

# บทที่ 3

## สมการและกราฟ

(Equations and Graphs)

### 3.1 กราฟของสมการ (Graph of an Equation)

**นิยาม 3.1.1** กราฟของสมการของ  $x$  และ  $y$  คือจุด  $P(x, y)$  ทั้งหมด ในระนาบ  $XY$  ซึ่งมี  
โคออร์ดิเนตคล้อยตามสมการ

**ตัวอย่างที่ 3.1.1** จากสมการ  $x+y-3 = 0$  จงพิจารณาจุด  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$  และ  $(-1, 1)$   
อยู่บนกราฟของสมการหรือไม่

**วิธีทำ**

แทนค่าจุด  $(1, 2)$  จะได้ว่า

$$1+2-3 = 0$$

เพราะว่าจุด  $(1, 2)$  คล้อยตามสมการที่กำหนดให้

ดังนั้นจุด  $(1, 2)$  อยู่บนกราฟของสมการ

แทนค่าจุด  $(2, 1)$  จะได้ว่า

$$2+1-3 = 0$$

เพราะว่าจุด  $(2, 1)$  คล้อยตามสมการที่กำหนดให้

ดังนั้นจุด  $(2, 1)$  อยู่บนกราฟของสมการ

แทนค่าจุด  $(-1, 1)$  จะได้ว่า

$$-1+1-3 = -3 \neq 0$$

เพราะว่าจุด  $(-1, 1)$  ไม่คล้อยตามสมการที่กำหนดให้

ดังนั้นจุด  $(-1, 1)$  ไม่อยู่บนกราฟของสมการ

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.1.2** จงเขียนกราฟของสมการ  $2x+y-4 = 0$

**วิธีทำ**

หาค่า  $y$  ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ  $x$  จะได้ว่า

$$y = 4-2x$$

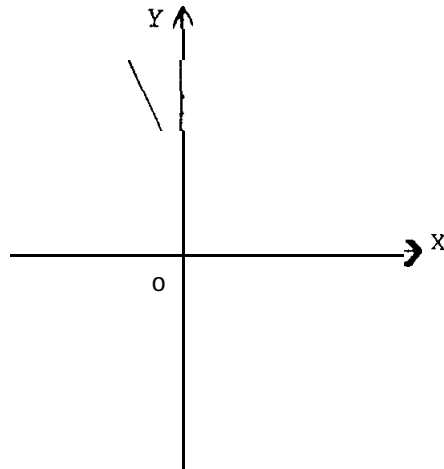
สมมุติค่า  $x$  ขึ้นมา ก็จะได้ค่า  $y$  ซึ่งโคออร์ดิเนต  $(x, y)$  เหล่านี้อยู่บนกราฟ

ของสมการที่กำหนดให้

$s$	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	8	6	4	2	0	-2	-4

จากตารางจะเห็นว่า s-intercept คือ 2

และ y-intercept คือ 4

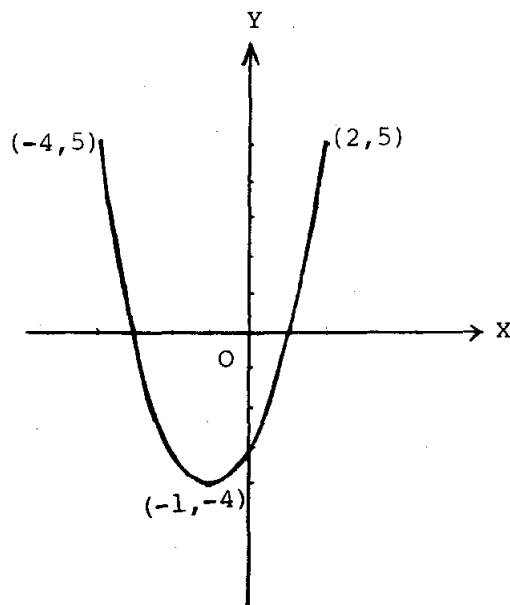


ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงเขียนกราฟของสมการ  $y = x^2 + 2x - 3$

วิธีทำ

หาโคออร์ดิเนตของจุดที่อยู่บนกราฟของสมการดังตาราง

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y$	5	0	-3	-4	-3	0	5



## แบบฝึกหัด 3.1

จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ และหาจุดตัดบนแกนโคออร์ดิเนต

1.  $y = x$  ,

2.  $y = x - 3$

3.  $y = 6 - 2x$

4.  $y + 5 = 0$

5.  $x = 8$

6.  $3y + 2x = 6$

7.  $5y + 2x = 10$

8.  $7y = 3x + 4$

9.  $3x + 4y + 12 = 0$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้สำหรับค่า  $x$  ในช่วงที่กำหนดให้

10.  $y = x^2 + 4$  ,  $(-3, 3)$

11.  $y = x^2 - 4$  ,  $(-4, 4)$

12.  $y = x^2 - 2x$  ,  $(-3, 5)$

13.  $y = x^2 - 3x$  ,  $(-2, 5)$

14.  $y = x^2 - 3x + 4$  ,  $(-2, 5)$

15.  $y = x^3$  ,  $(-3, 3)$

### 3.2 สมมาตร (Symmetry)

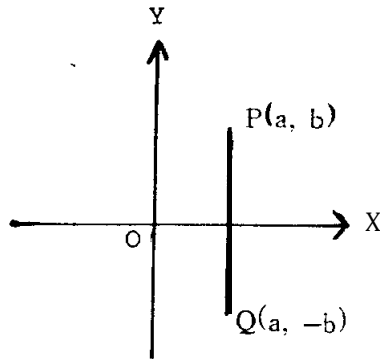
จุด 2 จุดกล่าวว่า สมมาตรกันเทียบกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าเส้นตรงเส้นนั้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น

จุด  $P(a, b)$  และ  $Q(a, -b)$  สมมาตรเทียบกับแกน X

จุด  $P(a, b)$  และ  $Q(-a, b)$  ,, ,, Y

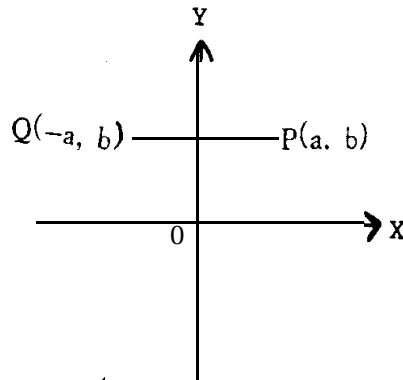
จุด  $P(a, b)$  และ  $Q(-a, -b)$  สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

ดังรูป 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3



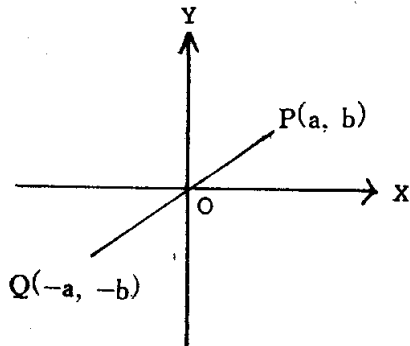
รูป 3.2.1

สมมาตรเทียบกับแกน X



รูป 3.2.2

สมมาตรเทียบกับแกน Y



รูป 3.2.3 สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

### 3.2.1 สมมาตรเทียบกับแกน X

เส้น (curve) จะสมมาตรเทียบกับแกน X ก็ต่อเมื่อสมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ  $y$  ถูกแทนค่าด้วย  $-y$

### 3.2.2 สมมาตรเทียบกับแกน Y

เส้นจะสมมาตรเทียบกับแกน Y ก็ต่อเมื่อสมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อ  $x$  ถูกแทนค่าด้วย  $-x$

### 3.2.3 สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

เส้นสมมาตรจะเทียบกับจุดกำเนิดก็ต่อเมื่อ สมการของเส้นนั้นไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ  $x$  ถูกแทนค่าด้วย  $-x$  และ  $y$  ถูกแทนค่าด้วย  $-y$

**ตัวอย่างที่ 3.2.1** จงพิจารณาว่า  $3x^2 + 2y^2 = 3$  สมมาตรเทียบกับอะไรบ้าง

**วิธีทำ** พิจารณาว่าสมมาตรเทียบกับแกน X หรือไม่โดยแทนค่า  $y$  ด้วย  $-y$  จะได้

$$3x^2 + 2(-y)^2 = 3$$

$$3x^2 + 2y^2 = 3$$

สมการไม่เปลี่ยนแปลง แสดงว่าสมมาตรเทียบกับแกน X

พิจารณาว่าสมมาตรเทียบกับแกน Y หรือไม่ โดยการแทนค่า  $x$  ด้วย  $-x$

จะได้

$$3(-x)^2 + 2y^2 = 3$$

$$3x^2 + 2y^2 = 3$$

สมการไม่เปลี่ยนแปลง แสดงว่าสมมาตรเทียบกับแกน Y

พิจารณาว่าสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิดหรือไม่โดยการแทนค่า  $x$  ด้วย  $-x$

และแทนค่า  $y$  ด้วย  $-y$  จะได้

$$3(-x)^2 + 2(-y)^2 = 3$$

$$3x^2 + 2y^2 = 3$$

สมการไม่เปลี่ยนแปลง แสดงว่าสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

ตอบ

## แบบฝึกหัด 3.2

1. จากจุดที่กำหนด จงหาจุดที่สมมาตรเทียบกับ

i) แกน X

ii) แกน Y

iii) จุดกำเนิด

1.1 (7, 7)

1.2 ( $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ )

1.3 (-1, 0)

1.4 ( $-\pi$ ,  $\pi$ )

1.5 (-3, -4)

1.6 (0, -d)

1.7 ( $\frac{1}{3}$ , 0.33)

1.8 (a-b, a+b)

1.9 (2, -3)

1.10 ( $-\frac{1}{2}$ ,  $\pi$ )

2. จงหาค่า r และ s จากจุด P(r, s) และ Q(2r+1, 2s-1) ซึ่งสมมาตรเมื่อเทียบกับ

a) แกน X

b) แกน Y

c) จุดกำเนิด

จงหาสมมาตรของเส้นต่อไปนี้

$$3. \quad y = x^2 + 4$$

$$4. \quad y = x^2 - 4$$

$$5. \quad y = x^2 - 2x$$

$$6. \quad y = x^2 - 2x + 2$$

$$7. \quad y = x^2 - 3x$$

$$8. \quad y = x^2 - 3x - 1 - 4$$

$$9. \quad y = x^3$$

$$10. \quad y = x^3 - 4x$$

$$11. \quad y = 3x^2$$

$$12. \quad y = 3x^2 + 6$$

$$13. \quad y = x^3$$

$$14. \quad x^2 + y^2 = 16$$

$$15. \quad y = x^4$$

$$16. \quad y = (x^2 - 4)^2$$

### 3.3 การตัดกันของเส้น 2 เส้น (Intersections of Curves)

การหาจุดตัดของเส้น 2 เส้น คือ การหาจุดที่มีโคออร์ดิเนตคล้อยตามสมการของเส้นทั้ง 2 นั้น ซึ่งก็คือ การแก้สมการหาค่า  $x$  และ  $y$  จากสมการทั้ง 2 นั้น

**ตัวอย่างที่ 3.3.1** จงหาจุดตัดของแต่ละเส้นต่อไปนี้

$$l_1: 4x - 3y + 2 = 0$$

$$l_2: 3x - 4y - 20 = 0$$

$$l_3: x - 7 = 0$$

$$\text{กับวงกลม } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

## วิธีทำ

หาจุดตัดของ  $I_1$  และวงกลม

จากสมการของ  $I_1$  จะได้

$$y = \frac{1}{3}(4x+2) \quad \dots\dots\dots(1)$$

แทนค่า  $y$  ในสมการวงกลม จะได้

$$(x-1)^2 + \left[\frac{1}{3}(4x+2)-2\right]^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + \frac{16}{9}(x-1)^2 = 25$$

$$9(x-1)^2 + 16(x-1)^2 = 225$$

$$25(x-1)^2 = 225$$

$$(x-1)^2 = 9$$

$$x-1 = \pm 3$$

$$x = -2, 4$$

แทนค่า  $x$  ใน (1) จะได้ว่า

$$x = -2 \quad y = -2$$

$$x = 4 \quad y = 6$$

$\therefore$  จุดตัดคือ  $(-2, -2)$  และ  $(4, 6)$  **ตอบ**

หาจุดตัดของเส้น  $I_2$  และวงกลม

จากเส้น  $I_2$  จะได้

$$y = \frac{1}{4}(3x-20)$$

แทนค่า  $y$  ในสมการวงกลม

$$(x-1)^2 + \left[\frac{1}{4}(3x-20)-2\right]^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{20}{4} - 2\right)^2 = 25$$



$$(x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - 7\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times 7x + 49 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{21}{2}x + 119 = 25$$

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{2}x + 50 = 25$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 2 = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{1}{4}(12-20)$$

$$= -2$$

∴ จุดตัดคือ (4, -2)      **ตอบ**

$$l_3: x = 7, 36 + (y-2)^2 = 25$$

$$(y-2)^2 = -11 \text{ ไม่มีจุดตัด} \quad \text{ตอบ}$$

**ตัวอย่างที่ 3.3.2** จงหาจุดตัดของ  $x-2y+2 = 0$  และ  $x^2+4y^2 = 100$

**วิธีทำ**

$$x = 2y - 2$$

$$(2y-2)^2 + 4y^2 = 100$$

$$4y^2 - 8y + 4 + 4y^2 = 100$$

$$8y^2 - 8y - 96 = 0$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$(y-4)(y+3) = 0$$

$$y = 4, -3$$

$$x = 6, -8$$

∴ จุดตัดคือ (6, 4) และ (-8, -3)      **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 3.3.3** จงหาจุดตัดของ  $x+y = 10$  และ  $x^2 + y^2 = 16$

**วิธีทำ**

$$x = 10 - y$$

$$(10 - y)^2 + y^2 = 16$$

$$100 - 20y + y^2 + y^2 = 16$$

$$2y^2 - 20y + 84 = 0$$

$$y^2 - 10y + 42 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 42}}{2}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{-17}}{2}$$

$$= 5 \pm \sqrt{-17}$$

แสดงว่าไม่มีจุดตัด

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 3.3.4** จงหาจุดตัดของเส้น  $y = -x - 3$  และพาราโบลา  $y = 3 + 4x - x^2$

**วิธีทำ**

$$-x - 3 = 3 + 4x - x^2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6, -1$$

$$x = 6, \quad y = -6 - 3 = -9$$

$$x = -1, \quad y = -(-1) - 3 = -2$$

ดังนั้น จุดตัดที่ต้องการ คือ (6, -9) และ (-1, -2)      **ตอบ**

เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น จากตัวอย่างที่ 3.3.1  $I_2$

เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด  $(4, -2)$

**ตัวอย่างที่ 3.3.5** จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม

$$(x-2)^2 + (y+8)^2 = 169$$

ที่จุด  $(7, 4)$

**วิธีทำ**

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่  $(2, -8)$

$$\text{ความชันของรัศมี} = \frac{-8-4}{2-7} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นสัมผัส} = -\frac{5}{12}$$

สมการของเส้นสัมผัส คือ

$$y-4 = -\frac{5}{12}(x-7)$$

$$5x+12y-83 = 0$$

**ตอบ**

### แบบฝึกหัด 3.3

จงหาจุดตัดของเส้นแต่ละคู่ต่อไปนี้

1.  $4x - y + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0$$

2.  $y = x^2 + 4x - 13$

$$y = 3x - 1$$

3.  $x^2 + y^2 = 20$

$$y = 3x + 10$$

4.  $x^2 + y^2 = 41$

$$xy = 20$$

จงหาจุดตัดของวงกลม  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$  และเส้นตรงต่อไปนี้

5.  $x - y = 0$

6.  $y - 6 = 0$

7.  $x - 10 = 0$

8.  $x - y + 1 = 0$

9.  $3x + 4y - 41 = 0$

10.  $x - 7y + 28 = 0$

จงหาจุดตัดของวงกลม  $x^2 + y^2 = 8$  และเส้นต่อไปนี้

11.  $x - y = 0$

12.  $2x + y = 0$

13.  $x - 2\sqrt{2} = 0$

14.  $x + 3 = 0$

15.  $s - by - 2 = 0$

16. จงหาสมการเส้นสัมผัสกับวงกลม  $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$  ที่จุด

a)  $P(0, 2)$

b)  $P(9, 5)$

### 3.4 สมการโลกัส (The Equation of a Locus)

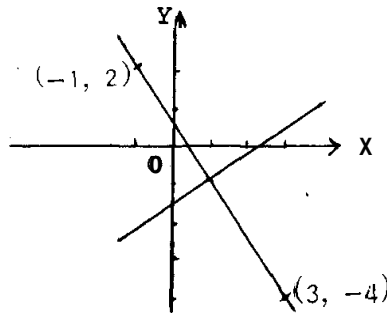
โลกัส คือ เส้นทางเดินของจุดตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

สมการโลกัส คือ สมการซึ่งมีโลกัสที่กำหนดให้เป็นกราฟของสมการนั้น

**ตัวอย่างที่ 3.4.1** จงหาสมการของเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งเส้นที่ผ่านจุด  $(-1, 2)$  และ  $(3, -4)$

**วิธีทำ** ให้  $P(x, y)$  เป็นจุดที่อยู่บนเส้นที่ต้องการ

ในเรขาคณิต เส้นที่ต้องการ คือ โลกัสของจุด  $P(x, y)$  ซึ่งมีระยะห่างจากจุด  $(-1, 2)$  และจุด  $(3, -4)$  เท่ากัน



$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25$$

$$2x - 3y - 5 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$2x - 3y - 5 = 0$$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.4.2** จงหาสมการของเส้นที่ผ่านจุด  $(1, -2)$  และมีความชัน  $= -\frac{2}{3}$

**วิธีทำ** ให้  $(x, y)$  เป็นโคออร์ดิเนตของจุดใด ๆ ที่อยู่บนโลกัด

จากหัวข้อ 2.1 จะได้ว่า ความชันของเส้นที่ผ่านจุด  $(x, y)$  และจุด  $(1, -2)$

คือ  $\frac{y+2}{x-1}$

เนื่องจากความชันที่กำหนดให้  $= -\frac{2}{3}$

ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ

$$\frac{y+2}{x-1} = -\frac{2}{3}$$

$2x+3y+4 = 0$                       **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 3.4.3** จงหาโลกัดของสมการ  $\frac{y-3}{x+2} = \frac{5}{4}$

**วิธีทำ** ทางซ้ายมือของสมการคือ ความชันของเส้นที่ผ่านจุด  $(x, y)$  และจุด  $(-2, 3)$

เนื่องจากความชันนี้เท่ากับ  $\frac{5}{4}$

ดังนั้น โลกัดของสมการที่กำหนดให้ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(-2, 3)$  และมี

ความชัน  $= \frac{5}{4}$                       **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 3.4.4** จงหาโลกัดของสมการ  $(x+2)^2+(y-7)^2 = 16$

**วิธีทำ** จาก  $(x+2)^2+(y-7)^2 = 16$

จะได้ว่า  $\sqrt{(x+2)^2+(y-7)^2} = 4$

จะเห็นว่ากราฟนี้คือโลกัดของจุด ซึ่งมีระยะทางจากจุด  $(-2, 7)$  เท่ากับ 4

ดังนั้น กราฟที่ต้องการคือวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-2, 7)$

และรัศมี  $= 4$                       **ตอบ**

### แบบฝึกหัด 3.4

จงหาสมการของโลโก้ต่อไปนี้

1. เส้นขนานกับแกน X และผ่านจุด  $(5, -2)$
2. เส้นขนานกับแกน Y และผ่านจุด  $(2, -1)$
3. วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมี  $= 4$
4. วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(2, -1)$  และรัศมี  $= 5$
5. วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี  $= 5$
6. วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(-5, 1)$  และผ่านจุด  $(-1, 4)$
7. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเซกเมนต์ซึ่งเชื่อมจุด  $(4, 1)$  และ  $(-2, 3)$
8. เส้นที่ผ่านจุด  $(2, 4)$  และมีความชัน  $= \frac{3}{2}$
9. เส้นที่ผ่านจุด  $(-1, 3)$  และมีความชัน  $= -\frac{2}{5}$
10. เส้นที่ผ่านจุด  $(2, 5)$  และมีความเอียง  $45^\circ$
11. เส้นที่ผ่านจุด  $(0, -4)$  และมีความเอียง  $120^\circ$

จงอธิบายโลโก้ของสมการต่อไปนี้

12.  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$
13.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$
14.  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}$
15.  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2}$
16.  $\frac{y-1}{x-4} = 3$
17.  $\frac{y-5}{x+1} = -\frac{4}{3}$
18.  $y-2 = 2(x-3)$

จงหาสมการของโลกัสน์ของจุด ซึ่งคล้อยตามเงื่อนไขต่อไปนี้

19. ระยะที่กำหนดทิศทางจากแกน  $X$  เท่ากับ 2 เท่าของระยะที่กำหนดทิศทางจากแกน  $Y$
20. ผลบวกของระยะที่กำหนดทิศทางจากแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2 เท่ากับ 2
21. ผลบวกของกำลัง 2 ของระยะทางจากแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2 เท่ากับ 9
22. ระยะทางจากจุดกำเนิดเท่ากับ 3 เท่าของระยะทางจากจุด  $(4, 0)$