บทที่ 1
ระบบโคออร์ดิเนต
Coordinate Systems

1.1 เส้นโคออร์ดิเนต (Coordinate line)

พิจารณาเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าเลือกจุด ๆ หนึ่งให้เป็นจุดกำเนิด (origin) โดยมีโคออร์ดิเนตเท่ากับ 0 (ศูนย์) ให้ชื่อว่าจุด 0 วัดระยะทาง 1 หน่วยไปทางขวามือของจุด 0 แทน 1 และระยะทาง 2 หน่วยไปทางขวามือของจุด 0 แทน 2 ฯลฯ ในทำนองเดียวกันวัดระยะทาง 1 หน่วยไปทางซ้ายมือของจุด 0 แทน −1 และระยะทาง 2 หน่วยไปทางซ้ายมือของจุด 0 แทน −2 ฯลฯ ดูรูป 1.1.1

B O A C

.... ,-2-1 0 1 2 3 4 5 . . .

รูป 1.1.1

เส้นตรงในรูป 1.1.1 เรียกว่า เส้นโคออร์ดิเนต

แต่ ละจุดบนเส้นโคออร์ดิเนตจะสมนัยกับจำนวนจริงหนึ่งจำนวน ในทางกลับกันจำนวนจริงทุกจำนวนก็สมนัยกับจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นโคออร์ดิเนต ถ้าจำนวนจริง p สมนัยกับจุด P จะกล่าวว่า P มีโคออร์ดิเนตเท่ากับ p จากรูป 1.1.1 จะได้ว่า

0	มีโคออร์ดิเนตเท่ากับ		0
A	,,	,,	3
B	,,	,,	−2
C	,,	,,	5

1.2 ระยะทางบนเส้นโคออร์ดิเนต (Distance on a coordinate line)

นิยาม 1.2.1 ความยาวของเซกเมนต์ AB บนเส้นโคออร์ดิเนตแทนด้วยสัญลักษณ์ $|AB|$ มีค่าเท่ากับค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ $b - a$ นั่นคือ

$$|AB| = |b - a|$$

เมื่อ a และ b เป็นโคออร์ดิเนตของ A และ B ตามลำดับ ความยาวของเซกเมนต์ AB อาจเรียกว่า ระยะทาง (distance) ระหว่างจุด A และ B

นิยาม 1.2.2 ระยะที่กำหนดทิศทาง (Directed Distance) จากจุด A ถึงจุด B บนเส้นโคออร์ดิเนต แทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{AB}$ มีค่าเท่ากับ b – a นั่นคือ

$$\overline{AB} = b - a$$

เมื่อ a และ b เป็นโคออร์ดิเนตของ A และ B ตามลำดับ

ความยาวของเซกเมนต์ AB เป็นบวกเสมอ แต่ระยะที่กำหนดทิศทาง AB อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่า A อยู่ทางซ้ายหรืออยู่ทางขวาของ B

จาก $\overline{AB} = b - a$ และ $\overline{BA} = a - b$

ดังนั้น $\overline{AB} = -(a - b)$

$$= -\overline{BA}$$

ถ้าทราบระยะที่กำหนดทิศทางทำให้ทราบระยะทางระหว่าง A และ B และยังทราบว่า A อยู่ทางซ้ายหรืออยู่ทางขวาของ B

ตัวอย่างที่ 1.2.1 $\overline{AB} = 5$ ทำให้ทราบว่า ระยะทางระหว่างจุด A และ B คือ 5 และจุด B อยู่ทางขวามือของ A

ตัวอย่างที่ 1.2.2 $\overline{AB} = -7$ ทำให้ทราบว่า ระยะทางระหว่างจุด A และ B คือ 7 และจุด B อยู่ทางซ้ายมือของ A

แบบฝึกหัด 1.1

กำหนดให้ 0, A, B, C, D และ E เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนตเส้นเดียวกัน ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น 0, 2, –1, 5, 3 และ –4 จงหาค่าของ

1. $|0A|$
2. $\overline{AB}$
3. $\overline{BC}$
4. $|CD|$
5. $\overline{DE}$
6. $|AC| - |CE|$
7. $AC - \overline{CE}$
8. $\overline{BD}$
9. $|AE| + |BE|$

10. $\overline{CB} + \overline{BC}$

ii. $|ED| + |CD|$

12. $\overline{EB} + \overline{EA}$

13. $\overline{OD} + \overline{AE}$

14. $\overline{BA} + \overline{CB} + ED$

15. $\overline{OB} + \overline{DB} + \overline{EC}$

1.3 การแบ่งเซกเมนต์ตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ (Division of a Segment in a Given Ratio)

ทฤษฎีที่ 1.3.1 สำหรับ A, B และ C ซึ่งมีจุด 3จุดใดๆบนเส้นโคออร์ดิเนต ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนตเป็น a และ b ตามลำดับ และอัตราส่วนของการแบ่งคือ

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$$

แล้ว C ย่อมมีโคออร์ดิเนตเป็น

$$c = \frac{a + rb}{1 + r}$$

ทฤษฎีที่ 1.3.2 ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนต a และ b ตามลำดับแล้ว จุดกึ่งกลางของ AB มีโคออร์ดิเนตเป็น $\frac{a + b}{2}$

นั่นคือ อัตราส่วนของการแบ่ง

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{1}$$

เมื่อแทนค่าในทฤษฎีที่ 1.3.1 ก็จะได้โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งคือ $c = \frac{a + b}{2}$

จากทฤษฎีที่ 1.3.1 จุด C แบ่งเซกเมนต์ AB ด้วยอัตราส่วน r

ตัวอย่างที่ 1.3.1 ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนต -2 และ 5 ตามลำดับ จงหาโคออร์ดิเนต c ของ C ซึ่งแบ่งเซกเมนต์ AB ออกเป็น 2 ส่วน

วิธีทำ C มีโคออร์ดิเนตเป็น $\frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.3.2 ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนต -4 และ 2 ตามลำดับ จงหาโคออร์ดิเนต c ของ c ซึ่งทำให้

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 4$$

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccc} 4 & & C & B & \\ \hline & & 0\ \frac{4}{5} & 2 & \end{array}$$

ตามทฤษฎีที่ 1.3.1 จะมีว่า $a = -4,\ b = 2$ และ $r = 4$

$$\therefore\ c = \frac{-4 + (4)(2)}{1 + 4}$$

$$= \frac{-4 + 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.3.3 ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนต –5 และ 1 ตามลำดับ จงหาโคออร์ดิเนต c ของ C ซึ่งทำให้

$$\frac{AC}{CB} = -3$$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} A & & B & c \\ \hline -5 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

ตามทฤษฎีที่ 1.3.1 จะมีว่า $a = -5,\ b = 1$ และ $r = -3$

$$\therefore\ c = \frac{-5 + (-3)(1)}{1 + (-3)}$$

$$= \frac{-8}{-2}$$

$$= 4$$ **ตอบ**

หมายเหตุ ถ้า r เป็นบวก แล้ว C จะเป็นจุดแบ่งภายใน คืออยู่ภายในเซกเมนต์ AB

ถ้า r เป็นลบ แล้ว C จะเป็นจุดแบ่งภายนอก คืออยู่ภายนอกเซกเมนต์ AB

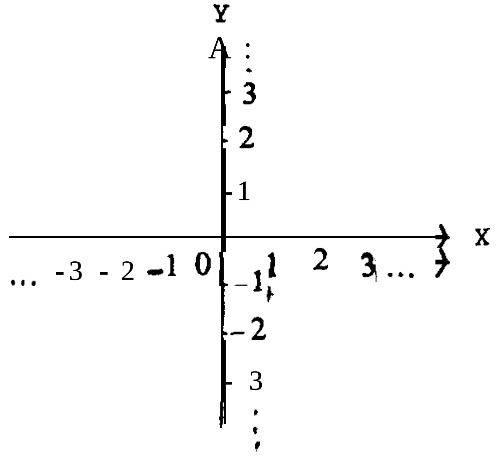
แบบฝึกหัด 1.2

กำหนดให้ A, B และ C อยู่บนเส้นโคออร์ดิเนตเดียวกัน และมีโคออร์ดิเนตเป็น 1, −3 และ 6 ตามลำดับ จงหา

1. โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางเซกเมนต์ AB
2. ,, E ซึ่ง $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = 2$
3. ,, E ซึ่ง $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = -4$
4. ,, E ซึ่ง $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{3}$
5. ,, E ซึ่ง $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 4$
6. สมมติว่า B เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ AC ในอัตราส่วน r จงหาค่า r
7. สมมติว่า A เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ CB ในอัตราส่วน r จงหาค่า r
8. สมมติว่า A เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ BC ในอัตราส่วน r จงหาค่า r
9. สมมติว่า C เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ BA ในอัตราส่วน r จงหาค่า r
10. สมมติว่า C เป็นจุดแบ่งเซกเมนต์ AB ในอัตราส่วน r จงหาค่า r

1.4 ระบบโคออร์ดิเนตตั้งฉาก (The Rectangular Coordinate System)

เส้นโคออร์ดิเนต 2 เส้นตัดกันที่จุด O ทำมุม 90° ดังรูป 1.4.1 เส้นในแนวระดับ (horizontal line) เรียกว่าแกน X และเส้นในแนวดิ่ง (vertical line) เรียกว่าแกน Y เรียกเส้นโคออร์ดิเนตทั้ง 2 นี้ว่า แกนโคออร์ดิเนต จุดที่เกิดจากการตัดกันเรียกว่า จุดกำเนิด (origin) แทนด้วยจุด O (โอ) ซึ่งสมนัยกับเลขศูนย์บนแกน X และแกน Y และมีโคออร์ดิเนต (0, 0)



รูปที่ 1.4.1

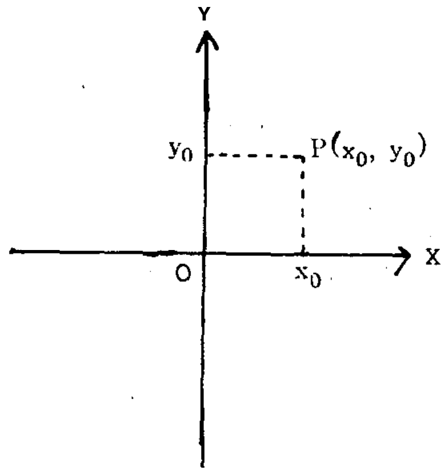
จากรูปจะเห็นว่าค่า x ที่อยู่ทางขวามือของแกน Y จะมีเครื่องหมายบวก และถ้าอยู่ทางซ้ายมือของแกน Y จะมีเครื่องหมายลบ

ในทำนองเดียวกันค่า y ที่อยู่เหนือแกน X จะมีเครื่องหมายบวก และค่า y ที่อยู่ใต้แกน X จะมีเครื่องหมายลบ

จากความจริงที่ว่าเส้นตรง 2 เส้นตัดกันย่อมได้ระนาบ 1 ระนาบ ดังนั้นเมื่อเรามีแกน X ตัดกับแกน Y ที่จุด O จึงทำให้เกิดระนาบขึ้นมา ซึ่งเรียกว่าระนาบ XY

จุด P ใด ๆ ที่อยู่บนระนาบ XY จะเกี่ยวข้องกับเลข 2 จำนวนคือ x — โคออร์ดิเนต (x–coordinate) หรือ แอบซิสซา (abscissa) ซึ่งเป็นระยะที่จุดนั้นอยู่ห่างจากแกน Y และเลขอีกจำนวนหนึ่งคือ y—โคออร์ดิเนต (y–coordinate) หรือ ออร์ดิเนต (ordinate) ซึ่งเป็นระยะที่จุดนั้นอยู่ห่างจากแกน X ทั้งแอบซิสซาและออร์ดิเนต รวมเรียกว่า โคออร์ดิเนตของจุด P และเขียน P(x, y) เมื่อ x เป็นค่าแอบซิสซา และ y เป็นค่าออร์ดิเนต

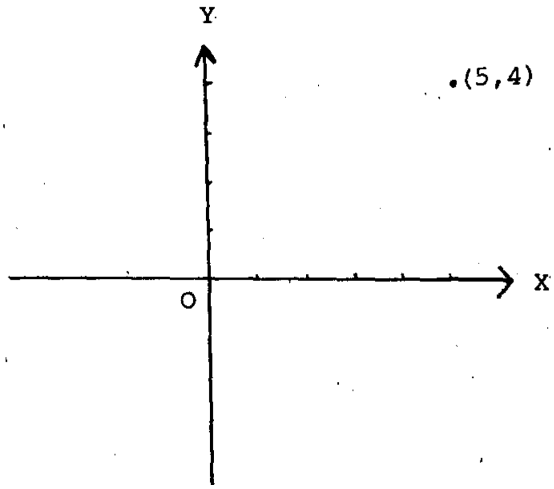
โคออร์ดิเนตของจุดใด ๆ บนระนาบ XY เราจะแทนด้วยคู่ลำดับ ซึ่งอีลีเมนต์ตัวแรกแทนค่า x และอีลีเมนต์ตัวที่สองแทนค่า y ดังรูป 1.4.2 จุด P มีโคออร์ดิเนต (x_0, y_0)



รูป 1.4.2

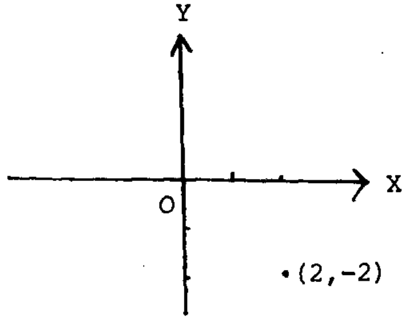
ตัวอย่างที่ 1.4.1 จงเขียนจุด (5, 4) ลงบนระนาบ XY

วิธีทำ จุด (5, 4) เป็นจุดที่มีค่า x เป็น 5 และค่า y เป็น 4 ดังนั้นจุด (5, 4) เป็นจุดที่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือ 5 หน่วย และห่างจากแกน X ขึ้นไปข้างบน 4 หน่วย ดังรูป



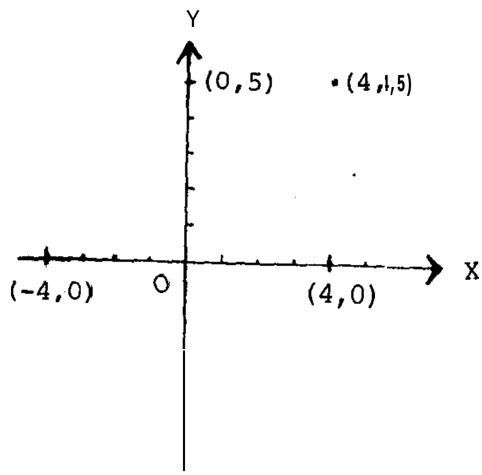
ตัวอย่างที่ 1.4.2 จงเขียนจุด (2, −2) ลงบนระนาบ XY

วิธีทำ จุด (2, −2) เป็นจุดที่อยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือ 2 หน่วย และอยู่ห่างจากแกน X ลงไปข้างล่าง 2 หน่วย ดังรูป



ตัวอย่างที่ 1.4.3 จงเขียนจุด (4,5), (0, 5), (4, 0), (−4, 0) ลงบนระนาบ XY

วิธีทำ



จุดที่อยู่บนแกน X จะมีค่า y เป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกันจุดที่อยู่บนแกน Y จะมีค่า x เป็นศูนย์

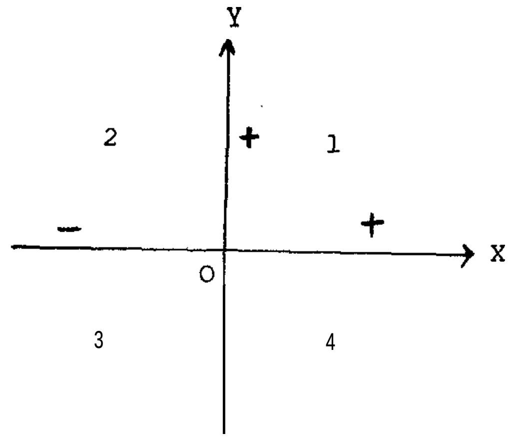
ตัวอย่างที่ 1.4.4 จุด (1, 0), (4, 0), (−3, 0), (−10, 0) ต่างก็อยู่บนแกน X และจุด (0, 3), (0, −2), (0, 6), (0, 9) ต่างก็อยู่บนแกน Y

เส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะมีค่า y คงที่ ในทำนองเดียวกัน เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y จะมีค่า x คงที่

ตัวอย่างที่ 1.4.5 จุด (2, 2) (3, 2), (−5, 2), (0, 2) มีค่า y เท่ากัน ดังนั้นจุดเหล่านี้จะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และห่างจากแกน X เป็นระยะทาง 2 หน่วย

ตัวอย่างที่ 1.4.6 จุด (1, 3), (1, 0), (1,−6), (1, 8) มีค่า x เท่ากัน ดังนั้นจุดเหล่านี้จะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และห่างจากแกน Y เป็นระยะทาง 1 หน่วย

แกน X และแกน Y ตัดกันจะแบ่งระนาบ XY ออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วน เรียกว่า ควอดแดรนท์ (quadrant) ดังรูป 1.4.3



รูป 1.4.3

จุดที่ไม่อยู่บนแกนโคออร์ดิเนตทั้งสอง หรือจุดที่มีโคออร์ดิเนตไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่จะอยู่ในควอดแดรนท์ใดควอดแดรนท์หนึ่งใน 4 ควอดแดรนท์

ควอดแดรนท์ที่ 1 ค่า x และค่า y เป็นบวกทั้งคู่

,, 2 ค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นบวก

,, 3 ค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นลบ

,, 4 ค่า x เป็นบวก และค่า y เป็นลบ

ข้อสังเกต

1. โคออร์ดิเนตของจุดกำเนิดคือ (o, o)
2. ,, ,, บนแกน X คือ $(x, 0)$
3. ,, ,, ,, Y ,, $(0, y)$
4. กราฟของจุดที่มีแอบซิสซาเท่ากัน หรือเขียนว่า $x = k$ (k = ค่าคงที่) เป็นกราฟของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y ห่างจากแกน Y เท่ากับ k
5. กราฟของจุดที่มีออร์ดิเนตเท่ากัน หรือเขียนว่า $y = k$ เป็นกราฟของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X ห่างจากแกน X เท่ากับ k

แบบฝึกหัด 1.3

1. จุดต่อไปนี้อยู่ในควอดแดรนท์ไหน

   1.1 $P(-3, 2)$

   1.2 $Q(2, 4)$

   1.3 $R(2, -1)$

   1.4 $S(-3, -6)$

   1.5 $T(-2, 4)$

2. จงเขียนจุดเหล่านี้ลงบนระนาบ XY

   2.1 $(0, 1)$

   2.2 $(2, 3)$

   2.3 $(-4, 5)$

   2.4 $(3, -7)$

   2.5 $(-1, -3)$

   2.6 $(5, 0)$

   2.7 $(2, \sqrt{2})$

   2.8 $(\sqrt{2}, 3)$

   2.9 $(-\sqrt{2}, 4)$

   2.10 $(6, -\sqrt{2})$

3. จงพิจารณาดูว่าจุดต่าง ๆ ในข้อต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

   3.1 $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(2, 5)$

   3.2 $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 3)$

   3.3 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 6)$

   3.4 $(3, 1)$, $(-2, 1)$, $(-1, 1)$

   3.5 $(-3, 7)$, $(2, 7)$, $(3, 7)$

4. จงเขียนจุดทั้งหมดที่มีระยะห่างจากแกน X เท่ากับ 2

5. .. .. .. Y .. −5

6. จงเขียนจุดที่มีโคออร์ดิเนตตัวแรกเป็นค่าลบของโคออร์ดิเนตตัวหลัง

7. .. .. เป็น 2 เท่า .. ..

8. จงเขียนสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมคือ (5, 1), (2, −2), (3, 5)

9. จงเขียนสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมคือ (−3, 2), (5, 2), (5, 8) และหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้ด้วย

10. จงเขียนสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมคือ (7, 3), (−2, 3), (−2, −4) และ (7, −4) หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมนี้ด้วย

11. จุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่ที่จุดกำเนิด และด้านของสี่เหลี่ยมนี้ขนานกับแกนโคออร์-ดิเนต ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมนี้ยาวเท่ากับ 6 จงหาโคออร์ดิเนตของจุดมุมทั้งสี่

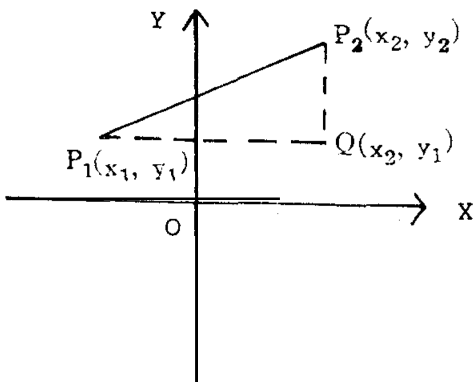
12. ถ้าโคออร์ดิเนตของจุดเป็นลบทั้งคู่แล้ว จุดเหล่านี้จะอยู่ในควอดแดรนท์ไหน

13. ถ้าโคออร์ดิเนตตัวแรกเป็นลบ และโคออร์ดิเนตตัวที่ 2 เป็นบวกแล้ว จุดเหล่านี้จะอยู่ในควอดแรนท์ไหน

14. จงเขียนเส้นผ่านจุด (2, −3) ให้ขนานกับแกน Y จุดต่าง ๆ ที่อยู่บนเส้นนี้มีค่าแอบซิสซาเท่าใด

1.5 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด (The Distance Between Two Points)

ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แทนด้วย $d(P_1, P_2)$ หรือ $|P_1P_2|$ สามารถหาจากทฤษฎีพิธากอรัส (Pythagorean Theorem)



สร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก P_1QP_2 ซึ่ง Q มีโคออร์ดิเนต คือ (x_2, y_1) จะได้ว่า

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, Q)]^2 + [d(Q, P_2)]^2 \quad \text{จากทฤษฎีของสามเหลี่ยมพีธากอรัส}$$

$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 1.5.1 จงหาระยะทางระหว่าง $P_1(1, 2)$ และ $P_2(-1, 5)$

วิธีทำ

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1-1)^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+9}$$

$$= \sqrt{13} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 1.5.2 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(1, -5)$ และ $P_2(-4, 7)$

วิธีทำ

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-4-1)^2 + (7-(-5))^2}$$

$$= \sqrt{25+144}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 1.5.3 จงแสดงว่าระยะทางระหว่าง $P_1(4, 8)$ และ $Q(1, 4)$ เท่ากับระยะทางระหว่าง $P_2(5, 1)$ และ $Q(1, 4)$

วิธีทำ

$$d(P_1, Q) = \sqrt{(1-4)^2+(4-8)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$d(P_2, Q) = \sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$\therefore d(P_1, Q) = d(P_2, Q) \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 1.5.4 จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมที่ $P_1(3, 5)$, $P_2(-3, 7)$ และ $P_3(-6, -2)$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และจงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$

วิธีทำ

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-3-3)^2+(7-5)^2}$$
$$= \sqrt{36+4}$$
$$= \sqrt{40}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(-6+3)^2+(-2-7)^2}$$
$$= \sqrt{9+81}$$

และ $= \sqrt{90}$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(-6-3)^2+(-2-5)^2}$$
$$= \sqrt{81+49}$$

และ $= \sqrt{130}$

เนื่องจาก

$$[d(P_1, P_2)]^2+[d(P_2, P_3)]^2 = 40+90$$
$$= 130$$
$$= [d(P_1, P_3)]^2$$

$\therefore$ จากทฤษฎีของพิธากอรัสจะได้ว่า สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

พื้นที่สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}d(P_1, P_3)d(P_2, P_3)$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{40}\sqrt{90}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3600}$$
$$= \frac{1}{2}\times 60$$

ตอบ $= 30$

ตัวอย่างที่ 1.5.5 จงหาสมการโลกัสของจุด $P(x, y)$ ซึ่งห่างจาก $P_1(5, -4)$ และ $P_2(1, 2)$ เท่ากัน

วิธีทำ

$$d(P_1, P) = \sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$$

$$d(P, P_2) = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$\because \quad d(P_1, P) = d(P, P_2)$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$x^2-10x+25+y^2+8y+16 = x^2-2x+1+y^2-4y+4$$

$$-8x+12y = -36$$

$$2x-3y = 9 \quad \text{ตอบ}$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ที่กำหนดให้

    1.1 $A(3, -1)$, $B(2, 4)$

    1.2 $A(2, 7)$, $B(6, 4)$

    1.3 $A(x_0, 0)$ $B(0, y_0)$

    1.4 จุดกำเนิด, $P(x_0, y_0)$

    1.5 $A(-1, -4)$, $B(-9, 2)$

    1.6 $A(4, -6)$, $B(-3, -2)$

    1.7 $A(-9, -1)$, $B(3, 4)$

    1.8 $A(-2, 9)$, $B(1, 5)$

    1.9 $A(7, 1)$, $B(3, 3)$

    1.10 $A(7, 11)$, Hi-9, $-5)$

    1.11 $A(a, a)$, $B(a+\sqrt{2}, a+\sqrt{2})$

    1.12 $A(1, 2)$, $B(2, 2+\sqrt{3})$

    1.13 $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$

    1.14 $A(-1, 3)$, $B(4, 15)$

2. จงหาค่า a ซึ่งระยะทางระหว่าง $P(a, 0)$ และ $Q(-2, -4)$ เท่ากับระยะทางระหว่าง $P(a, 0)$ และ $R(4, 3)$

3. จงหาความยาวของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด คือ

    3.1 $(3, 2)$, $(6, -3)$, $(4, 4)$

    3.2 $(5, 6)$, ('I. -2). $(-2, 3)$

4. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมต่อไปนี้เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

    4.1 สามเหลี่ยมที่มีจุดมุมอยู่ที่ $(2, 1)$, $(9, 3)$, $(4, -6)$

    4.2 ,,$(-1$, ,, $2)$, $(4$, $-3)$, $(5, 4)$

5. จงพิจารณาว่าจุด 3 จุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

5.1 $A(-1, 0)$ $B(1, 0)$, $C(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$

5.2 $A(-1, -4)$, $B(4, -2)$, $C(-3, 1)$

5.3 $A(4, 1)$, $B(2, 4)$, $C(1, 3)$

6. จงหาค่า x_0 ซึ่ง $P(-3, 1)$, $R(x_0, 0)$ และจุดกำเนิดเป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉาก

7. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าจุดมุมคือจุดกำเนิด, $P(2, 1)$, $Q(-4, 8)$, $R(-2, 9)$

8. จงเขียนรูปสามเหลี่ยม และจงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม เมื่อมีจุดมุมต่อไปนี้

8.1 จุดกำเนิด, $P(5, 0)$, $Q(6, 4)$

8.2 $A(-4, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-\frac{11}{5}, \frac{12}{5})$

9. จงหาค่า y โดยกำหนดว่า ระยะทางระหว่าง $P(4, y)$ และ $(-5, 2)$ เท่ากับระยะทางระหว่าง $P(4, y)$ และ $(13, -6)$

10. จงหาสมการโลกัสของจุด $P(x, y)$ ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

10.1 $P(x, y)$ อยู่ห่างจาก $(7, -1)$ และ $(3, 5)$ เท่ากัน

10.2 $P(x, y)$ อยู่ห่างจาก $(-1, -3)$ และ $(3, 5)$ เท่ากัน

10.3 $P(x, y)$ อยู่ห่างจาก $(-1, 2)$ และ $(-5, 7)$ เท่ากัน

10.4 $P(x, y)$ อยู่ห่างจาก $(3, -4)$ เป็นระยะทาง 5 หน่วย

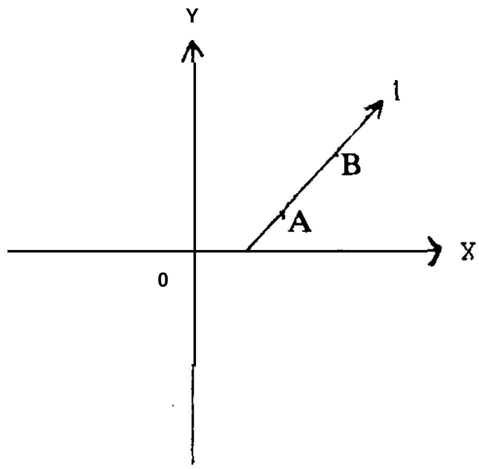
10.5 $P(x, y)$ อยู่ห่างจาก $(-4, 5)$ เป็นระยะทาง 9 หน่วย

10.6 ระยะทางจาก $P(x, y)$ ไปยังแกน X เท่ากับระยะทางจาก $P(x, y)$ ไปยัง $(0, 2)$

10.7 ระยะทางจาก $P(x, y)$ ไปยังแกน Y เท่ากับระยะทางจาก $P(x, y)$ ไปยัง $(4, 1)$

1.6 ระยะที่กำหนดทิศทางบนเส้นตรงใด ๆ (Directed Distance on any Line)

ในระบบโคออร์ดิเนตตั้งฉาก ถ้าเรากำหนดเส้นตรง l โดยมีทิศทางตามที่เขียนไว้ดังรูป 1.6.1 ถ้าให้ A และ B เป็นจุด 2 จุดใด ๆ บนเส้นตรง l จะได้ระยะทางที่วัดจาก A ไปยัง B เป็นบวก และระยะทางที่วัดจาก B ไปยัง A เป็นลบ



รูป 1.6.1

นิยาม 1.6.1 ถ้า A และ B เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง l ระยะที่กำหนดทิศทาง $\overline{AB}$ จะมีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับว่า จุดที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นนั้นจาก A ไปยัง B จะเคลื่อนไปตามทิศทางของหัวลูกศร หรือไปในทิศทางตรงข้ามกับหัวลูกศร

จากรูป 1.6.1 จะได้ว่า $\overline{AB}$ มีค่าเป็นบวก ส่วน $\overline{BA}$ มีค่าเป็นลบ แต่มีขนาดเท่ากัน

ดังนั้น $\overline{AB} = -\overline{BA}$

และถ้า A, B, และ C เป็นจุด 3 จุดที่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดทิศทางแล้ว

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

1.7 การแบ่งเซกเมนต์ในระนาบตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ (Division of a segment in the plane in a given ratio)

ทฤษฎีที่ 1.7.1 ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายทั้ง 2 ของเซกเมนต์ที่กำหนดให้ และให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเซกเมนต์ P_1P_2 ซึ่ง

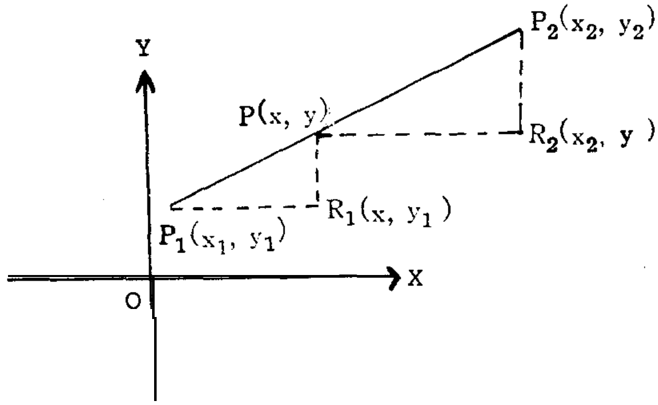
$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$$

เมื่อ r เป็นอัตราส่วนที่กำหนดให้

แล้วจุด P(x, y) มีโคออร์ดิเนตเป็น

$$(x, y) = \left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$$

พิสูจน์ เขียนรูปตามรูป 1.7.1



รูป 1.7.1

จากรูป **1.7.1** จะได้ว่า

$$|P_1R_1| = x-x_1$$

และ $|PR_2| = x_2-x$

สามเหลี่ยม P_1R_1P และสามเหลี่ยม PR_2P_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น

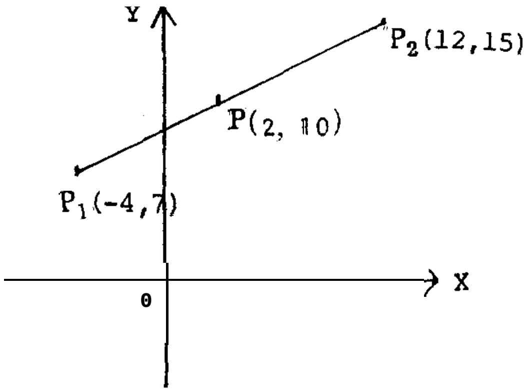
$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1R_1}}{\overline{PR_2}} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \qquad ....(1.7.1)$$

และ $$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{R_1P}{\overline{R_2P_2}} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \qquad ....(1.7.2)$$

หาค่า x และ y ในเทอมของ r จากสมการ (1.7.1) และ (1.7.2) จะได้ว่า

$$x = \frac{x_1+rx_2}{1+r} \text{ และ } y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}$$ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.7.1 จงหาจุดซึ่งแบ่งเซกเมนต์จากจุด $(-4, 7)$ ไปยังจุด $(12, 15)$ ในอัตราส่วน $\frac{3}{5}$



วิธีทำ $r = \frac{3}{5}$ ดังนั้น

$$x = \frac{-4+\frac{3}{5}(12)}{1+\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{-20+36}{5+3}$$

$$= 2$$

$$Y = \frac{7+\frac{3}{5}(15)}{1+\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{35+45}{5+3}$$

$$= 10$$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดที่ต้องการ คือ $(2, 10)$ ตอบ

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (1, 6) และจุด (5, −2) โดยมี $r = 1$
2. กำหนดให้ $A(-1, 7)$ และ $B(5, -2)$ จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ AB ในอัตราส่วน r โดยที่

   ก. $r = \frac{1}{2}$

   ข. $r = 2$
3. จงหาจุด 3 จุดซึ่งแบ่งเซกเมนต์ AB ออกเป็น 4 ส่วน โดย $A(-5, -4)$ และ $B(11, 8)$
4. จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (10, −7) และจุด (−17, 11) ในอัตราส่วน $\frac{4}{5}$
5. จุด (5, 1) แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (−3, −5) และ (17, 10) ในอัตราส่วน r จงหาค่า r
6. จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (1, 3) และจุด (−7, −10) ในอัตราส่วน −3
7. จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (0, 0) และจุด (5, 8) ในอัตราส่วน 5
8. จงหาจุดที่แบ่งเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด (−2, 7) และจุด (−4, −9) ในอัตราส่วน 2

1.8 สูตรจุดกึ่งกลาง (Midpoint formula)

ถ้า P_1 มีโคออร์ดิเนต (x_1, y_1) และ P_2 มีโคออร์ดิเนต (x_2, y_2) แล้วให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ P_1P_2

ดังนั้น P มีโคออร์ดิเนต คือ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 18.1 จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นตรงซึ่งเชื่อมระหว่างจุด (3, 3) และ (7, 5)

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (3, 3) และ (7, 5)

$x_1 = 3, \; y_1 = 3$

$x_2 = 7, \; y_2 = 5$

ดังนั้น $x = (3+7)/2$

$= 5$

$$y = (3+5)/2$$
$$= 4$$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด (3, 3) และ (7, 5) คือ (5, 4) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.8.2 เส้นตรง P_1P_2 โดยที่ P_1 มีโคออร์ดิเนต คือ (1, 2) และจุด P_2 อยู่บนแกน X และห่างจากแกน Y ไปทางขวามือ 3 หน่วย จงหาจุดกึ่งกลางของเส้น P_1P_2

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างเส้นตรง P_1P_2

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2$$

เพราะว่า P_2 อยู่บนแกน X ดังนั้น $y_2 = 0$

และอยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือ 3 หน่วย

ดังนั้น $x_2 = 3$

$$x = \frac{1+3}{2}$$
$$= 2$$
$$y = \frac{2+0}{2}$$
$$= 1$$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด (1, 2) และ (3, 0) คือ (2, 1) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.8.3 จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด (a, 0) และ (0,b)

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (a, 0) และ (0, b)

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0$$
$$x_2 = 0, \quad y_2 = b$$

ดังนั้น $x = \frac{a+o}{2}$

$= \frac{a}{2}$

$y = \frac{o+b}{2}$

$= \frac{b}{2}$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (a, o) และ (o, b) คือ $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.8.4 จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นที่ต่อระหว่างจุด P(−1, 5) และ Q (5, 3)

วิธีทำ $x_1 = -1, \quad y_1 = 5$

$x_2 = 5, \quad y_2 = 3$

$x = \frac{-1+5}{2}$

$= 2$

$Y = \frac{5+3}{2}$

$= 4$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นที่ต่อระหว่างจุด P(−1, 5) และ Q(5, 3) คือ (2, 4) ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.8.5 ให้ P_1 มีโคออร์ดิเนตคือ (1, 2) และ P_2 มีโคออร์ดิเนต คือ (7, −1) จงหาจุด T บนเส้น P_1P_2 ซึ่งแบ่ง P_1P_2 ออกเป็นอัตราส่วน 1 : 3

วิธีทำ ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นที่ต่อระหว่างจุด P(1, 2) และ P_2(7, −1)

$\therefore$ Q มีโคออร์ดิเนต คือ $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2-1}{2}\right)$

$= (4, \frac{1}{2})$

T จะเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นที่ต่อ P_1(1, 2) และ Q(4, $\frac{1}{2}$)

$\therefore$ T มีโคออร์ดิเนต คือ $\left(\frac{1+4}{2} , \frac{2+\frac{1}{2}}{2} \right)$

$= \left(\frac{5}{2} , \frac{5}{4} \right)$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.8.6 ถ้าจุดปลายข้างหนึ่ง คือ (1, 3) และจุดกึ่งกลางคือ (2, 5) จงหาจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

วิธีทำ ให้ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

$x_1 = 1, \; y_1 = 3$

$x = 2, \; y = 5$

ดังนั้น $2 = \frac{1+x_2}{2}$

$4 = 1 + x_2$

$x_2 = 3$

$5 = \frac{3+y_2}{2}$

$10 = 3 + y_2$

$y_2 = 7$

ดังนั้น จุดปลายอีกข้างหนึ่งคือ (3, 7) ตอบ

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $(2, 3)$, $(0, 1)$

1.2 $(4, 2)$, $(2, 1)$

1.3 $(-1, -2,)$ $(3, 5)$

1.4 $(-3, 4)$, $(2, -5)$

1.5 $(0, 0)$, $(4, 6)$

1.6 $(5, 0)$, $(-4, 1)$

1.7 $(1, 2)$, $(5, 6)$

1.8 $(-2, 1)$, $(0, 3)$

1.9 $(0, 1)$, $(1, 0)$

1.10 $(-\pi, 1)$, $(\pi, -1)$

1.11 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

1.12 $(\frac{1}{2}, 2)$, $(-2, \frac{1}{2})$

1.13 $(1, -2)$, $(2, -6)$

1.14 $(1, 0)$, $(3, 2)$

1.15 $(1, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -1)$

2. กำหนดโคออร์ดิเนตของจุด P_1 ซึ่งเป็นจุดปลายข้างหนึ่ง และจุดกึ่งกลาง P ให้ จงหาจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

2.1 $P_1(1, 3)$, $P(0, 2)$

2.2 $P_1(2, 4)$, $P(-1, 2)$

2.3 $P_1(0, 3)$, $P(4, 5)$

2.4 $P_1(0, 0)$, $P(1, 4)$

2.5 $P_1(5, 0)$, $P(6, 8)$

2.6 $P_1(a, b_1)$, $P(1, 2)$

3. รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดเป็น $(5, -7)$, $(-1, 1)$, $(5, 3)$ และ $(7, -1)$ จงพิจารณาดูว่าเส้นทั้งสี่ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมนี้ ประกอบกันเป็นสี่เหลี่ยมอะไร

4. เขียนรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดมุม $A(-1, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 6)$ จงหาจุดมุมที่สี่ และจุดตัดของเส้นทะแยงมุม

5. เขียนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $P(-1, 0)$, $Q(0, 2)$, $R(3, 0)$ จงหาจุดกึ่งกลางของแต่ละด้าน

6. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดมุมที่ 3 ของสามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อกำหนดจุดมุมอีก 2 จุด คือ $P(-1, 0)$, $Q(1, 0)$