลม จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

**วิธีทำ** จากสมการทั่วไปของวงกลม คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

ดังนั้น

$$(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9) = 15+1+9$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2 = 25$$

เป็นสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (1, 3) และรัศมี = 5 **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 4.2.3** จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $x^2+y^2-4x+6y-3 = 0$

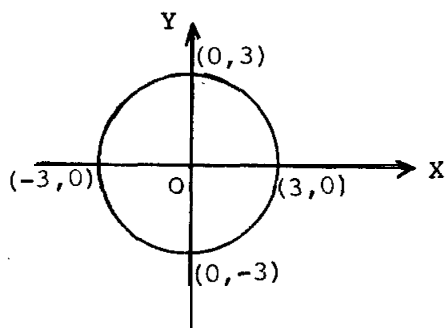
**วิธีทำ** $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = 3+4+9$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 16$$

เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (2, −3) และรัศมี = 4 **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 4.2.4** จงเขียนกราฟของสมการ $x^2+y^2 = 9$

**วิธีทำ** เป็นกราฟของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมี = 3




**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 4.2.5** ถ้ากราฟของวงกลม $x^2+y^2 = k^2$ ผ่านจุด (3, 4) แล้ว k มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** เพราะว่า วงกลมผ่านจุด (3, 4) ดังนั้น จุด (3, 4) จะต้องคล้องสมการ

วงกลม $x^2+y^2 = k^2$

$\therefore\ 3^2+4^2 = k^2$

$k = 5$

**ตัวอย่างที่ 4.2.6** จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 3) และรัศมี = 5

**วิธีทำ** จาก $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$h = 1,\ k = 3,\ r = 5$

$(x-1)^2+(y-3)^2 = 5^2$

$x^2-2x+1+y^2-6y+9 = 25$

$x^2+y^2-2x-6y-15 = 0$ ตอบ

**ตัวอย่างที่ 4.2.7** จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (−3, 4) และรัศมี = 5

**วิธีทำ** $(x-(-3))^2+(y-4)^2 = 25$

$x^2+6x+9+y^2-8y+16 = 25$

$x^2+y^2+6x-8y = 0$

เห็นได้ชัดว่า วงกลมนี้ผ่านจุดกำเนิด ตอบ

**ตัวอย่างที่ 4.2.8** จงหากราฟของสมการ $x^2+y^2-4x+6y+9 = 0$

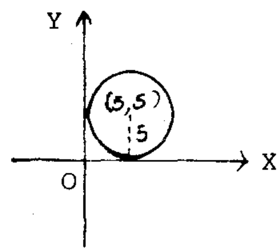
**วิธีทำ** $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = 4$

$(x-2)^2+(y+3)^2 = 4$

เป็นกราฟของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (2, −3) และรัศมี = 2 ตอบ

**ตัวอย่างที่ 4.2.9** จงหาสมการของวงกลม ซึ่งมีรัศมี = 5 อยู่ในควอดแดรนท์ที่ 1 และสัมผัสกับแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2

**วิธีทำ** เนื่องจากระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปยังเส้นสัมผัสจะเท่ากับรัศมี




ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลางคือ (5, 5) และสมการวงกลมที่ต้องการคือ

$$(x-5)^2+(y-5)^2 = 5^2$$

$$x^2+y^2-10x-10y+25 = 0$$ ตอบ

ให้ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดอยู่นอกวงกลม K ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $C(h, k)$ และมีรัศมี $= r$

$$K = \{(x, y) : (x-h)^2+(y-k)^2-r^2 = 0\}$$

ลากเส้นจาก P ไปสัมผัสกับวงกลมที่จุด Q ดังรูป

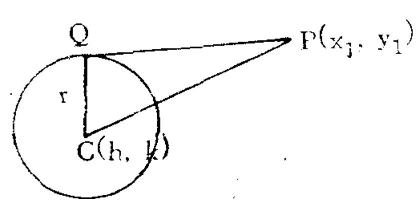
เนื่องจากสามเหลี่ยม PQC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเห็นว่า $|PQ| = \sqrt{|PC|^2-r^2}$

$$|PQ| = \sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}$$

เพราะว่า สมการ (4.2.1) เท่ากับสมการ (4.2.3) ดังนั้น

$$(x-h)^2+(y-k)^2-r^2 = x^2+y^2+Dx+Ey+F$$

$$\boxed{|PQ| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F}} \qquad \text{.......... (4.2.5)}$$



**ตัวอย่างที่ 4.2.10** เส้นสัมผัสลากจากจุด P(8, 4) ไปยังวงกลม

$$x^2+y^2+2x+y-3 = 0$$

จงหาระยะทางจากจุด P ไปยังจุดสัมผัส Q

**วิธีทำ** จากสูตร (4.2.5) จะได้ว่า

$$|PQ| = \sqrt{8^2+4^2+2\times8+4-3}$$

$$= \sqrt{97}$$

# แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาสมการวงกลมตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางที่ (1, 2) และรัศมี = 2

1.2 " จุดกำเนิด " = 7

1.3 " (5, 12) " = 13

1.4 " (0, 0) " = 9

1.5 " (1, −1) " = 2

1.6 " (−4, −5) " = 6

1.7 " (a, 2a) " = $\sqrt{5a}$

1.8 " (3, b) " = b

1.9 ผ่านจุด P(1, −2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ Q(2, −1)

1.10 " P(2, −1) " Q(1, −2)

1.11 จุดศูนย์กลางที่ (3, 2) และสัมผัสกับแกน X

1.12 " $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ และสัมผัสกับแกน Y

1.13 " (5, −2) และสัมผัสกับเส้น $y = 7$

1.14 " (1, 1) และผ่านจุด (3, 2)

1.15 เส้นผ่าศูนย์กลางคือส่วนของเส้นตรงจากจุด (4, 2) ไปยัง (8, 6)

1.16 " " " (−2, 3) " (4, −1)

1.17 จุดศูนย์กลางที่ (2, 1) และผ่านจุด (3, 4)

1.18 " (2, 3) และสัมผัสกับเส้น $3x+4y+2 = 0$

1.19 " (3, −2) " $5x-12y = 0$

1.20 สัมผัสกับแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2 มีรัศมี = 6 และอยู่ในควอดแดรนท์ที่ 2

1.21 มีจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางคือ (−3, 1), (−1, 3)

2. จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมต่อไปนี้

2.1 $x^2+y^2-8x-2y+13 = 0$

2.2 $x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{3}y-95 = 0$

2.3 $x^2+y^2-4x+2y-20 = 0$

2.4 $x^2+y^2+6x+8y+24 = 0$

2.5 $x^2+y^2-6x-16y+73 = 0$

2.6 $4x^2+4y^2-4x+20y+36 = 0$

2.7 $x^2+y^2+6x-12y+20 = 0$

2.8 $x^2+y^2-8x+6y+25 = 0$

2.9' $x^2+y^2+7x+3y-10 = 0$

2.10 $2x^2+2y^2-5x-9y+11 = 0$

2.11 $x^2+y^2-6x-8y = 0$

2.12 $x^2+y^2+4x+3 = 0$

3. จงพิจารณาว่าจุดใดอยู่บนวงกลมซึ่งมีรัศมี = 13 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $Q(1, 2)$

$P_1(6, 14)$, $P_2(1, 15)$, $P_3(-4, -10)$, $P_4(-1, 12)$

4. จากข้อ 2.7 จงหาจุดตัดของวงกลมนี้กับแกน Y และพิจารณาว่าวงกลมนี้ตัดแกน X หรือไม่

5. จากข้อ 2 . 7 จงหาจุดตัดของวงกลมนี้กับเส้น $3x-y+5 = 0$

6. จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2+y^2-2x+18y-87 = 0$

และ $x^2+y^2+2x-2y-11 = 0$

7. จงหา family of circles ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

8. จงหา famiry of circles ซึ่งมีจุดศูนย์กลางเดียวกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

$x^2+y^2+4x+8y-5 = 0$

9. จงหาความยาวของเส้นสัมผัสจากจุดที่กำหนดให้ไปยังวงกลมที่กำหนดให้

9.1 $x^2+y^2+4x+6y-21 = 0$ , $(-4, 5)$

9.2 $x^2+y^2-2x+5y+7 = 0$ , $(-1, -2)$

9.2 $x^2+y^2-x-4y-7 = 0$ , $(3, 0)$

9.3 $x^2+y^2+2x+6y+2 = 0$ , $(-3, 3)$

## 4.3 สมการวงกลมตามเงื่อนไข

**(Circle Determined by Three Conditions)**

สมการทั่วไปของวงกลมจะอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \qquad \ldots\ldots(4.3.1)$$

หรือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ ...........(4.3.2)

ไม่ว่าจะเป็นสมการในแบบ (4.3.1) หรือแบบ (4.3.2) ต่างก็มีตัวคงที่ 3 ตัว ดังนั้น ในการหาสมการของวงกลมต้องทราบตัวคงที่เหล่านี้ นั่นก็หมายความว่า จะต้องมีเงื่อนไข 3 ข้อ ทำให้สามารถสร้างสมการได้ 3 สมการ เพื่อหาค่าตัวคงที่ทั้ง 3 นั้น

ในแต่ละปัญหา ต้องพิจารณาก่อนว่าจะใช้สมการในแบบ (4.3.1) หรือแบบ (4.3.2) ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับว่า แบบไหนจะให้ความสะดวกกว่ากัน

**ตัวอย่างที่ 4.3.1** จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด (5, 3), (6, 2) และ (3, −1)

**วิธีทำ** ปัญหาลักษณะนี้ ควรใช้สมการวงกลมแบบ (4.3.2) เพื่อหา D, E และ F

เนื่องจากจุด (5, 3), (6, 2) และ (3, −1) อยู่บนวงกลม

ดังนั้น จุดเหล่านี้ต้องคล้องตามสมการของวงกลม

นั่นคือ สำหรับจุด (5, 3) จะได้ว่า

$25+9+5D+3E+F = 0$ ............(1)

สำหรับจุด (6, 2) จะได้ว่า

$36+4+6D+2E+F = 0$ ............(2)

สำหรับจุด (3, -1) จะได้ว่า

$$9+1+3D-E+F = 0 \qquad \text{............}(3)$$

จากสมการทั้ง 3 เราสามารถหาค่า D, E และ F ได้ ในที่นี้จะแสดงวิธีแก้สมการโดยใช้ดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ วิธีการนี้ต้องจัดสมการเสียใหม่ โดยให้ตัวแปรอยู่ทางซ้ายมือและตัวคงที่อยู่ทางขวามือ จะได้

$$5D+3E+F = -34 \qquad \text{............}(4)$$

$$6D+2E+F = -40 \qquad \text{............}(5)$$

$$3D-E+F = -10 \qquad \text{............}(6)$$

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2+1)-3(6-3)+1(-6-6)$$

$$= 15-9-12$$

$$= -6$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -34 & 3 & 1 \\ -40 & 2 & 1 \\ -10 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -34(2+1)-3(-40+10)+1(40+20)$$

$$= -102+90+60$$

$$= 48$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 5 & -34 & 1 \\ 6 & -40 & 1 \\ 3 & -10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-40+10)+34(6-3)+1(-60+120)$$

$$= -150+102+60$$

$$= 12$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -34 \\ 6 & 2 & -40 \\ 3 & -1 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-20-40)-3(-60+120)-34(-6-6)$$

$$= -300-180+408$$

$$= -72$$

$$D = \frac{A_1}{A} = \frac{48}{-6} = -8$$

$$E = \frac{A_2}{A} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$F = \frac{A_3}{A} = \frac{-72}{-6} = 12$$

นั่นคือ สมการของวงกลมที่ต้องการ คือ

$x^2+y^2-8x-2y+12 = 0$ ตอบ

**ตัวอย่างที่ 4.3.2** จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $(-1, 1)$ และ $(1, 3)$ และสัมผัสกับเส้น $x+3y = 0$

**วิธีทำ** ในกรณีควรใช้สมการ (4.3.1)

เนื่องจากโคออร์ดิเนตของจุด $(-1, 1)$ และ $(1, 3)$ อยู่บนวงกลม

ดังนั้น จะได้ว่า

$$(-1-h)^2+(1-k)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

และ $$(1-h)^2+(3-k)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

เนื่องจากระยะทางจากจุดศูนย์กลาง (h, k) ไปยังเส้นที่กำหนดให้เท่ากับรัศมี ดังนั้น

$$\frac{h+3k}{\sqrt{10}} = r$$

จาก (1), $1+2h+h^2+1-2k+k^2 = r^2$ .........(3)

จาก (2), $1-2h+h^2+9-6k+k^2 = r^2$ ............(4)

(3)—(4), $4h-8+4k = 0$

$$h+k-2 = 0 \rightarrow k = 2-h$$

แทนค่า r ใน (3) จะได้

$$2+2h+h^2-2k+k^2 = \left(\frac{h+3k}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$= \frac{h^2+6hk+9k^2}{10}$$

$$20+20h+10h^2-20k+10k^2 = h^2+6hk+9k^2$$

$$9h^2-6hk+k^2+20h-20k+20 = 0 \quad \text{.........'' (5)}$$

แทนค่า k ใน (5)

$$9h^2-6h(2-h)+(2-h)^2+20h-20(2-h)+20 = 0$$

$$9h^2-12h+6h^2+4-4h+h^2+20h-40+20h+20 = 0$$

$$16h^2+24h-16 = 0$$

$$2h^2+3h-2 = 0$$

$$(2h-1)(h+2) = 0$$

$$h = -2, \frac{1}{2}$$

เมื่อ $h = -2$, $k = 2+2$

$$= 4$$

เมื่อ $h = \frac{1}{2}$, $k = 2-\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2}$$

จุดศูนย์กลางคือ $(-2, 4)$ และ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

เมื่อจุดศูนย์กลางคือ $(-2, 4)$

$$\text{รัศมี} = \frac{-2+12}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

เมื่อจุดศูนย์กลางคือ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$$\text{รัศมี} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

สมการที่ต้องการจึงมี 2 วง คือ

$$\left.\begin{array}{rl} (x+2)^2+(y-4)^2 &= 10 \\ \text{และ} \quad (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2 &= \frac{5}{2} \end{array}\right\} \quad \text{ตอบ}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{หรือ} \quad x^2+y^2+4x-8y+10 &= 0 \\ \text{และ} \quad x^2+y^2-x-3y &= 0 \end{array}\right\} \quad \text{ตอบ}$$

# แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด 3 จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 $(0, 0), (-4, 0), (0, 6)$

   1.2 $(2, 3), (-1, 7), (1, 5)$

   1.3 $(4, -1), (2, 3), (-2, 5)$

   1.4 $(6, 2), (2, 4), (3, -1)$

   1.5 $(0, -2), (8, 2), (3, 7)$

2. จงหาสมการ วงกลมที่คล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดตัดกันของเส้น $5x - 2y + 4 = 0$ และเส้น $4x - 3y + 13 = 0$ และผ่านจุด $(1, 3)$

   2.2 ผ่านจุด $(5, 4)$ และ $(2, -1)$ และจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้น $7x - 2y - 1 = 0$

   2.3 จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้น $2x - 5y + 1 = 0$ และสัมผัสกับเส้น $4x - 3y + 16 = 0$ ที่จุด $(-1, 4)$

   2.4 ผ่านจุด $(-2, 7)$ และ $(-4, -1)$ มีรัศมี $= \sqrt{34}$

   2.5, ผ่านจุด $(2, 2)$ และ $(-2, 6)$ และสัมผัสกับเส้น $x - 3y = 0$

   2.6 ผ่านจุด $(-8, -1)$ และสัมผัสกับแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2

   2.7 มีจุดศูนย์กลางเหมือนกับ $x^2 + y^2 - 5x + 3y = 0$ และสัมผัสกับเส้น $x - y + 1 = 0$

   2.8 สัมผัสกับแกน Y ที่จุด $(0, 3)$ และผ่านจุด $(8, -1)$

3. จงหาสมการของเส้นสัมผัส วงกลมที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

   3.1 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0, P(1, 3)$

   3.2 $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 7 = 0, P(-1, 1)$

   3.3 $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0, P(2, -1)$

   3.4 $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0, P(-3, 4)$

4. จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

5. จงหาสมการของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   5.1 $x - y + 2 = 0, 3x - 4y + 11 = 0$ และ $2x - 3y + 8 = 0$

   5.2 $x + 3y - 9 = 0, x + 7y - 29 = 0$ และ $x + y - 5 = 0$

6. จงหาสมการของวงกลมที่บรรจุภายในสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

6.1 $x - 1 = 0$, $y - 6 = 0$ และ $3x - 4y - 3 = 0$

6.2 $11x + 2y + 20 = 0$, $2x + 11y - 7 = 0$ และ $2x - y - 19 = 0$