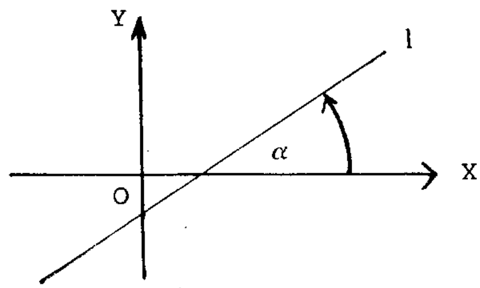
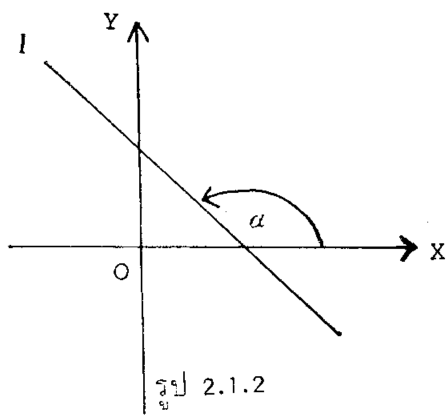
บทที่ 2
เส้นตรง
Straight line

2.1 ความเอียงและความชัน (Inclination and Slope)

นิยาม 2.1.1 ความเอียงของเส้นตรง l คือมุมที่เส้นตรง l ทำกับแกน X โดยวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ดังรูป 2.1.1 และรูป 2.1.2

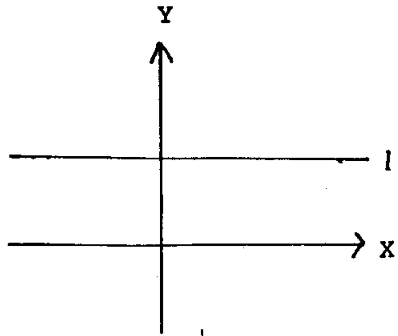


รูป 2.1.1



รูป 2.1.2

จากรูป 2.1.1 และรูป 2.1.2 α คือความเอียงของเส้นตรง l ความเอียงของเส้นในแนวระดับเท่ากับ 0 ดังรูป 2.1.3



รูป 2.1.3

นิยาม 2.1.2 ความชัน (slope) ของเส้นตรง l ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ m คือ tangent ของความเอียง α นั่นคือ

$$m = \tan \alpha$$

พิสัยของค่าของความเอียง α ของเส้นตรง l คือ

$$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

ถ้า $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ เส้นตรง l จะเฉียงขึ้นไปทางขวามือ และความชันมีค่าเป็นบวก ดังรูป 2.1.1

ถ้า $\alpha > 90^\circ$ เส้นตรง l จะเฉียงขึ้นไปทางซ้ายมือ และความชันมีค่าเป็นลบ ดังรูป 2.1.2

เส้นตรงที่อยู่ในแนวระดับหรือขนานกับแกน X จะมีความเอียงและความชันเท่ากับศูนย์

ดังนั้น $m = \tan 0^\circ = 0$

เส้นตรงที่อยู่ในแนวดิ่ง หรือขนานกับ Y จะมีความเอียงเท่ากับ 90°

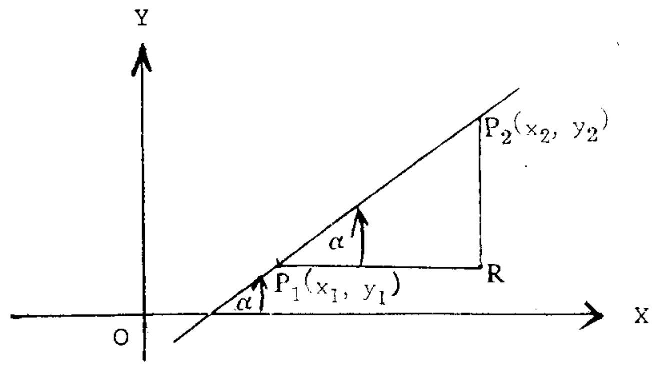
ดังนั้น $m = \tan 90^\circ = \infty$ (อนันต์)

$\tan 90^\circ$ หาค่าไม่ได้ (does not eaist)

นั่นคือ เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ไม่มีความชัน

ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด คือ จุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ l มีความเอียงเท่ากับ α

เขียนจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ลงบนระนาบ XY โดยทำมุม α กับแกน X สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก P_1P_2R ดังรูป 2.1.4



รูป 2.1.4

มุม P_1RP_2 เป็นมุมฉาก และมุม P_2P_1R มีค่าเท่ากับ α

ดังนั้น ค่าความชันของเส้นตรง l คือ

$$\begin{aligned} m &= \tan\alpha \\ &= \frac{P_2R}{P_1R} \\ &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \qquad \text{..........}(2.1.1)$$

ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\tan\alpha$ จะมีค่าคงที่เสมอ เนื่องจาก α ไม่ว่าจะวัดที่จุดใด ๆ ก็ตามจะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังนั้น ค่าความชันของเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อมเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2.1.1 จงหาความชันของเส้นที่ผ่านจุด A(1, 1) และ B(4, 5)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 1,\ y_1 = 1$

$$x_2 = 4,\ y_2 = 5$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{5-1}{4-1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

หรือ ให้ $x_1 = 4, \quad y_1 = 5$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 1$$

$$m = \frac{1-5}{1-4}$$

$$= \frac{-4}{-3}$$

$$= \frac{4}{3}$$ ตอบ

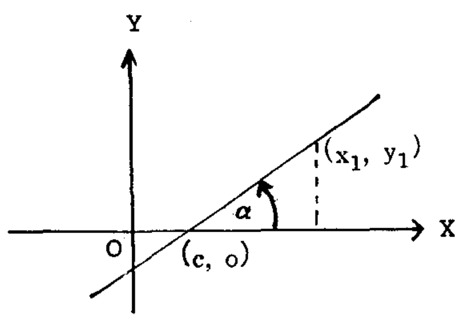
จะเห็นว่า ไม่ว่าจะใช้จุดใดเป็น $P_1(x_1, y_1)$ และจุดที่เหลือเป็น $P_2(x_2, y_2)$ ก็จะได้ความชันเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และจุด (c, o)

วิธีทำ ถ้า $o^\circ < \alpha < 90^\circ$ แล้ว

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - o}{x_1 - c}$$

ดังรูป



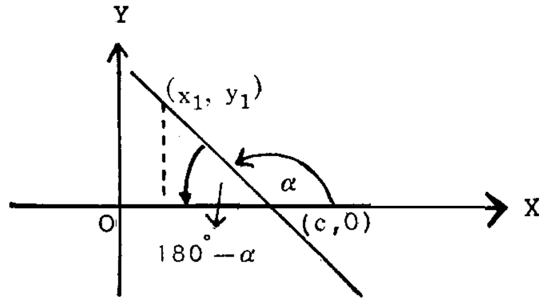
ถ้า $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ แล้ว

$$\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$

$$= -\frac{y_1 - o}{c - x_1}$$

$$= \frac{y_1 - o}{x_1 - c}$$

ดังรูป



ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.1.3 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A(−3, 2) และ B(1, 5)

วิธีทำ ให้ $x_1 = -3, \quad y_1 = 2$

$x_2 = 1, \quad y_2 = 5$

$m = \frac{5-2}{1+3}$

$= \frac{3}{4}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.1.4 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (−1, 2) และจุด (0, −2)

วิธีทำ If $x_1 = 0, \quad y_1 = -2$

$x_2 = -1, \quad y_2 = 2$

$m = \frac{2+2}{-1-0}$

$= \frac{4}{-1}$

$= -4$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.1.5 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 5) และจุด (−7, 5)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 3, \quad y_1 = 5$

$x_2 = -7 \quad y_2 = 5$

$m = \frac{5-5}{-7-3}$

$= 0$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.1.6 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 5) และจุด (3, −6)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 3, \quad y_1 = 5$

$x_2 = 3, \quad y_2 = -6$

จะเห็นว่าโคออร์ดิเนตของ x ของทั้งสองจุดมีค่าเท่ากัน

ดังนั้น เส้นตรงเส้นนี้ขนานกับแกน Y

นั่นคือ เส้นตรงเส้นนี้ไม่มีความชัน ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.1.7 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4) และ (3, 7)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 1,\ y_1 = 4$

$x_2 = 3,\ y_2 = 7$

$$m = \frac{7-4}{3-1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2.1.8 จงหาจุดที่เส้นตรง l ซึ่งผ่าน $P_0(1, 3)$ และ $P_1(4, -2)$ ตัดแกน X

วิธีทำ ให้ l ตัดแกน X ที่จุด $Q(a, 0)$

ความชันของ l $= \frac{-2-3}{4-1}$

$$= -\frac{5}{3}$$

ความชันของ l ที่วัดจาก Q และ P_1 คือ

$$\frac{-2-0}{4-a} = \frac{2}{a-4}$$

$$-\frac{5}{3} = \frac{2}{a-4}$$

$$-5(a-4) = 6$$

$$-5a+20 = 6$$

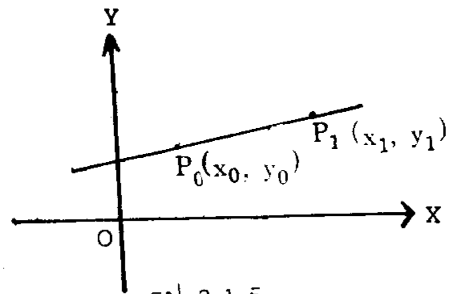
$$-5a = -14$$

$$a = \frac{14}{5}$$

จุด Q มีโคออร์ดิเนต คือ $(\frac{14}{5}, 0)$ ตอบ

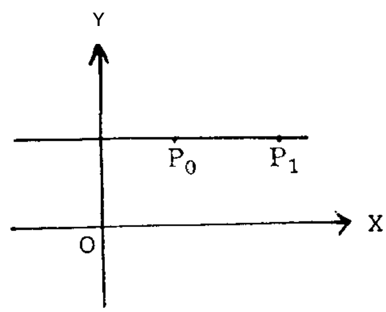
เครื่องหมายของความชัน (The Sign of the Slope)

1. ความชันเป็นบวก ดังรูป 2.1.5
2. ความชันเป็นศูนย์ ,, 2.1.6
3. ความชันเป็นลบ ,, 2.1.7



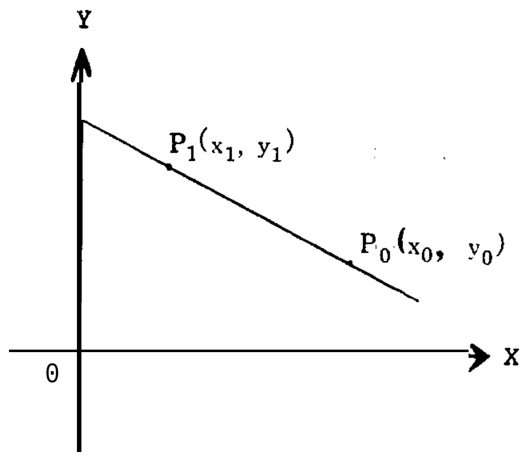
รูป 2.1.5

$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} > 0$$



รูป 2.1.6

$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = 0$$



รูป 2.1.7

$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} < 0$$

เส้นในแนวดิ่ง (Vertical line)

ทุก ๆ จุดบนเส้นในแนวดิ่ง จะมีค่า x เหมือนกัน คือ $x_1 = x_0$

ดังนั้น $x_1-x_0 = 0$ และ $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ หาค่าไม่ได้

Y

vertical line

0 X

4 - L

แบบฝึกหัดที่ ๒.1

จากข้อ 1 ถึง 6 จงหาความชันของเส้นที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

1. $P_1(-3, 3)$, $P_2(2, 9)$
2. $P_1(1, -1)$, $P_2(-3, 2)$
3. $P_1(-2, 1)$, $P_2(4, 7)$
4. $P_1(-6, -3)$, $P_2(2, 3)$
5. $P_1(-2, 5)$, $P_2(3, 1)$
6. $P_1(1, 2)$, $P_2(0, 1)$
7. $P_1(0, 0)$, $P_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
8. $P_1(a, a)$, $P_2(b, b)$
9. $P_1(-\pi, 10)$, $P_2(\frac{2}{3}, 10)$
10. จงแสดงว่า

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

11. เส้นตรง l ผ่านจุด A(1, 1) และมีความชันเท่ากับ 3 ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด B(2, y) ด้วย จงหาค่า y
12. เส้นตรง l ผ่านจุด A(1, 1) และมีความชันเท่ากับ −2 ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด B(2, y) ด้วย จงหาค่า y
13. เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ จงหาความชันของเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเส้นนี้
14. เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ จงหาความชันของเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นนี้
15. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด (k, 2) และ (1, 3) มีค่าความชันเท่ากับ 2
16. จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น A(−2, −4), B(−3, 4), C(10, 20) และ D(5, 0) ตั้งได้ฉากกัน

2.2 เส้นตรงขนานกันและเส้นตรงตั้งได้ฉากกัน (Parallel and Perpendicular Lines)

ทฤษฎีที่ 2.2.1 สำหรับเส้นตรงสองเส้นใด ๆ l_1 และ l_2 ที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

a) l_1 และ l_2 ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

b) l_1 และ l_2 ตั้งได้ฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

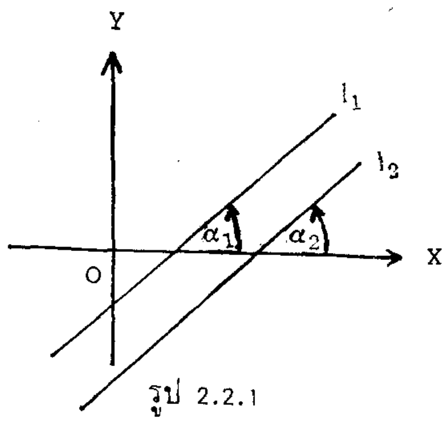
พิสูจน์ a) ให้ α_1 และ α_2 เป็นความเอียงของ l_1 และ l_2 ตามลำดับ เมื่อ l_1 และ l_2 ขนานกัน จะได้ว่า

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

ดังนั้น $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$

นั่นคือ $m_1 = m_2$

ดูรูป 2.2.1



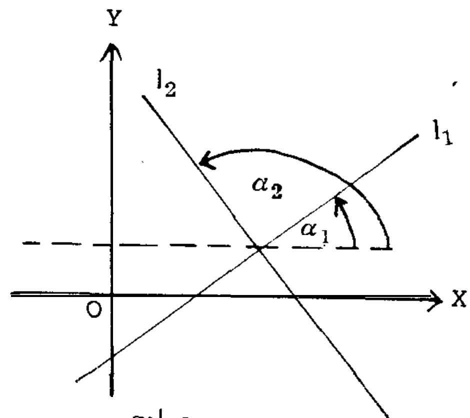
รูป 2.2.1

b) ให้ l_1 ตั้งฉากกับ l_2 จะได้ว่า

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$

ดูรูป 2.2.2



รูป 2.2.2

$$\tan \alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1)$$

$$= -\cot \alpha_1$$

$$= -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

ถ้า m_1 หรือ m_2 หาค่าไม่ได้ แล้วแสดงว่า l_1 หรือ l_2 เป็นเส้นในแนวดิ่ง

ถ้า l_1 ขนานกับ l_2 แล้ว l_1 และ l_2 ต้องเป็นเส้นในแนวดิ่ง

ในกรณีตั้งฉาก แสดงว่า เส้นหนึ่งอยู่ในแนวดิ่ง อีกเส้นหนึ่งต้องอยู่ในแนวระดับ

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงหาความชันของเส้นที่ขนานกับเส้นที่ผ่านจุด A(3, 2) และ B(5, 7)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 3,\ y_1 = 2$

$$x_2 = 5,\ y_2 = 7$$

$$m = \frac{7-2}{5-3}$$

$$= \frac{5}{2}$$

ความชันของเส้นที่ขนานกับเส้นที่ผ่านจุด A(3, 2) และ B(5, 7) คือ $\frac{5}{2}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2.2 จงหาความชันของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นที่ผ่านจุด A(3, 2) และ B(−1, 1)

วิธีทำ ให้ $x_1 = 3,\ y_1 = 2$

$$x_2 = -1,\ y_2 = 1$$

$$m = \frac{1-2}{-1-3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ความชันของเส้นที่ขนานกับเส้นที่ผ่านจุด A(3, 2) และ B(−1, 1) คือ $\frac{1}{4}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2.3 จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุด A(2, 1) และ B(3, 3)

วิธีทำ

$$m = \frac{3-1}{3-2}$$

$$= 2$$

ความชันของเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุด A(2, 1) และ B(3, 3) คือ $-\frac{1}{2}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2.4 จงหาความชันของเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุด A(0, 2) และ B(5, 0)

วิธีทำ

$$m = \frac{0-2}{5-0}$$

$$= -\frac{2}{5}$$

ความชันของเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุด A(0, 2) และ B(5, 0) คือ $\frac{5}{2}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2.5 สามเหลี่ยม ABC มีจุดมุมอยู่ที่ A(1, 1), B(3, 5) และ C(2, 6) จงหาความชันของเส้นทีแสดงความสูงจากจุดยอด A ไปยังฐาน BC

วิธีทำ ความชันของเส้น BC $= \frac{6-5}{2-3}$

$$= -1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นที่แสดงความสูงจากจุดยอด A ไปยังฐาน BC คือ 1 ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2.6 l_1 ผ่านจุด A(2, 1), B(3, 5)

l_2 ผ่านจุด C(−1, 3), D(4, y_0)

จงหา y_0 ถ้า a) l_1 ขนานกับ l_2

b) l_1 ตั้งฉากกับ l_2

วิธีทำ ให้ m_1 เป็นความชันของ l_1

m_2 .. l_2

$$m_1 = \frac{5-1}{3-2} = 4$$

$$m_2 = \frac{y_0-3}{4-(-1)} = \frac{y_0-3}{5}$$

a) ถ้า l_1 ขนานกับ l_2 แล้ว

$$4 = \frac{y_0-3}{5}$$

$$20 = y_0-3$$

$$y_0 = 23$$ ตอบ

b) ถ้า l_1 ตั้งฉากกับ l_2 แล้ว

$$4\left(\frac{y_0-3}{5}\right) = -1$$

$$4y_0-12 = -5$$

$$4y_0 = 7$$

$$y_0 = \frac{7}{4}$$ ตอบ

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาความชันของเส้นที่ผ่านจุด

   1.1 $(-1, 2)$, $(3, 4)$

   1.2 $(3, 5)$, $(6, 5)$

   1.3 $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$

   1.4 $(a, a'$, $(-a, -a)$

2. 2.1 เส้นที่ผ่าน $P(-2, 5)$ และ $Q(2, 3)$ ตัดแกน x ที่ใด

   2.2 ,, $P(5,2)$ และ $Q(1, 1)$,, Y ที่ใด

3. จงหา a, b จากจุด $P_1(-3, 5)$, $P_2(4, 1)$, $P_3(a, 8)$ และ $P_4(2, b)$ ซึ่งจุดเหล่านี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

4. ให้ l_1 ผ่านจุด $A(2, -3)$ และ $B(7, 7)$

   l_2 ,, $C(5, -1)$ และ $D(6, y_0)$

   จงหา y_0 ถ้า a) l_1 ขนานกับ l_2

   b) l_1 ตั้งฉากกับ l_2

5. ให้ l_1 ผ่านจุด $A(2. 3)$. $B(7, 6)$

   l_2 ,, $C(1, 3)$. $D(x_0. 1)$

   จงหา x_0 ถ้า a) l_1 ขนานกับ l_2

   b) l_1 ตั้งฉากกับ l_2

6. กำหนดให้ l_1 ผ่านจุด $A(4, 2)$, $B(7, 1)$

   l_2 ,, $C(2. 5)$, $D(2, -1)$

   l_3 ,, $E(0, 0)$, $F(1, 3)$

l_4 ผ่านจุด G(2, 4), H(1, 0)

l_5 " I(−1, 2), J(5, 2)

l_6 " K(3, 2), L(2, −1)

จงพิจารณา

a) เส้นไหนอยู่ในแนวระดับ

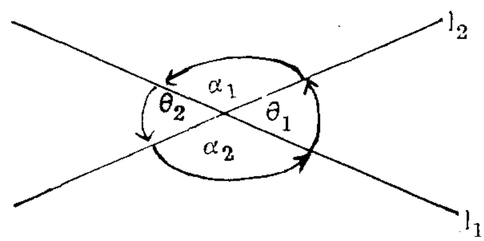
b) เส้นไหนอยู่ในแนวดิ่ง

c) คู่ใดขนานกัน

d) คู่ใดตั้งฉากกัน

2.3 มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น (Angle between two lines)

เส้นตรง 2 เส้น l_1 และ l_2 ตัดกัน มุมจาก l_1 ไปยัง l_2 คือมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกา โดยเริ่มจากเส้น l_1 ไปยังเส้น l_2 ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

จากรูป 2.3.1 จะเห็นว่า มีมุม 2 มุม จาก l_1 ไปยัง l_2 คือมุม θ_1 และ θ_2 ในทำนองเดียวกัน ก็มีมุม 2 มุมจาก l_2 ไปยัง l_1 คือมุม α_1 และ α_2

แต่ $\theta_1 = \theta_2$

และ $\alpha_1 = \alpha_2$

ดังนั้น การพิจารณาว่า θ_1 หรือ θ_2 เป็นมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 จึงไม่ต่างกัน และพิจารณาว่า α_1 หรือ α_2 เป็นมุมจาก l_2 ไปยัง l_1 ก็ไม่แตกต่างกัน

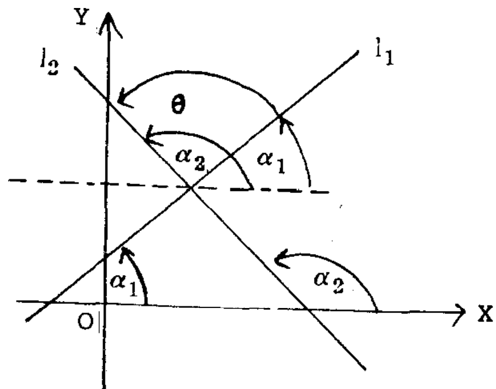
การสร้างสูตรสำหรับหามุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง 2 เส้น

ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรง 2 เส้น ที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ และ θ เป็นมุมจาก l_1 ไปยัง l_2

ถ้า $m_1m_2 = -1$ แล้ว $\theta = 90^\circ$

แต่ถ้า $m_1m_2 \neq -1$ แล้ว

$$\tan 6 = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\, m_2} \quad \text{เมื่อ } 0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$$



รูป 2.3.2

พิจารณารูป 2.3.2 α_1 และ α_2 เป็นความเอียงของ l_1 และ l_2 ตามลำดับ และ θ เป็นมุมจาก l_1 ไปยัง l_2

ดังนั้น $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$= \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\,\tan\alpha_1}$$

$$= \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\tan\theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}}$$

ในกรณีที่ $m_1 = m_2$ แสดงว่า l_1 และ l_2 ขนานกัน $\theta = 0^\circ$ และเนื่องจาก $\tan 0^\circ = 0$

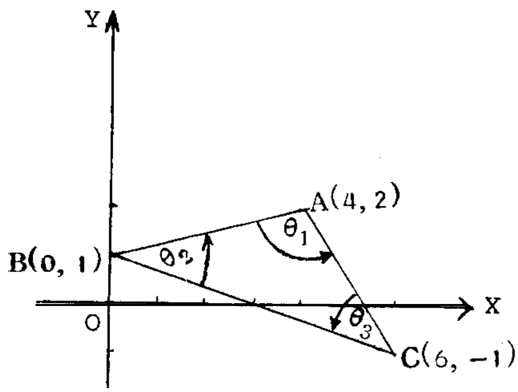
ดังนั้น ในกรณีนี้สูตร

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$ ก็เป็นจริง

ถ้า $m_1 m_2 = -1$ แสดงว่า l_1 และ l_2 ตั้งฉากกัน **ดังนั้น** $\theta = 90^\circ$

ตัวอย่างที่ 2.3.1 จงหามุมภายในของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมอยู่ที่ A(4, 2), B(0, 1) และ C(6, −1)

วิธีทำ



AC มีความชัน $m_1 = \frac{2-(-1)}{4-6}$

$= \frac{3}{-2}$

$= -\frac{3}{2}$

AB มีความชัน $m_2 = \frac{2-1}{4-0}$

$\frac{1}{4}$

BC มีความชัน $m_3 = \frac{1-(-1)}{0-6}$

$= \frac{2}{-6}$

$= -\frac{1}{i}$

$$\tan \theta_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}{1 + (-\frac{3}{2})(\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{\frac{-6-1}{4}}{\frac{\;-\;}{8}}$$

$$= \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{5}{8}}$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{8}{5}$$

$$\frac{14}{5}$$

$$\theta_i = \tan^{-1}(-\frac{14}{5})$$

$$\tan \theta_2 = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}$$

$$\frac{\frac{1}{4} - (-\frac{1}{3})}{1 + (\frac{1}{4})(-\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{12}}$$

$$= \frac{\frac{3+4}{12}}{\frac{11}{12}}$$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{12}{11}$$

7

= i i

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{11}\right)$$

$$\tan \theta_3 = \frac{m_3 - m_1}{1+m_1m_3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-2+9}{6}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}}$$

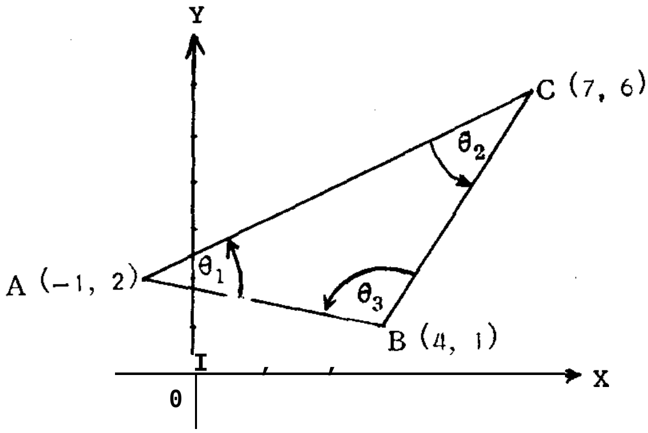
$$= \frac{7}{6} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{9}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.3.2 จงหามุมภายในของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมอยู่ที่ A $(-1, 2)$, B $(4, 1)$ และ C $(7, 6)$

วิธีทำ



A C มีความชัน $m_1 = \frac{6-2}{7+1}$

$$= \frac{1}{2}$$

B C มีความชัน $m_2 = \frac{6-1}{7-4}$

$$= \frac{5}{3}$$

AB มีความชัน $m_3 = \frac{2-1}{-1-4}$

$$\frac{1}{5}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{5})}{1 + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{5})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{5+2}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{7}{9}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$\tan\theta_2 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{10-3}{6}}{1 + \frac{5}{6}}$$

$$= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{11}{6}}$$

$$= \frac{7}{11}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{11}\right)$$

$$\tan\theta_3 = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3}$$

$$= \frac{\frac{-1}{5} - \frac{5}{3}}{1 + \left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-3-25}{15}}{1 - \frac{5}{15}}$$

$$= \frac{-\frac{28}{15}}{\frac{10}{15}}$$

$$= -\frac{14}{5}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(-\frac{14}{3}\right)$$ ตอบ

แบบฝึกหัด 2.3

จากข้อ 1 ถึง 10 จงหา tangent ของมุมจากเส้น l_1 ซึ่งมีความชันเท่ากับ m_1 ไปยัง l_2 ซึ่งมีความชันเท่ากับ m_2

1. $m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{2}{3}$
2. $m_1 = \frac{4}{5}, \quad m_2 = -\frac{3}{4}$
3. $m_1 = -\frac{1}{4}, \quad m_2 = 4$
4. $m_1 = \frac{7}{9}, \quad m_2 = \frac{5}{3}$
5. $m_1 = 3, \quad m_2 = -\frac{2}{3}$
6. $m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = 2$
7. $m_1 = \frac{1}{4}, \quad m_2 = \frac{3}{4}$
8. $m_1 = \frac{5}{6}, \quad m_2 = \frac{3}{5}$
9. $m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = -\frac{7}{2}$
10. $m_1 = \frac{1}{5}, \quad m_2 = \frac{6}{7}$
11. จงหาความชันของเส้น l_1 โดยกำหนดว่า $m_2 = \frac{4}{3}$ และมุมจาก l_1 ไปยัง l_2 เท่ากับ 45°
12. จงพิจารณาว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,5)$ และ $(1,9)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(5,8)$ และ $(11,-4)$
13. จงหาค่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น $(2,3)$, $(-5,-4)$ และ $(6,2)$
14. จงหาค่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมเป็น $(1,1)$, $(0,0)$ และ $(-2,-6)$
15. ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และ $(3,5)$ จงหาความชันของเส้นตรง k ซึ่งมีมุมตัดกันระหว่าง l กับ k เป็น 45°
16. ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และ $(3,5)$ จงหาความชันของเส้นตรง m ซึ่งมีมุมตัดกันระหว่าง l กับ m เป็น 60°

17. ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2)$ และ $(3, 5)$ จงหาความชันของเส้นตรง n ซึ่งมีมุมตัดกันระหว่าง l กับ n เป็น 30°

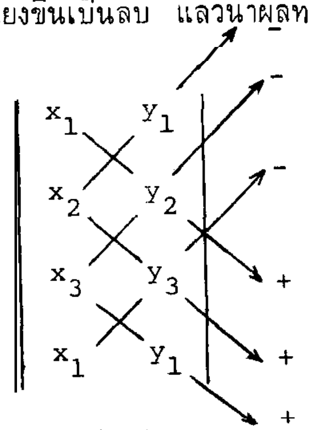
18. ให้ l_1 ผ่านจุด $(3, y)$ และ $(-1, 2)$ และ l_2 ผ่านจุด $(4, 1)$ และ $(-2, 3)$ มุมจาก l_1 ไปยัง l_2 เท่ากับ 135° จงหาค่า y

2.4 พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม (Area of any polygon)

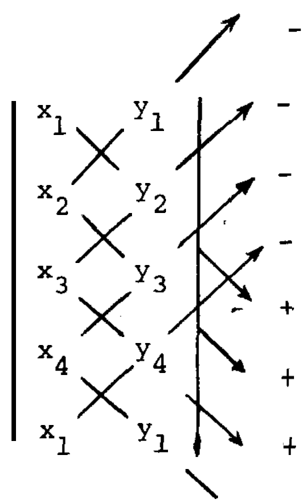
ให้ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมพื้นที่ A ของสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ คือ

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3)$$

A หาได้ดังนี้ นำโคออร์ดิเนตของจุดมุมทั้ง 3 มาเขียนดังรูป 2.4.1 คูณทะแยงลงเป็นบวก และคูณทะแยงขึ้นเป็นลบ แล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมาบวกกันก็จะได้เป็นพื้นที่ A

$A = \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $P_1P_2P_3P_4$ ก็คำนวณในทำนองเดียวกันโดยที่มี $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ และ $P_4(x_4, y_4)$ พื้นที่ A ของสี่เหลี่ยม $P_1P_2P_3P_4$ หาได้ดังนี้

$A = \frac{1}{2}$ 

ในทำนองเดียวกัน

สามารถใช้วิธีนี้หาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมได้

ตัวอย่างที่ 2.4.1 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ โดยมี $P_1\,(1, 7)$, $P_2\,(-6, -3)$ และ $P_3\,(5, 2)$

วิธีทำ

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -6 & -3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\,(-3 - 12 + 35 - (-42) - (-15) - 2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 75$$

$$= 37\frac{1}{2}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2 . 4

จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่กำหนดจุดมุมทั้ง 3 ให้ดังนี้

1. $(2, 5)$, $(5, 9)$, $(7, 3)$
2. $(6, 1)$, $(7, 5)$, $(3, 7)$
3. $(-5, 6)$, $(5, -7)$, $(7, 9)$
4. $(5, 4)$, $(7, -3)$, $(3, 1)$
5. $(-4, -1)$, $(-6, 2)$, $(8, -3)$
6. $(1, 6)$, $(-2, 7)$, $(-8, -1)$
7. $(-4, -3)$, $(1, 4)$, $(-3, 5)$
8. $(2, 1)$, $(5, 4)$, $(3, -5)$

จงแสดงว่าจุด 3 จุดที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดย

ก. วิธีหาพื้นที่

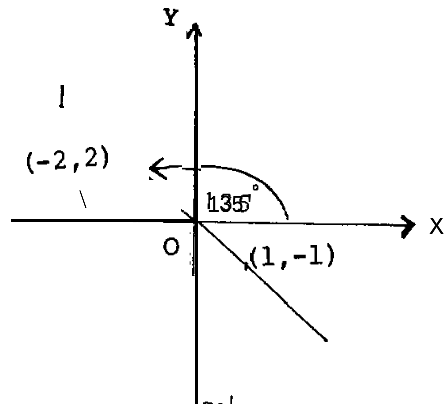
ข. วิธีหาความชัน

9. $(3, 9)$, $(6, 4)$, $(15, -11)$
10. $(1, -4)$, $(5, 3)$, $(13, 17)$
11. จงเขียนสมการซึ่งพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น (x, y), $(4, 1)$ และ $(2, 5)$ เป็นศูนย์ โลกัสของสมการนี้คืออะไร
12. จงหาค่า x โดยกำหนดว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็น $(x, 5)$, $(2, 1)$ และ $(4, 7)$ เท่ากับ 10
13. สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีจุดปลายของฐานอยู่ที่ $(\frac{5}{2}, 2)$, $(\frac{11}{2}, 6)$ จุดมุมที่สาม คือ $(0, b)$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม
14. สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีจุดปลายของฐานอยู่ที่ $(3, -5)$, $(6, -1)$ จงหาจุดมุมที่สามถ้าพื้นที่สามเหลี่ยม $= 25$

2.5 สมการของเส้นตรง (Equation of a Line)

สมการเส้นตรงในระนาบ คือ สมการกำลังหนึ่งของตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y

สมมติให้ l เป็นเส้นแบ่งครึ่งระนาบส่วนที่ 2 และส่วนที่ 4 นั่น คือ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดด้วยความเอียง 135° ดังรูป 2.5.1



รูป 2.5.1

จะเห็นว่า ถ้า P (x,y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l แล้ว

$$x = -y$$

หรือ $$x + y = 0$$

จุดใด ๆ (x,y) เมื่อ $x = -y$ ต้องอยู่บนเส้นตรง l ดังนั้นจึงกล่าวว่า สมการ $x + y = 0$ เป็นสมการของเส้นตรง l

นิยาม 2.5.1 สมการของเส้นตรง คือ สมการซึ่ง

1. โคออร์ดิเนตของทุกจุดบนเส้นตรงคล้องตามสมการ
2. ทุก ๆ จุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตคล้องตามสมการจะอยู่บนเส้นตรง

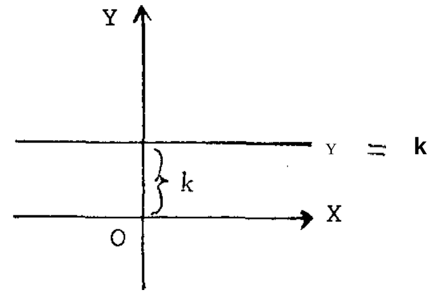
หมายเหตุ ถ้าคูณหรือหารตลอดสมการของเส้นตรงด้วยจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์แล้ว สมการนั้นก็ยังเป็นสมการของเส้นตรงเส้นเดิม

2.5.1 สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกนโคออร์ดิเนต

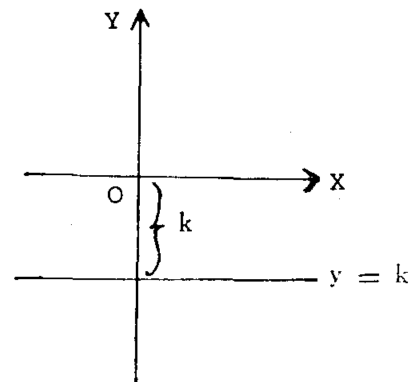
สมการของเส้นที่ขนานกับแกน X อยู่ในรูป

$$y = k \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

ถ้า $k > 0$ เส้นตรงนี้จะอยู่เหนือแกน X



ถ้า $k < 0$ เส้นตรงนี้จะอยู่ใต้แกน X

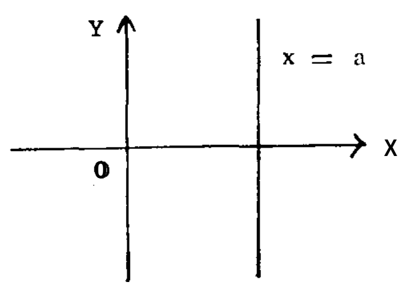


ถ้า $k = 0$ เส้นตรงนี้ คือ แกน X

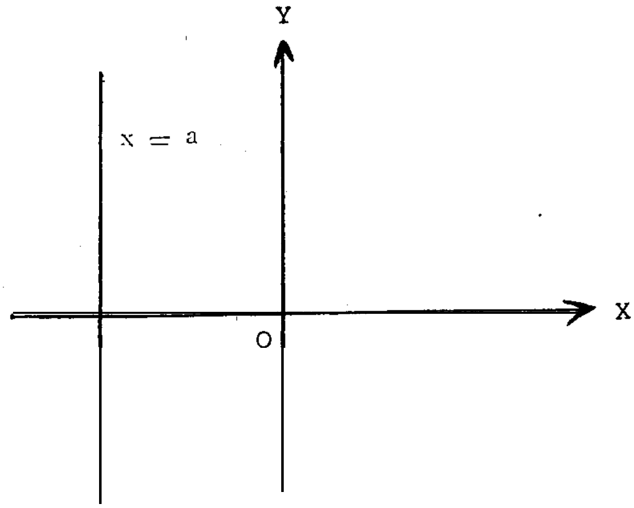
สมการของเส้นที่ขนานกับแกน Y อยู่ในรูป

$x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $a > 0$ เส้นตรงนี้จะอยู่ทางขวามือของแกน Y

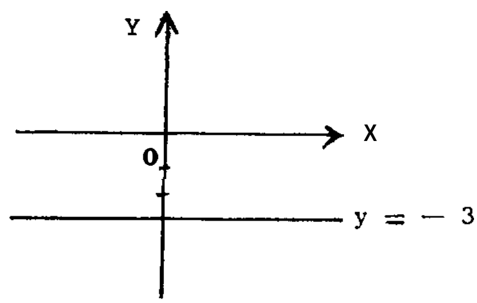


ถ้า $a < o$ เส้นตรงนี้จะอยู่ทางซ้ายมือของแกน Y

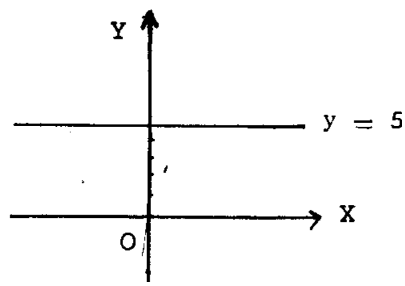


ถ้า $a = o$ เส้นตรงนี้ คือ แกน Y

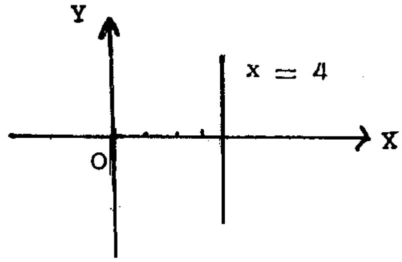
ตัวอย่างที่ 2.5.1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -3$



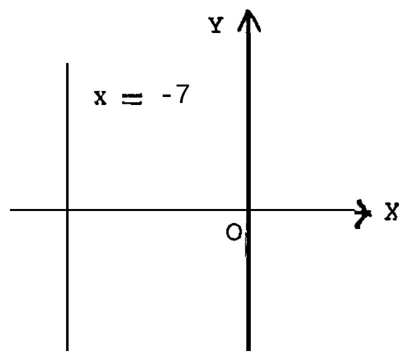
ตัวอย่างที่ 2.5.2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = 5$



ตัวอย่างที่ 2.5.3 จงเขียนกราฟของ $x = 4$



ตัวอย่างที่ 2.5.4 จงเขียนกราฟของสมการ $x = -7$

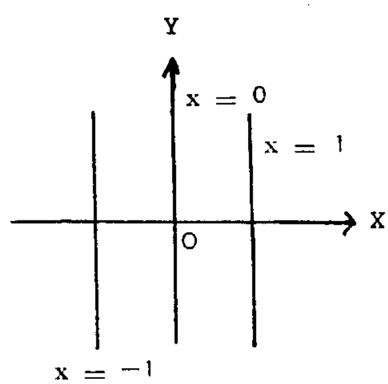


ตัวอย่างที่ 2.5.5 สมการ $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ต่างก็แทนเส้นในแนวดิ่ง

$x = -1$ คือ เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ห่างจากแกน Y ทางซ้าย 1 หน่วย

$x = 0$ คือ แกน Y

$x = 1$ คือ เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ห่างจากแกน Y ทางขวา 1 หน่วย

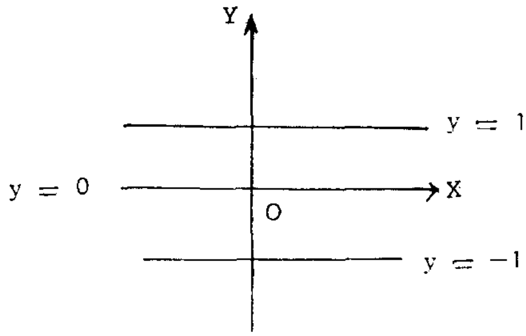


ตัวอย่างที่ 2.5.6 สมการ $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ ต่างก็แทนเส้นในแนวระดับ

$y = -1$ คือ เส้นที่ขนานกับแกน X ห่างจากแกน X ลงไปข้างล่าง 1 หน่วย

$y = 0$ คือ แกน X

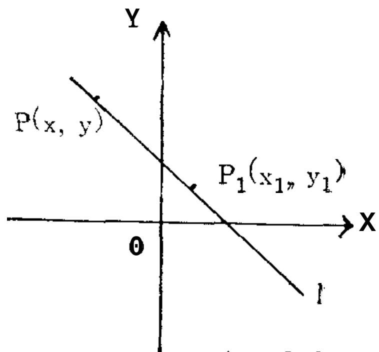
$y = 1$ คือ เส้นที่ขนานกับแกน X ห่างจากแกน X ขึ้นไปข้างบน 1 หน่วย



2.5.2 สมการเส้นตรงพิจารณาจากจุดบนเส้นตรงและความชัน (The Point–Slop Form)

ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน m

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l ซึ่งห่างจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ดังรูป 2.5.2



รูป 2.5.2

จากสมการ 2.1.1 จะได้ว่า

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

หรือ $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ ……………… (2.5.1)

สมการ (2.5.1) เรียกว่า point–slope form ของสมการเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 2.5.7 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (2, 1) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (−3, −1) และ (−1, 2)

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (−3, −1) และ (−1, 2) คือ

$$\frac{2-(-1)}{-1+3}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ดังนั้นความชันของเส้นที่ต้องการคือ $-\frac{2}{3}$

สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-2)$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.5.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 1) และมีความชัน 2

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y - 1 = 2(x-3)$$

$$= 2x - 6$$

$$2x - y - 5 = 0$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.5.9 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (−2, 6) และมีความชัน $\frac{1}{3}$

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y - 6 = \frac{1}{3}(x+2)$$

$$3y - 18 = x + 2$$

$$x - 3y + 20 = 0$$ ตอบ

2.5.3 สมการเส้นตรงพิจารณาจากจุด 2 จุด (The Two-Point Form)

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดที่กำหนดให้บนเส้นตรง ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดนี้คือ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ถ้าแทนค่าความชันนี้ในสมการ (2.5.1) จะได้ว่า

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \quad \text{...............} (2.5.2$$

สมการ (2.5.2) เรียกว่า two-point form ของสมการเส้นตรง

ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 จะขนานกับแกน Y และสมการเส้นตรงจะเขียนได้ในรูป

$$\boxed{x = x_1} \quad \text{...............} (2.5.3)$$

ตัวอย่างที่ 2.5.10 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 5) และ (6, – 3)

วิธีทำ $m = \frac{-3-5}{6-2} = -2$

สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ

$$y - 5 = -2(x - 2)$$

$$y = -2x + 9$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.5.11 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1) และ จุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด (2, 5) และ (4, 3)

วิธีทำ จุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด (2, 5) และ (4, 3) คือ (3, 4)

สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y - 1 = \frac{4-1}{3-2}(x - 2$$

$$y = 3x - 5$$ ตอบ

2.5.4 สมการของเส้นตรงพิจารณาจากจุดตัดบนแกนโคออร์ดิเนตทั้ง 2 (The Intercept Form)

ให้ A(a, o) และ B(o, b) เป็นจุดตัดบนแกน X และแกน Y ตามลำดับ ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ **B** คือ

$$y-0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y = \frac{-b}{a}(x-a)$$

$$= \frac{-b}{a}x + b$$

$$\frac{y}{b} = \frac{-x}{a} + 1$$

$$\therefore \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad \ldots\ldots (2.5.4)$$

สมการ (2.5.4) เรียกว่า Intercept form.

ตัวอย่างที่ 2.5.12 จงหาสมการเส้นตรงที่มี x–intercept คือ 2 และ y–intercept คือ 3

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5.13 จากสมการเส้นตรง $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ จงหา x–intercept และ y–intercept

วิธีทำ

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

ดังนั้น x–interceyt คือ 2

y-intercept คือ -3 } **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5.14 จงหาจุดตัดของเส้น $3x + 4y + 7 = 0$ กับแกนโคออร์ดิเนต

วิธีทำ หา x--intercept ให้ $y = 0$

$$3x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-1}{3}$$

.. x-intercept คือ $\frac{-7}{3}$

WI y-intercept ให้ $x = 0$

$$4y + 7 = 0$$

$$Y = \frac{-7}{4}$$

.. y-intercept **คือ** $\frac{-7}{-4}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5.15 จงหาจุดตัดของเส้น $3x-2y-12 = 0$ กับแกนโคออร์ดิเนตและเขียนสมการเส้นตรงแบบ intercept

วิธีทำ หา x–intercept ให้ $y = 0$

$$3x-12 = 0$$

$$x = 4$$

$\therefore$ x–intercept คือ 4

หา y–intercept ให้ $x = 0$

$$-2y-12 = 0$$

$$y = -6$$

สมการแบบ intercept คือ

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$ ตอบ

2.5.5 สมการเส้นตรงพิจารณาจากความชันและจุดตัดบนแกนโคออร์ดิเนต

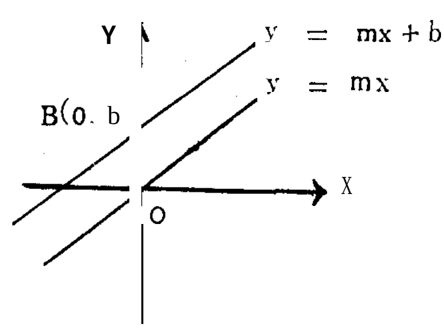
(The Slope-Intercept Form)

ให้เส้นตรง l มีความชัน m และ y–intercept คือ b ดังนั้น B(0, b) เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l จากสมการ (2.5.1) จะได้ว่า

$$y - b = m(x-0)$$

$$\boxed{y = mx + b} \quad \text{..................} (2.5.5)$$

สมการ (2.5.5) เรียกว่า slope–intercept form ของสมการเส้นตรง

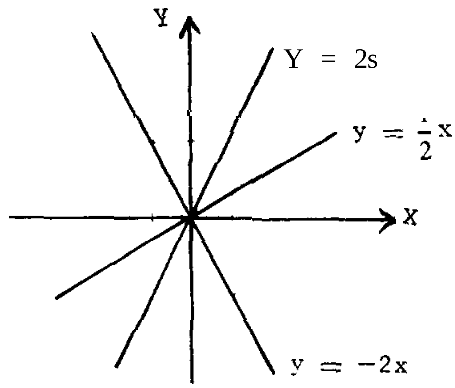


ตัวอย่างที่ 2.5.16 สมการ $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ ต่างแทนเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

$y = -2x$ คือ เส้นตรงที่มีความชัน -2

$y = \frac{1}{2}x$,, ,, $\frac{1}{2}$

$y = 2x$,, ,, 2



ตัวอย่างที่ 2.5.17 สมการ $y = \frac{2}{5}x-1$, $y = \frac{2}{5}x$, $y = \frac{2}{5}x+1$ ต่างก็เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน มีความชัน $\frac{2}{5}$

$y = \frac{2}{5}x - 1$ มี y–intercept -1

$y = \frac{2}{5}x$ คือ เส้นที่ผ่านจุดกำเนิด

$y = \frac{2}{5}x + 1$ มี y–intercept 1

ตัวอย่างที่ 2.5.18 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความชัน -2 และ y–intercept คือ 6

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y = -2x + 6$$

หรือ $2x + y = 6$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5.19 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (5, 1)

a) ขนานกับเส้นตรง $y = 3x+7$

b) ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = 3x+7$

วิธีทำ a) เส้นที่ขนานกับ $y = 3x+7$ จะมีความชัน $= 3$ และผ่านจุด $(5, 1)$

มีสมการ คือ

$$y - 1 = 3(x-5)$$
$$= 3x - 15$$
$$y = 3x - 14$$ ตอบ

b) ให้ความชันของเส้นที่ต้องการ คือ m_1

$$\therefore\ 3m_1 = -1,\quad m_1 = -\frac{1}{3}$$

สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y-1 = -\frac{1}{3}(x-5)$$
$$3y-3 = -x+5$$
$$x+3y = a$$ ตอบ

2.5.6 สมการทั่วไป (The General Form)

สมการใด ๆ ที่อยู่ในรูป

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad \ldots\ldots\ldots (2.5.6)$$

เมื่อ A, B และเป็นตัวคงที่ และ A, B ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ สมการ (2.5.6) จะเป็นสมการกำลังหนึ่งที่มีตัวแปร x และ y

ทฤษฎีที่ 2.5.1 สมการ $Ax + By + C = 0$ เป็นสมการเส้นตรงเมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** ถ้า $B \neq 0$ สามารถหาค่า y ได้ คือ

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5.7)$$

จากหัวข้อ 2.5.5 จะได้ว่า สมการ (2.5.7) เป็นสมการเส้นตรงที่เป็น slope--intercept form $y = mx + b$

ซึ่งมี $m = -\frac{A}{B}$ และ $b = -\frac{C}{B}$ ……… (2.5.8)

กรณีที่ 2 ถ้า $B = 0,\ A \neq 0$ จะได้ว่า

$$x = -\frac{C}{A}$$

สมการนี้เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และมี x–intercept คือ $-\frac{C}{A}$

ใน 2 กรณีที่กล่าวมานี้ จะเห็นว่าสมการ (2.5.6) เป็นสมการเส้นตรงซึ่งเรียกว่า สมการทั่วไปของเส้นตรง หรือ สมการเชิงเส้น (linear equation)

ข้อสังเกต จากสมการ (2.5.7) และ (2.5.8) จะเห็นว่า ถ้าสมการเส้นตรงจัดอยู่ในรูป y เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ x คือ ความชัน และตัวคงที่ คือ y–intercept

ตัวอย่างที่ 2.5.20 กำหนดเส้นตรง $3x+4y-24 = 0$ จงหาความชัน และ intercepts และเขียนสมการให้อยู่ในรูป slope–intercept และ intercept form

วิธีทำ จาก $3x+4y-24 = 0$

$$4y = -3x+24$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

$\therefore$ ความชัน $= -\frac{3}{4}$

และ y–intercept คือ 6

x–intercept คือ 8

สมการเส้นตรงแบบ slope–intercept คือ

$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

สมการเส้นตรงแบบ intercept คือ

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

ตอบ

แบบฝึกหัด ๒.๕

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดและความชันที่กำหนดให้

1. $(5, 2)$, $m = 2$
2. $(-3, 4)$, $m = -2$
3. $(4, 7)$, $m = 0$
4. $(0, -3)$, $m = 2$

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดและความเอียงที่กำหนด ให้

5. $(2, 5)$, $\alpha = 45^\circ$
6. $(2, 5)$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้

7. $(2, 3,)$ $(4, 7)$
8. $(7, 6)$, $(-5, -2)$
9. $(2, -5)$, $(-4, 7)$
10. $(7, 3)$, $(-3, 4)$
11. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, -1)$ และขนานกับ
    a) แกน X
    b) แกน Y
12. จงหาค่า x เมื่อจุด $(x, 3)$ อยู่บนเส้นที่เชื่อมจุด $(2, -7)$ และ จุด $(-4, 8)$
13. จุดมุม 3 จุดของสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ $(1, -3)$, $(-1, -2)$ และ $(3, 6)$ จงหาสมการด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยม และหาจุดมุมที่สี่
14. จุดยอดของสามเหลี่ยมคือ $(-3, 6)$, $(5, 2)$ และ $(7, 4)$ จงหาสมการของด้านของสามเหลี่ยม

15. จงหาสมการของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมในข้อ 14 และหาจุดที่เส้นมัธยฐานทั้ง 3 ตัดกัน

จงหาสมการเส้นตรง โดยกำหนด m และ b ให้

16. $m = 2, \; b = 4$

17. $m = \frac{3}{2}, \; b = \frac{5}{6}$

18. $m = 0, \; b = -3$

19. $m = -\frac{4}{5}, \; b = -\frac{3}{5}$

จงเขียนสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ในรูป slope — intercept และในรูป intercept

20. $2x + 3y = 6$

21. $5x - 2y + 10 = 0$

22. $4x - 3y - 5 = 0$

จงหาความชันและจุดตัดบนแกนโคออร์ดิเนตของเส้นที่กำหนดให้

23. $4x + 2y = 12$

24. $3x + 2y = 12$

25. $4x - 5y = 40$

26. $3x - 5y + 15 = 0$

27. $9x - 6y + 13 = 0$

28. $7x + 2y + 9 = 0$

29. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(8, 2)$ และขนานกับเส้น $2x - 3y + 7 = 0$

30. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 5)$ และตั้งฉากกับเส้น $3x + 4y - 17 = 0$

31. จากเส้นตรง $3x - 2y + 6 = 0$ จงหาความชัน, จุดตัดบนแกน Y และถ้าจุด $(4, y)$ อยู่บนเส้นตรงนี้จงหาค่า y

32. จงแสดงว่าเส้น $7x - 5y - 43 = 0$, $7x - 5y + 105 = 0$, $5x + 7y - 73 = 0$ และ $5x + 7y + 1 = 0$ เป็นด้านของสี่เหลี่ยมมุมฉาก และหาจุดยอดทั้ง 4

จงเขียนสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

33. ผ่านจุด (a, a) ความชัน $= -1$

34. ,, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ และ $(1, \sqrt{3})$

35. มี x — intercept 2 และ y-intercept 6

36. ,, ,, $\frac{3}{2}$,, $-\frac{2}{3}$

37. มีความชัน $= 1$ และ y-intercept 5

38. มีความเอียง 30' และ y-intercept 2

39. ,, 45' ,, ,, -1

40. ,, 150' ,, s-intercept 3

41. ห่างจากแกน x ขึ้นไปข้างบน 3 หน่วย

42. ,, Y ทางซ้าย 3 หน่วย

43. จงหาความชันและ y-intercept ของแต่ละเส้นต่อไปนี้

a $y = x + 4$

b. $4x = 1$

c. $x + y + 1 = 0$

d. $7x + 4y + 4 = 0$

e. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

f. $2y + 5 = 0$

44. **พิจารณาความเอียงของเส้น**

a. $x - y + 2 = 0$

b. $2x - 3 = 0$

กำหนดจุด P และเส้นตรง l ให้ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ

a. ขนานกับ l

b. ตั้งฉากกับ l

45. $(5,-5)$, $y = x + 10$

46. $(0, 11)$, $2y = x - 7$

47. $(0, 0)$, $3y + x = \pi$

48, $(-1,-1)$, $5y - 2x = 9$

49. $(100, 200)$, $x - 37 = 0$

50. ให้ $l : 2x + y + 4 = 0$

a. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งขนานกับ l และมี y—intercept 1

b. ,, ,, ตั้งฉากกับ l ,, ,, 1

2.6 การตัดกันของเส้นตรง 2 เส้น (Intersections of Lines)

เส้นตรง 2 เส้นที่ต่างกันอาจจะตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง หรืออาจจะขนานกัน ซึ่งไม่สามารถหาจุดตัดได้

ถ้าเส้นตรง 2 เส้น คือ

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

และ $$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

ตัดกันที่จุด θ โคออร์ดิเนตของ θ ต้องคล้องตามสมการทั้ง 2 เราสามารถหาโคออร์ดิเนตนี้โดยการแก้สมการทั้งสองเพื่อหาค่า x, y

ตัวอย่างที่ 2.6 1 จงหาจุดตัดของเส้นต $2x - 3y + 4 = 0$ และ $5x + 2y - 1 = 0$

วิธีทำ

$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad \text{———}(1)$$

$$5x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{———}(2)$$

$$(1) \times 5, \quad 10x - 15y \quad 20 = 0 \qquad \text{———}(3)$$

$$(2) \times 2, \quad 10x \ t \ Jy2 = 0 \qquad \text{———}(4)$$

$$(4) - (3), \quad 19y - 22 = 0$$

$$y = \frac{32}{19}$$

แทนค่า y au (1),

$$2x - 3\ \left(\frac{22}{19}\right) + 4 = 0$$

$$2x - \frac{66}{19} + 4 = 0$$

$$2x = \frac{66}{19} - 4$$

$$= \frac{66 - 76}{19}$$

$$= -\frac{10}{19}$$

$$x = -\frac{5}{19}$$

$\therefore$ จุดตัดคือ $\left(-\frac{5}{19}, \frac{22}{19}\right)$ ตอบ

นอกจากการแก้สมการแบบกำจัดตัวแปรค่านี้แล้ว ยังมีอีกวิธีแก้สมการหาค่า x, y โดยใช้ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ ซึ่งทำได้โดยเอาตัวแปรไว้ทางซ้ายและตัวคงที่ไว้ทางขวา จากตัวอย่างที่ 2.6.1 จะได้ว่า

$$2x - 3y = -4$$

$$5x + 2y = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-4)(2) - (1)(-3)}{(2)(2) - (5)\ (-3)}$$

$$\frac{-8 + 3}{4 + 15}$$

$$= -\frac{5}{19}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(2)(1)-(5)(-4)}{(2)(2)-(5)(-3)}$$

$$= \frac{2+20}{4+15}$$

$$= \frac{22}{19}$$

ดังนั้น จุดตัดคือ $\left(-\frac{5}{19}, \frac{22}{19}\right)$ ตอบ

วิธีการแก้สมการแบบนี้ เรียกว่า แก้สมการแบบ Cramer's rule วิธีการของ Cramer's rule ไม่เพียงแต่นำมาแก้สมการหาค่าตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y เท่านั้น แต่ยังนำไปใช้ในการแก้สมการเพื่อหาตัวแปร n ตัวแปรได้ (n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 3)

$$A = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ค่า A ได้มาจากการคูณทะแยงลงมีค่าเป็นบวก และคูณทะแยงขึ้นมีค่าเป็นลบ ดังนั้น

$A = (-4)(2) \quad (1)(-3)$

$= -8 + 3$

$= -5$

ตัวอย่างที่ 2.6.2 จงแก้สมการ $2x = 3y + 14$ และ $y + 3x = 10$

วิธีทำ

$2s = 3y + 14$ ——————(1)

$y + 3x = 10$ ——————(2)

จาก (2), $y = 10 --3x$

แทนค่า y ใน (1).

$2x = 3(10 - 3x) + 14$

$= 30 - 9x + 14$

$11x = 44$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\}$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.6.3 จงหาค่า k ถ้าเส้นตรง $kx + (k-1)y - 18 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $4x + 3y + 7 = 0$

วิธีทำ

$$kx + (k-1)y - 18 = 0 \quad \text{———} (1)$$

$$4x + 3y + 7 = 0 \quad \text{———} (2)$$

จาก (1), $y = -\frac{k}{k-1}x - 1\frac{k}{k-1}$

จาก (2), $y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

$$\therefore \ -\frac{k}{k-1} = -\frac{4}{3}$$

$$3k = 4k - 4$$

$$k = 4$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาจุดตัดของเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้

1. $x + y = 5$

   $3x - 2y = 5$

2. $3x - 2y = 7$

   $x + 3y = 6$

3. $7s + 5y + 2 = 0$

   $x + 4y - 3 = 0$

4. $5x - 3y = 1$

   $3x + 2y = 12$

5. $5x + 3y = 7$

   $2x-y = 5$

6. $2x - 3y - 4 = 0$

   $5x + 2y + 9 = 0$

7. $14x + 3y + 2 = 0$

   $4x + 5y + 13 = 0$

8. สมการของด้านทั้ง 3 ของสามเหลี่ยม คือ $2x - 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 17 = 0$ และ $5x - y + 2 = 0$ จงหาจุดยอดทั้ง 3

9. จงแสดงว่าเส้นตรง $2x - y + 6 = 0$, $4x - 3y + 2 = 0$ และ $5x - 2y + 20 = 0$ ตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง

10. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 5)$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - y - 3 = 0$ และ $3x + 5y - 17 = 0$

จงพิจารณาว่าเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ ถ้าไม่ขนานกันจงหาจุดตัด

11. $3x + 4y - 5 = 0, \quad 2x + y = 0$

12. $3x + 4y - 5 = 0, \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + 1 = 0$

13. $2x - 13 = 0$

14. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y + 1 =$ by-1 0, $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 2 = 0 = 0$

15. $2x + y - 2 = 0, \quad x + 2y + 2 = 0$

16. $3x - y + + = 0, \quad x - 2y - 3 = 0$

17. 3x- 55' +1 = 0, $12x - 20y + 4 = 0$

18. $y = -\frac{2}{3}(x + 5), \quad 2x + 3y + 2 = 0$

19. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6} = 0, \quad \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} = 0$

2.7 ระยะห่างของจุดจากเส้นตรง (Distance of a Point From a Line)

ถ้า l เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ และ P เป็นจุดที่กำหนดให้ ลากเส้นจาก P ไปตั้งฉากกับ l ที่จุด Q ดังนั้น $|PQ|$ คือระยะห่างของจุดจากเส้นตรง

ให้ $d = |PQ|$

ทฤษฎีที่ 2.7.1 ระยะห่าง d ของจุด $P(x_1, y_1)$ จากเส้นตรง l ที่มีสมการเป็น $Ax+By+C = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ตัวอย่างที่ 2.7.1 จงหาระยะห่างของจุด (1, 2) จากเส้นตรง $2x-3y-8 = 0$

วิธีทำ

$$d = \frac{|(2)(1)+(-3)(2)-8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$= \frac{|2-6-8|}{\sqrt{4+9}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{13}}$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.7.2 จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $2x+y-5 = 0$ และ $6x+3y-8 = 0$

วิธีทำ จากเส้น $2x+y-5 = 0$

หา x–intercept, ให้ $y = 0$

$$x = \frac{5}{2}$$

- โคออร์ดิเนตของจุดตัดบนแกน X คือ $(\frac{5}{2}, 0)$

ให้ d = ระยะห่างจากจุด $(\frac{5}{2}, 0)$ จากเส้นตรง $6x+3y-8 = 0$ ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่กำหนดให้

ดังนั้น
$$d = \frac{\left|6(\frac{5}{2})+0-8\right|}{\sqrt{36+9}}$$

$$= \frac{|15-8|}{\sqrt{45}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{45}}$$ ตอบ

แบบฝึกหัด 2.7

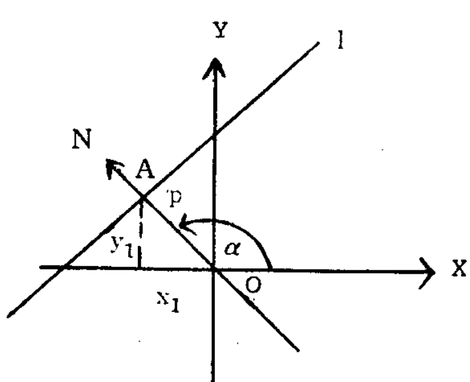
จงหาระยะห่างของจุดที่กำหนดให้จากเส้นตรงที่กำหนดให้

1. $(8, 4)$, $5x+12y-36 = 0$
2. $(0, 3)$. $x+2y-1 = 0$
3. $(0, 0)$. $2y+7 = 0$
4. $(1, 3)$. $x-5 = 0$
5. $(-4, 7)$. $5x-3y-8 = c$

2.8 สมการของเส้นตรงแบบนอร์มอล (The Normal Form)

ให้ l เป็นเส้นที่กำหนดให้ เขียนเส้น ON ผ่านจุด O ให้ตั้งฉากกับ l และให้ α เป็นมุมเอียงของ ON จากหัวข้อ 2.1 เรามีว่า $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ ON เป็นเส้นที่มีทิศทางโดยคิดจาก O ไปยัง N ดูรูป 2.8.1

ให้ $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดตัดของ ON และ l กำหนดระยะที่มีทิศทาง OA ด้วย p แล้ว p จะเป็นบวก ถ้า A อยู่เหนือจุด O และเป็นลบ ถ้า A อยู่ใต้จุด O



รูป 2.8.1

จากนิยามของ $\sin \alpha$ และ $\cos \alpha$ จะพบว่า

$$x_1 = p \cos \alpha, \quad y_1 = p \sin \alpha$$

ให้ m เป็นความชันของ l

เนื่องจาก ON ตั้งฉากกับ l จะได้ว่า

$$m = -\cot \alpha$$

ถ้าเราแทนค่า x_1, y_1 และ m ในสมการเส้นตรงแบบ point slope form จะได้ว่า

$$y - p \sin \alpha = -\cot \alpha (x - p \cos \alpha) \qquad \text{............(2.8.1)}$$

จากสมการ (2.8.1) แทนค่า $\cot \alpha$ ด้วย $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ และคูณตลอดด้วย $\sin \alpha$ จะได้ว่า

$$y \sin \alpha - p \sin^2 \alpha = -x \cos \alpha + p \cos^2 \alpha$$

หรือ $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$

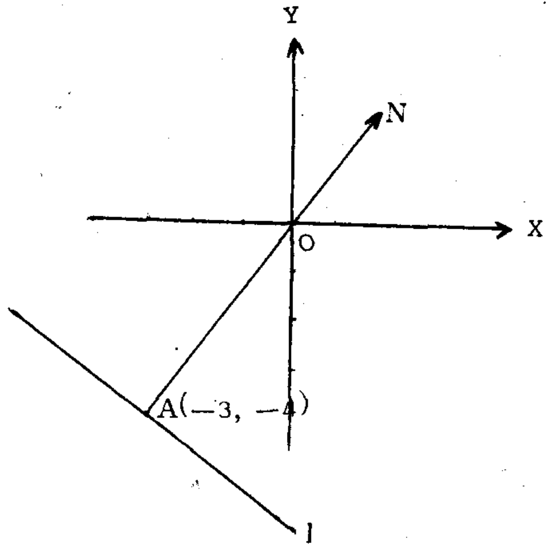
นั่นคือ $$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0} \qquad \text{............(2.8.2)}$$

สมการ (2.8.2) คือสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง l

ในการหาระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง ต้องทำสมการเส้นตรงให้อยู่รูปสมการนอร์มอล

ตัวอย่างที่ 2.8.1 จงหาสมการแบบนอร์มอลของเส้นที่ผ่านจุด A(−3, −4) และตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุด A และจุดกำเนิด

วิธีทำ เขียนเส้น ON ผ่านจุด O และจุด A



รูป 2.8.2

จากรูป 2.8.2 จะเห็นว่า α เป็นมุมแหลม และ OA หรือ p เป็นลบ

เนื่องจาก $p = -\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$= -5$

$\sin \alpha = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

$\cos \alpha = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

สมการที่ต้องการ คือ

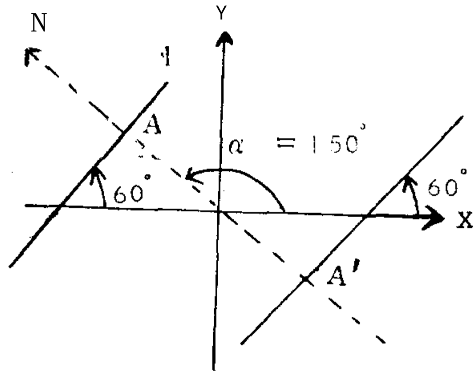
$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} + 5 = 0$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.8.2 เส้นตรง 2 เส้นมีความเอียง $= 60^\circ$ และห่างจากจุดกำเนิด 10 หน่วย จงหาสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรงทั้ง 2

วิธีทำ จากรูป 2.8.3 จะพบว่า $\alpha = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ดังนั้น $\sin \alpha = \sin 150' = \frac{1}{2}$

$\cos \alpha = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



รูป 2.8.3

เส้นตรง l มี p = 10

,, l' มี p = −10

∴ สมการแบบนอร์มอลของ l และ l' คือ

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-10 = 0$$

และ $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+10 = 0$ **ตอบ**

ในการหาสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง l โดยที่ l มีสมการเป็น

$$Ax+By+C = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.3)$$

และให้ $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.4)$

เป็นสมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง l

ในการเปลี่ยนสมการ (2.8.3) ให้เป็นสมการ (2.8.4) ทำได้โดยการคูณสมการ (2.8.3) ด้วย k จะได้ว่า

$$kAx+kBy+kC = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.5)$$

จากสมการ (2.8.U) และสมการ (2.8.5) จะได้

$$kA = \cos\alpha,\ kB = \sin\alpha,\ kC = -p$$

$$k^2A^2 + k^2B^2 = \cos^2 a + \sin^2 a$$

$$k^2(A^2 + B^2) = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$$

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

การพิจารณาเครื่องหมาย เนื่องจาก $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ จึงทำให้ $\sin\alpha$ เป็นบวกหรือศูนย์

ดังนั้น จาก $kB = \sin\alpha$

ถ้า $B \neq 0$ แล้ว k และ B ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน

อย่างไรก็ตาม ถ้า $B = 0$ แล้ว $\sin\alpha = 0$ ดังนั้น $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ และ k จะมีเครื่องหมายเช่นเดียวกับ A

แทนค่า k ใน (2.8.5) จะได้สมการแบบนอร์มอลของเส้นตรง คือ

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

สรุปว่า ถ้า $B \neq 0$ แล้ว เครื่องหมายของ k ต้องเหมือนกับเครื่องหมายของ B

ถ้า $B = 0$ เครื่องหมายของ k ต้องเหมือนกับเครื่องหมายของ A

ตัวอย่างที่ 2.8.3 จงหาสมการแบบนอร์มอลของ $3x-4y+6 = 0$

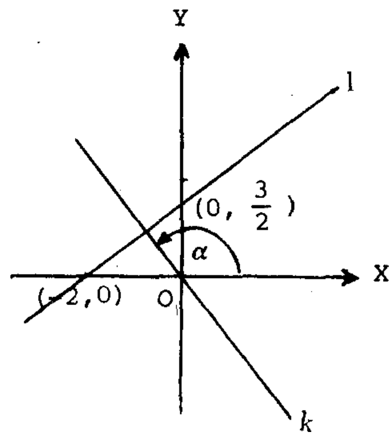
วิธีทำ เนื่องจาก $B = -4 < 0$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{9+16}$$

$$= 5$$

สมการแบบนอร์มอล คือ

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$



$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin a = \frac{4}{5}$ และ $p = \frac{6}{5}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.8.4 จงหาสมการแบบนอร์มอลของ $3x-4y-6 = 0$

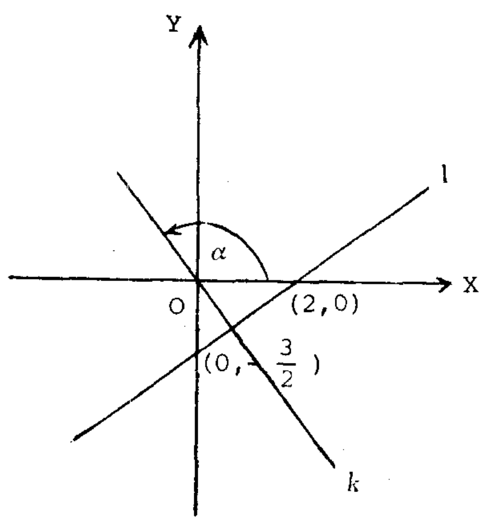
วิธีทำ เนื่องจาก $B = -4 < 0$

$\sqrt{A^2+B^2} = 5$

สมการแบบนอร์มอล คือ

$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{6}{5} = 0$

$\cos a = -\frac{3}{5}$, $\sin a = \frac{4}{5}$ และ $p = -\frac{6}{5}$ **ตอบ**



ตัวอย่างที่ 2.8.5 จงหาสมการแบบนอร์มอลของ $x-3y-7 = 0$ และหาค่า α และ p

วิธีทำ เนื่องจาก $B = -3 < 0$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

สมการแบบนอร์มอล คือ

$$-\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} + \frac{7}{\sqrt{10}} = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad p = -\frac{7}{\sqrt{10}}$$

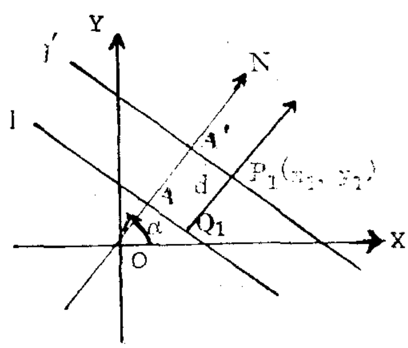
เนื่องจาก α อยู่ในควอดแดรนท์ที่ 2 จากตาราง จะได้ว่า $\alpha = 108^\circ$

ระยะทางจากจุดไปยังเส้น

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดที่กำหนดให้ และให้สมการเส้นตรงที่กำหนดให้ มีสมการแบบนอร์มอล เป็น

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad \text{...........(2.8.6)}$$

เมื่อ $p = \overline{OA}$ (ดูรูป 2.8.4)



รูป 2.8.4

ให้ l' เป็นเส้นที่ผ่านจุด P_1 และขนานกับ l จึงเขียนสมการแบบนอร์มอลได้เป็น

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p' = 0$$

เมื่อ $p' = \overline{OA'}$

เนื่องจาก P_1 อยู่บน l' ดังนั้น โคออร์ดิเนตจะต้องคล้องตามสมการของ l' นั่นคือ

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p' = 0 \qquad \text{...........(2.8.7)}$$

ให้ Q_1 เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l ดังรูป 2.8.4

$$\begin{aligned} d &= \overline{Q_1P_1} = \overline{AA'} \\ &= \overline{OA'} - \overline{OA} \\ &= p' - p \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า p' จากสมการ (2.8.7) ใน d จะได้ว่า

$$\boxed{d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p} \qquad \text{...........(2.8.8)}$$

สูตรระยะทาง d หรือ $\overline{Q_1P_1}$ จากสมการ (2.8.8) เป็นระยะทางที่กำหนดทิศทาง ระยะทางจะเป็นบวก ถ้า $\overline{Q_1P_1}$ มีทิศทางเดียวกับทิศทางของ ON และระยะทางจะเป็นลบ ถ้า $\overline{Q_1P_1}$ มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ ON

ดังนั้น d จะเป็นบวก ถ้า P_1 อยู่เหนือเส้นตรง และ d จะเป็นลบ ถ้า P_1 อยู่ใต้เส้นตรง

ถ้าสมการเส้นตรงที่กำหนดให้อยู่ในรูปทั่วไป คือ

$$Ax + By + C = 0$$

และต้องการหาระยะทางระหว่างเส้นนี้กับจุด $P_1(x_1, y_1)$

ขั้นแรก ทำสมการทั่วไปของเส้นตรงให้อยู่ในแบบนอร์มอล คือ

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

ดังนั้น

$$\boxed{d = \frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}} \qquad \text{...........(2.8.9)}$$

เครื่องหมายเหมือน B ถ้า $B \neq 0$

และเครื่องหมายเหมือน A ถ้า $B = 0$

ตัวอย่างที่ 2.8.6 จงหาระยะทางระหว่างเส้น $2x-y-4=0$ กับแต่ละจุดต่อไปนี้ $P_1(-1,-2)$ $P_2(5,0)$ และ $P_3(3,5)$

วิธีทำ ขั้นแรกต้องทำสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้อยู่ในแบบนอร์มอลโดยการเอา $-\sqrt{2^2+(-1)^2} = -\sqrt{5}$ หารตลอดสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$\frac{2x-y-4}{-\sqrt{5}} = 0$$

ให้ d_1 เป็นระยะทางระหว่าง $P_1(-1,-2)$ และเส้น $2x-y-4=0$

$$\therefore\ d_1 = \frac{2(-1)-(-2)-4}{-\sqrt{5}} = \frac{-2+2-4}{-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

ให้ d_2 เป็นระยะทางระหว่าง $P_2(5,0)$ และเส้น $2x-y-U=0$

$$\therefore\ d_2 = \frac{2(5)-0-4}{-\sqrt{5}} = \frac{10-4}{-\sqrt{5}} = \frac{-6}{\sqrt{5}}$$

ให้ d_3 เป็นระยะทางระหว่าง $P_3(3,5)$ และเส้น $2x-y-4=0$

$$\therefore\ d_3 = \frac{(2)(3)-5-4}{-\sqrt{5}} = \frac{6-5-4}{-\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 2.8

จงเขียนสมการแบบนอร์มอล

1. $w = 60$, $p = 5$
2. $w = 0$, $p = -4$
3. $w = \frac{\pi}{4}$, $p = -2$
4. $\alpha = 150$, $p = 5$
5. $\alpha = \pi$, $p = -6$

จงเขียนสมการแบบนอร์มอลของสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ และหาค่าของ w และ p

6. $4x+3y+20 = 0$
7. $15x-8y+34 = 0$
8. $3x-3y-10 = 0$
9. $2x+5y-58 = 0$
10. $3y-5 = 0$

จงเขียนสมการแบบนอร์มอล โดยกำหนดจุดตัดบนแกน X และแกน Y ให้

11. $a = 5$, $b = 12$
12. $a = 6$, $b = -6$
13. จงหาสมการของเส้นที่ผ่านจุด $(7, -2)$ สำหรับ

    a) $w = 135^\circ$ b) $w = \frac{\pi}{6}$

14. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(24, -7)$ ตั้งฉากกับเส้นที่ผ่านจุดนี้กับจุดกำเนิด
15. จงหาระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน $3x+4y-15 = 0$ และ $3x+4y-35 = 0$

    จากข้อ 16 ถึงข้อ 18 จงหาระยะที่กำหนดทิศทางจากจุดไปยังเส้นที่กำหนดให้ และบอกด้วยว่าจุดนั้นอยู่เหนือหรืออยู่ใต้เส้น

16. $(8, 4)$, $5x+12y-36 = 0$

17. $(4, 3)$, $15x-8y+15 = 0$

18. $(2, -13)$, $2x+5y+3 = 0$

19. จุด $(3, 7)$ และ $(5, 16)$ อยู่ด้านเดียวกันของเส้น $3x-2y+12 = 0$

20. จงแสดงว่าจุด $(-3, 4)$ อยู่ระหว่างเส้นคู่ขนาน $2x+y-5 = 0$ และ $6x+3y+11 = 0$

21. จงหาสมการโลกัสของจุดซึ่งมีระยะทางระหว่างเส้นขนานในข้อ 20 เท่ากัน แต่มีเครื่องหมายตรงข้าม โลกัสนี้คืออะไร

จากข้อ 22 ถึง ข้อ 23 จงหาระยะที่ไม่กำหนดทิศทางของเส้นคู่ขนานที่กำหนดให้

22. $\sqrt{3}x+y-8 = 0$, $\sqrt{3}x+4-14 = 0$

23. $x-2y+4 = 0$, $2x-4y+19 = 0$

24. จงหารัศมีของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(3, 7)$ ซึ่งสัมผัสกับเส้น $5x-12y+4 = 0$

25. จงเขียนสมการโลกัสของจุด ซึ่งมีระยะที่กำหนดทิศทางจากเส้น $4x-3y+7 = 0$ เท่ากับ

a) 6

b) -4