บทที่ 7
วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่
(Permutations and Combinations)

ในทางสถิติ, ทางอุตสาหกรรม, ทางวิทยาศาสตร์ หรือในการบริหารประเทศ, บ่อยครั้งที่พบการนำเอาสมาชิกภายในเซตเหล่านั้นมาเขียนเป็นเซตย่อย ๆ หรือจัดเป็นพวก ๆ ของเซตเหล่านั้น

เช่น กองทะเบียนจะจัดให้รถแต่ละคันมีป้ายทะเบียนเพียงคันละป้ายเท่านั้น ซึ่งป้ายทะเบียนจะมีตัวอักษรผสมกับตัวเลข

หรือการที่องค์การโทรศัพท์จะจัดหมายเลขโทรศัพท์ให้กับผู้ใช้เพียงคนละหนึ่งหมายเลขเท่านั้น

จากตัวอย่างที่ยกมานี้จะศึกษาปัญหาต่าง ๆ ในการจัดโดยใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

7.1 คำนำ

ในหัวข้อต่อไปนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการรวมเป็นกลุ่ม การจัดเรียงเป็นกลุ่ม ของวัตถุ, เหตุการณ์, หรือสัญลักษณ์

แต่ละ วัตถุ, เหตุการณ์ หรือสัญลักษณ์ เรียกว่า สมาชิก

แต่ละเซตของสมาชิก เรียกว่า วิธีจัดหมู่ (Combination), การจัดเรียงเป็นกลุ่มเพียงกลุ่มเดียวของสมาชิก การจัดหมู่ เรียกว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

หมายเหตุ วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) นั้นลำดับของสมาชิกแต่ละตัวมีความสำคัญด้วย แต่วิธีจัดหมู่ (Combination) นั้นถือว่าลำดับของสมาชิกแต่ละตัวไม่สำคัญ

7.2 หลักเบื้องต้น (Fundamental Principle)

หลักวิธีจัดหมู่ (Combination) และวิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) นั้นพื้นฐานอยู่บนหลักต่อไปนี้

"ถ้าของสิ่งแรกกระทำได้ n_1 วิธี และหลังจากสิ่งแรกกระทำแล้ว สิ่งที่สองกระทำได้ n_2 วิธี แล้วทั้งสองสิ่งสามารถกระทำได้ $n_1 n_2$ วิธี ในการแสดงลำดับ"

ตัวอย่าง 7.2.1 มีกี่วิธีที่จะเลือกเด็กชาย 1 คน และเด็กหญิง 1 คน จากเด็กชาย 5 คน และเด็กหญิง 6 คน

วิธีทำ เพราะว่าเด็กชายสามารถเลือกได้ 5 วิธี

และเด็กหญิงสามารถเลือกได้ 6 วิธี

ดังนั้นการเลือกเด็กชาย 1 คน เด็กหญิง 1 คน ทำได้ $= 6 \times 5$

$= 30$ วิธี **ตอบ**

จากหลักเบื้องต้นนี้ สามารถขยายต่อไปได้โดยคิดว่า สองเหตุการณ์แรกที่เกิดขึ้น รวมกันเป็นเหตุการณ์อันเดียวกัน ซึ่งเกิดได้ $(n_1 n_2)$ วิธี

ดังนั้น หลังจากเกิดเหตุการณ์ทั้งสองแล้ว เหตุการณ์ที่สามก็เกิดขึ้นได้ n_3 วิธี แล้วทั้งสามเหตุการณ์จะเกิดได้ $(n_1 n_2) n_3$ วิธี

ถ้าเหตุการณ์ที่สี่เกิดได้ n_4 วิธี หลังจากเกิดสามเหตุการณ์แรกแล้ว ทั้งสี่เหตุการณ์จะเกิดได้ $(n_1 n_2 n_3) n_4$ วิธี ทำนองเดียวกัน ถ้าเหตุการณ์เกิดต่อเนื่องกัน n เหตุการณ์แล้ว ทั้ง n เหตุการณ์จะเกิดได้ $n_1 n_2 n_3 \ldots n_n$ วิธี

ตัวอย่าง 7.2.2 กำหนดเลขสี่จำนวน 1, 2, 3, 4 จะมีกี่วิธีที่จะเขียนเลข 2 หลัก และเลข 3 หลัก

วิธีทำ เลข 2 หลัก ประกอบด้วยหลักหน่วย กับหลักสิบ

หลักหน่วยสามารถเลือกได้ 4 วิธี

หลักสิบสามารถเลือกได้ 3 วิธี

เพราะว่าหลังจากเลือกหลักหน่วยแล้วจะเหลือตัวเลขอีกเพียงสามจำนวน

เพราะฉะนั้นหลักสิบก็สามารถเลือกได้เพียง 3 วิธี

เพราะฉะนั้นจะเลือกได้ทั้งหมด $= 4 \times 3 = 12$ วิธี

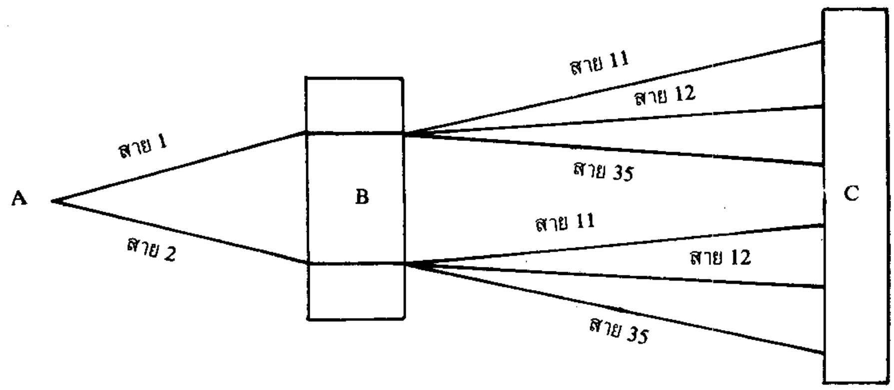
นั่นคือ 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 **ตอบ**

เลข 3 หลัก ประกอบด้วย หลักหน่วย, หลักสิบ, หลักร้อย
หลักหน่วยเลือกได้ 4 วิธี
หลักสิบเลือกได้ 3 วิธี
หลักร้อยเลือกได้ 2 วิธี
เพราะฉะนั้นจะเลือกได้ทั้งหมด $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.2.2 จากเมือง A ไปยัง B มีรถเมล์ผ่านสองสายคือ สาย 1 สาย 2 จากเมือง B ไปยังเมือง C มีรถผ่านสามสายคือ สาย 11, สาย 12 และสาย 35 ถ้าชายคนหนึ่งเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C เขาจะเดินทางได้กี่วิธี

วิธีทำ จากเมือง A ไปยังเมือง B ไปได้ 2 วิธี
จากเมือง B ไปยังเมือง C ไปได้ 3 วิธี
เพราะฉะนั้นชายคนนี้จะเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C ได้ทั้งหมด

$2 \times 3 = 6$ วิธี ดังแผนภาพข้างล่าง



ตัวอย่าง 7.2.3 จะมีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋าสองลูก โดยโยนทีละลูก

วิธีทำ การโยนลูกเต๋าลูกแรกหน้าลูกเต๋าจะออกเป็นไปได้ 6 วิธี คือ

1, 2, 3, 4, 5, 6

การโยนลูกเต๋าลูกที่สองหน้าลูกเต๋าจะออกเป็นไปได้ 6 วิธีคือ

1, 2, 3, 4, 5, 6

เพราะฉะนั้นการโยนลูกเต๋าสองลูกมีทั้งหมด $= 6 \times 6$

$= 36$ วิธี

ดังแผนภาพข้างล่าง

ลูกที่ 2 \ ลูกที่ 1	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

ตอบ

ตัวอย่าง 7.2.4 จะมีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋าสองลูก โดยลูกแรกปรากฏเป็นเลขคู่ และลูกหลังปรากฏเป็นเลขคู่ โดยโยนทีละลูก

วิธีทำ การโยนลูกเต๋าลูกแรก แล้วปรากฏเลขคู่มีอยู่ 3 วิธีคือ

2, 4, 6

การโยนลูกเต๋าลูกที่สองแล้วปรากฏเลขคู่มีอยู่ 3 วิธีคือ

2, 4, 6

เพราะฉะนั้นการโยนลูกเต๋าสองลูกแล้วปรากฏเลขคู่ทั้งสองลูก มีทั้งหมด

$= 3 \times 3$

$= 9$ วิธี คือ

22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66 **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.2.5 นาย ก. ต้องการจะซื้อรถใหม่ 1 คัน ดังนั้น เขาจึงไปที่บริษัทขายรถยนต์ ที่บริษัทนี้มีรถขนาด 1200 CC, 1300 CC, 1500 CC, 1800 CC และ 2000 CC มีสีให้เลือกคือ ดำ, แดง, ส้ม, ขาว, น้ำตาล, เหลือง รถยนต์มีทั้งชนิด สองประตู และสี่ประตู อยากทราบว่า นาย ก. จะมีกี่วิธีในการเลือกซื้อรถที่บริษัทนี้

วิธีทำ เพราะว่า ขนาดรถมีให้เลือก 5 วิธี

สีรถมีให้เลือก 6 วิธี

ชนิดของประตูมีให้เลือก 2 วิธี

เพราะฉะนั้นนาย ก. จะเลือกซื้อรถได้ทั้งหมด $= 5 \times 6 \times 2$

$= 60$ วิธี **ตอบ**

แบบฝึกหัด 7.2

1. มีกี่วิธีในการโยนเหรียญ 1 อัน สองครั้ง
2. จากเมือง A ถึงเมือง B ไปได้สามทางคือ ทางเรือ, ทางรถยนต์และทางเครื่องบิน จะมีกี่วิธีที่นาย ก. เดินทางจาก A ถึง B แล้วเดินกลับจาก B ถึง A
3. จากโจทย์ข้อ 2 จะมีกี่วิธีที่นาย ก. เดินทางจาก A ถึง B แล้วเดินกลับจาก B ถึง A โดยไม่ใช้ทางเดิม
4. มีกี่วิธีที่จะให้ กระต่าย, สุนัข และแมว กับเด็กหญิงสามคน ๆ ละตัว
5. มีกี่วิธีที่จะใส่บอลสามใบ คือ สีแดง, สีน้ำเงิน และสีขาว ลงในกล่องสามใบ ใบละหนึ่งลูก
6. นาย ก. มีเสื้อเชิ้ต 4 ตัว, เน็คไท 10 อัน ถุงเท้า 6 คู่, กางเกง 2 ตัว หมวก 2 ใบ, และรองเท้า 3 คู่ จะมีกี่วิธีที่นายกจะแต่งตัว

7. มีจำนวนกี่จำนวนที่มากกว่า 6,000 ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัว คือ 1, 3, 6, 8 และตัวเลขแต่ละตัวใช้เพียงครั้งเดียว

8. มีเลขหลักพันอยู่กี่จำนวน ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 2, 4, 6, 8

9. มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋าสองลูกโดยโยนทีละลูก แล้ว

   9.1 ลูกแรกปรากฏเลขคู่, ลูกสองปรากฏเลขคี่

   9.2 ลูกแรกปรากฏเลขคี่, ลูกสองปรากฏเลขคี่

   9.3 ลูกแรกปรากฏเลขคี่, ลูกสองปรากฏเลขคู่

10. มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋า

    10.1 สามลูก

    10.2 สี่ลูก

    10.3 n ลูก

11. นาย ก. ไปเที่ยวตลาดนัด พบนาย ข. กำลังขายของเบ็ดเตล็ด สองชิ้น 15 บาท ของเบ็ดเตล็ดที่ขายมี ช้อน, ทัพพี, มีด, ถ้วยพลาสติก, กระชอน, กับดักหนู อยากทราบว่ามีกี่วิธีที่นาย ก. จะซื้อสินค้านาย ข.

7.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของของ n สิ่งที่ต่างกัน เมื่อเลือกมา r สิ่งในแต่ละครั้ง

(Permutation of n different elements taken at a time)

สมมุติมีตัวเลขสามตัวคือ 1, 2, 3 ถ้านำเอาตัวเลขทั้งสามมาจัดเป็นกลุ่ม ๆ ละสามตัวจะได้เป็น

123, 132, 213, 231, 312, 321

ซึ่งสามารถจัดลำดับได้ 6 กลุ่ม

แต่ถ้าจัดใหม่โดยเลือกเป็นกลุ่ม ๆ ละสองตัวจะได้เป็น

12, 13, 21, 23, 31, 32

ซึ่งสามารถจัดลำดับได้ 6 กลุ่ม

ให้ $P(n, r)$ แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของของ n สิ่งเลือกมา r สิ่งในแต่ละครั้ง

ในตำแหน่งที่หนึ่งของการจัดเป็นกลุ่ม ๆ ละ r มีวิธีเลือก n วิธี หลังจากตำแหน่งที่หนึ่งแล้ว ตำแหน่งที่สองเลือกได้ $n-1$ วิธี หลังจากตำแหน่งที่สองแล้ว ตำแหน่งที่สาม เลือกได้ $n-2$ วิธี ดำเนินการต่อไปเรื่อย ๆ จะพบว่าตำแหน่งสุดท้าย หรือตำแหน่งที่ r เลือกได้ $n-(r-1) = n-r+1$ เพราะฉะนั้นการเลือกเป็นกลุ่ม ๆ ละ r สิ่งเลือกได้

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ วิธี}$$

หรือ $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 2\times 1}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore \quad \boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

ซึ่ง n คือ ของจำนวน n สิ่ง

r คือ การเลือกของ r สิ่งในแต่ละครั้ง

จากสมการ (1) ถ้า $n = r$

$$P(n, n) = \frac{n!}{n-n!}$$

$$= \frac{n!}{0!}$$

$$= n!$$

ตัวอย่าง 7.3.1 เลขสี่จำนวน คือ 1, 2, 3, 4 จะนำมาเขียนเป็นจำนวนร้อยได้กี่จำนวน

วิธีทำ เพราะเลขจำนวนร้อยประกอบหลักหน่วย, หลักสิบ และหลักร้อย ซึ่งเลขจำนวนร้อยประกอบด้วยเลข 3 หลัก

ดังนั้น $n = 4, \ r = 3$

$$P(n, r) = P(4, 3)$$

$$= \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$ จำนวน

ทั้งหมด 24 จำนวนคือ

123, 124, 134, 132, 142, 143

213, 214, 234, 231, 241, 243

312, 314, 324, 321, 341, 342

412, ,413, 423, 421, 431, 432

ตัวอย่าง 7.3.2 จำนวนสี่จำนวน 1, 2, 3, 4 ถ้าเลือกครั้งละสองจำนวนจะเลือกได้กี่วิธี โดยไม่มีจำนวนซ้ำกัน

วิธีทำ $n = 4,\ r = 2$

จาก $P(n, r) = P(4, 2)$

$$= \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!}$$

$$= \frac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1}$$

$= 12$ วิธี **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาค่า $P(10, 2)$

วิธีทำ จาก $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

เมื่อ $n = 10,\ r = 2$ แทนค่าในสูตร

$$P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!}$$

$$= \frac{10!}{8!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times3\times\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 10\times9 = 90$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.3.4 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $P(n, n-1) = P(n, n)$

วิธีทำ ทางซ้ายมือ

$$P(n, n-1) = \frac{n!}{(n-(n-1))!}$$

$$= \frac{n!}{1!}$$

$$= n! \qquad \ldots\ldots(1)$$

ทางขวามือ

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{0!}$$

$$= \frac{n!}{1} \text{ เพราะว่า } 0! = 1$$

$$= n! \qquad \ldots\ldots(2)$$

จากสมการ (1) = (2) เพราะฉะนั้น

$$P(n, n-1) = P(n, n)$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.3.5 นักเรียนห้องหนึ่งมี 30 คน จะมีกี่วิธีที่ครูประจำชั้นจะจัดเด็กให้ทำความสะอาด ห้องเรียน 6 คน

วิธีทำ เพราะว่า นักเรียนห้องหนึ่งมี 30 คน ดังนั้น

$$n = 30$$

ครูประจำชั้นเลือกเด็ก 6 คน ดังนั้น

$$r = 6$$

จาก $$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(30, 6) = \frac{30!}{(30-6)!}$$

$$= \frac{30!}{24!}$$

$$= 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25$$

$$= 427{,}518{,}000$$

$\therefore$ ครูประจำชั้นมีวิธีเลือกเด็กได้ = 427,519,000 วิธี **ตอบ**

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาค่า $P(7, 5)$
3. จงหาค่า $P(4, 2)$
3. จงหาค่า $P(7, 1)$
4. จงหาค่า $P(11, 2)$
5. จงหาค่า $P(3, 1) + P(3, 2) + P(3, 3)$

ข้อ 6. ถึง 8. จงพิสูจน์เอกลักษณ์

6. $P(n, n) = 2P(n, n-2)$
7. $P(n, n-r)\, P(r, r-1) = P(n, n)$
8. $P(n, n-r)\, P(r, 1) = p(n, n-r+1)$
9. มีเลขอยู่ 5 ตัวคือ 1, 2, 3, 4, 5 มีกี่วิธีที่สร้างเลขหลักสิบ
10. มีพยัญชนะอยู่ 10 ตัว คือ ก, ข, ค, ง, จ, ฉ, ช, ซ, ญ, ฐ มีกี่วิธีที่ที่จะนำพยัญชนะเหล่านี้มาเรียงเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 ตัว
11. ชั้นวางหนังสือวางหนังสือได้เพียง 5 เล่ม แต่นักศึกษามีหนังสือ คณิตศาสตร์, สถิติ, เคมี, ชีวะ, ภูมิศาสตร์, ประวัติศาสตร์ อยู่อย่างละ 1 เล่ม มีกี่วิธีที่นักศึกษาจะจัดหนังสือวางบนชั้นหนังสือ
12. นักศึกษามีหนังสือ 4 เล่มจะจัดวางบนชั้นหนังสือได้กี่วิธี

7.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของของ n สิ่ง ซึ่งทั้งหมดมีบางอันเหมือนกัน

(Permutations of n elements not all different)

สมมุติมีตัวเลขสามจำนวนคือ 1, 2, 2 ซึ่งมีตัวเลขสองซ้ำกันสองตัว ถ้านำเอาตัวเลขทั้งสามมาจัดเป็นกลุ่ม ๆ ละสามตัวจะได้เป็น

122, 212, 221

ซึ่งจัดลำดับได้สามกลุ่ม

จากตัวอย่างนี้ $n = 3$ จำนวน แต่มีตัวที่ซ้ำกัน 2 ตัว ให้ s เป็นจำนวนสมาชิกที่ซ้ำกัน ฉะนั้นจะมีจำนวนสมาชิกที่ต่างกัน $n-s$ ตัว

เพราะฉะนั้น การจัดลำดับของ n สิ่ง ซึ่งมี s สิ่งเหมือนกัน คือ

$$P(n, n-s) = \frac{n!}{[n-(n-s)]!} \qquad \text{......(1)}$$

$$= \frac{n!}{s!}$$

จากตัวอย่างที่สมมุติมา $n = 3,\ s = 2$

เพราะฉะนั้น

$$P(n, n-s) = P(3, 3-2)$$

$$= P(3, 1)$$

$$= \frac{3!}{(3-1)!}$$

$$= \frac{3!}{2!}$$

$$= \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 7.4.1 มีจำนวนเลขร้อยกี่จำนวน ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 1, 2, 6

วิธีทำ เพราะว่า เลขร้อยแต่ละจำนวนประกอบด้วย

หลักหน่วย หลักสิบ และหลักร้อย

และไม่มีจำนวนซ้ำกันเลย $(s = 0)$ และ $n = 3$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
P(n, n-s) &= P(3, 3-0) \\
&= P(3, 3) \\
&= \frac{3!}{(3-3)!} \\
&= \frac{3!}{0!} \\
&= \frac{3 \times 2 \times 1}{1} \\
&= 6 \text{ จำนวน}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ 126, 162, 216, 261, 612, 621 **ตอบ**

จากหลักการที่กล่าวมาแล้ว ถ้าจำนวนสมาชิกทั้งหมด n ตัว แบ่งออกเป็นกลุ่ม ๆ ซึ่งแต่ละกลุ่มมีสมาชิกที่เหมือนกันอยู่กลุ่มเดียวกัน จะมีการจัดลำดับของของ n สิ่งได้กี่วิธี

ทฤษฎีบท 7.4.1 ถ้าสมาชิกของเซตหนึ่งมี n ตัว แบ่งออกเป็น g กลุ่ม ซึ่งสมาชิกที่เหมือนกันอยู่กลุ่มเดียวกัน ถ้า

กลุ่มที่ 1 มีสมาชิก n_1 ตัว

กลุ่มที่ 2 มีสมาชิก n_2 ตัว

กลุ่มที่ g มีสมาชิก n_g ตัว

แล้วจะจัดลำดับได้ทั้งหมด $= \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_g!}$

ตัวอย่าง 7.4.2 มีกี่วิธีที่จะสามารถสลับอักษรของคำว่า Mississippi

วิธีทำ คำว่า Mississippi มีอักษรทั้งหมด 11 ตัว

อักษร i มี 4 ตัว, อักษร s มี 4 ตัว

และอักษร p มี 2 ตัว

เพราะฉะนั้นสามารถสลับอักษรได้ $= \dfrac{11!}{4!\,4!\,2!}$

$= 34{,}650$ วิธี **ตอบ**

ตัวอย่าง 7.4.3 มีจำนวนเลขพันกี่จำนวน ซึ่งประกอบด้วยจำนวน 1, 1, 2, 3

วิธีทำ จำนวนทั้งหมดมี 4 จำนวน ดังนี้

$$n = 4$$

มีจำนวนที่ซ้ำกันอยู่ 2 จำนวน ดังนั้น

$$s = 2$$

จากสูตร $P(n, n-s) = \frac{n!}{s!}$

เมื่อ $n = .4$, $s = 2$ แทนค่า

$$P(4, 4-2) = p(4, 2)$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!}$$

$$= 4 \times 3 = 12$$

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนร้อยทั้งหมด 12 จำนวนคือ

1123, 1132, 1213, 1231, 1321, 1312

2113, 2131, 2311

3112, 3121, 3211 **ตอบ**

แบบฝึกหัด 7.4

1. มีจำนวนร้อยกี่จำนวนซึ่งประกอบด้วยจำนวน 1, 1, 2
2. มีจำนวนพันกี่จำนวนซึ่งประกอบด้วยจำนวน 3, 3, 2, 2
3. มีจำนวนหมื่นกี่จำนวนซึ่งประกอบด้วยจำนวน 1, 2, 2, 2, 3
4. กล่องใบหนึ่งมีลูกเทนนิสสีขาว 3 ลูก, สีเหลือง 2 ลูก, สีชมพู 1 ลูก จะมีกี่วิธีในการหยิบลูกเทนนิสทั้งหมดในกล่องออกมาโดยหยิบทีละลูก และไม่ใส่คืนกลับไป
5. ชายคนหนึ่งมีเงินเหรียญห้าบาท 2 เหรียญ, หนึ่งบาท 4 เหรียญ, ห้าสิบสตางค์ 2 เหรียญอยู่ในกระเป๋าของเขา เขาได้นำเงินทั้งหมดไปซื้อผลไม้เป็นเงิน 15 บาท

อยากทราบว่าจะมีกี่วิธีที่เขาจะหยิบเงินจากกระเป๋าของเขาให้คนขายผลไม้ โดยหยิบทีละเหรียญ

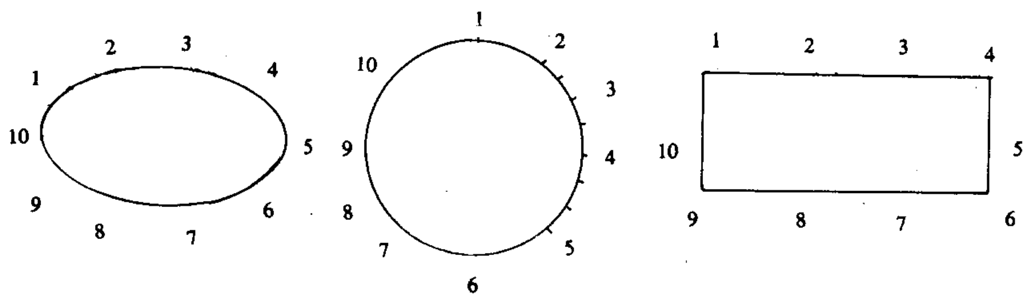
ข้อ 6. ถึง 8. มีกี่วิธีของการจัดลำดับจากตัวอักษรทั้งหมดของคำที่กำหนดให้

6. Tennessee
7. Missouri
8. Louisiana
9. นาย ก. ซื้อนกแก้วหนึ่งตัวจากสนามหลวง เมื่อมาถึงบ้านเขาพบว่าเขามีกรงอยู่ 3 ใบ อยากทราบว่านาย ก. จะมีกี่วิธีในการที่จะนำนกตัวนี้ใส่ในกรงที่มีอยู่
10. ละครสัตว์คณะหนึ่งสั่งซื้อสัตว์มาใหม่สามชนิด คือ เสือ, ช้าง, หมี อย่างละหนึ่งตัว แต่ละครสัตว์คณะนี้มีกรงเหล็กว่างอยู่หกใบ จะมีกี่วิธีในการที่จะนำสัตว์ทั้งสามชนิดมาใส่ไว้ในกรงเหล็ก

7.5 **วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม** (Cyclic Permutation)

ถ้าวิธีเรียงสับปลี่ยนของของ n สิ่ง ซึ่งแต่ละสิ่งอยู่ใกล้กับอีกสองสิ่งนั้นคือของแต่ละสิ่งจะต่อเนื่องกัน วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบนี้เรียกว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม (Cyclic Permutation)

ในการที่จะจัดสิ่งต่าง ๆ ให้ต่อเนื่องกัน และจะมีสิ่งอื่นอยู่ใกล้ ๆ ของแต่ละสิ่งนั้น แสดงว่า อันแรกกับอันสุดท้ายต้องอยู่ต่อเนื่องกัน เช่นมีจำนวนอยู่ 10 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 จะจัดทั้งสิบจำนวนให้ต่อเนื่องกันได้ดังภาพข้างล่าง



จะพบว่าการจัดนั้นอาจเป็นรูปวงรี, วงกลม หรือ สี่เหลี่ยมมุมฉาก

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมนี้ อาจพบในชีวิตประจำวันเช่น

การนั่งรับประทานอาหารของนักศึกษาบนโต๊ะตัวเดียวกันในโรงอาหาร

หรือ การนั่งบนรถเมล์ชนิดที่มีที่นั่งอยู่ข้างรถเมล์ เวลานั่งผู้โดยสารจะหันหน้าชนกัน

หรือ การที่นักบาสเกตบอล แย่งบอลกันกลางสนามเพื่อเริ่มแข่งขันกัน

หรือ การทำพวงมาลัย ซึ่งเอาดอกไม้หลายชนิดมาร้อยเป็นวงกลม

หรือ การทำสายสร้อยคอ, สร้อยข้อมือ เป็นต้น

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสมาชิกทั้งหมด n ตัว จะให้สมาชิกตัวหนึ่งอยู่กับที่ แล้วเรียงสับเปลี่ยนสมาชิกที่เหลืออีก $(n-1)$ ตัว

ดังนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสมาชิก n ตัว $= (n-1)!$ 7.5.1

ตัวอย่าง 7.5.1 $\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{matrix}}$

จากรูป ให้ตัวเลข 4 ตัวคือ 1, 2, 3, 4 วางอยู่ตรงมุมสี่มุมของสี่เหลี่ยม ถ้าให้เลข 1 คงที่ แล้ววิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมมีกี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่า เลข 1 คงที่ ฉะนั้นตัวเลขที่เหลืออีก $(4-1)$ ตัวจะถูกเรียงสับเปลี่ยน เพราะฉะนั้นจะจัดได้ $= (4-1)! = 3! = 3\times2\times1 = 6$ วิธี

คือ $\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{matrix}}$

ตอบ

ตัวอย่าง 7.5.2 นายดำ มีภรรยาชื่อนางแดงมีบุตรชายสองคน และบุตรสาวหนึ่งคน ในการรับทานอาหารเช้ามีกี่วิธีการเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ในการที่จะจัดคนนั่งรับทานอาหารบนโต๊ะ

วิธีทำ ถ้าให้นายดำนั่งคงที่ สมาชิกของครอบครัวที่เหลือคือ 4 คน

เพราะฉะนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมมีทั้งหมด $= 4!$

$= 4\times3\times2\times1$

$= 24$ วิธี

ตอบ

แบบฝึกหัด 7.5

1. ในการประชุมโต๊ะกลมของบริษัท A ซึ่งมีประธาน, รองประธาน 2 ท่าน และกรรมการอีก 10 ท่าน ท่านจะจัดคนทั้งหมดให้นั่งเก้าอี้ได้ทั้งหมดกี่วิธี
2. ชาย 5 คน หญิง 2 คน นั่งเล่นไพ่วงหนึ่ง ท่านจะมีกี่วิธีในการจัดให้ชายและหญิงนั่งเล่นไพ่ในวงนี้
3. นายแดงซื้อดอกมะลิ, ดอกกุหลาบ, ดอกจำปา, ดอกพุด, และดอกรัก เพื่อมาทำพวงมาลัย อยากทราบว่านายแพงจะมีกี่วิธีในการนำเอาดอกไม้มาร้อยเป็นพวงมาลัย
4. นายดำมีลูกกุญแจ 5 ลูก อยากทราบว่านายดำมีกี่วิธีในการนำลูกกุญแจใส่พวงกุญแจกลม
5. ร้านทำทองได้นำ ทับทิม, มรกต, ไพลิน, บุษราคัม และเพชร มาทำสายสร้อยคอ อยากทราบว่าร้านทำทองจะมีกี่วิธีในการทำสายสร้อยคอ

7.6 **วิธีจัดหมู่** (Combinations)

พิจารณาการจัดลำดับ xyz, xzy, yzx, yxz, zxy และ zyx ถ้าเราไม่พิจารณาลำดับของ x, y หรือ z แล้ว ทั้งหมดนี้เป็นเพียง หนึ่งวิธีจัดหมู่ (Combinations) เท่านั้นของอักษร x, y และ z

จะมีเพียงหนึ่งวิธีจัดหมู่ (Combination) ของของ n สิ่งซึ่งแต่ละครั้งเกิด n สิ่ง

กำหนดวิธีจัดหมู่ของของ n สิ่งซึ่งแต่ละครั้งเกิด r สิ่ง โดยสัญลักษณ์ C(n, r)

ซึ่ง
$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\ r!} \qquad .....(1)$$

ตัวอย่าง 7.6.1 กรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วยสมาชิก 7 คน จะมีกี่วิธีที่จะเลือกกรรมการจากคนทั้งหมด 25 คน

วิธีทำ $n = 25,\ r = 7$

การเลือกกรรมการจะมีทั้งหมด

$= C(n, r)$

$= C(25, 7)$

$$= \frac{25!}{7!\ (25-7)!}$$

$$= \frac{25!}{7!\ 17!}$$

$$= \frac{25\times24\times23\times22\times21\times20\times19\times18!}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times18!}$$

$$= 480{,}700$$

ตอบ

ตัวอย่าง 7.6.2 โรงงานแห่งหนึ่งต้องการคนงานชาย 6 คน หญิง 3 คน จะมีกี่วิธีที่จะเลือก ถ้าคนงานชายทั้งหมด 9 คน และคนงานหญิงทั้งหมด 5 คน

วิธีทำ เลือกคนงานชาย 6 คน จาก 9 คน เลือกได้

C(9, 6) วิธี

และเลือกคนงานหญิง 3 คน จาก 5 คน เลือกได้

C(5, 3) วิธี

ดังนั้น จำนวนครั้งที่เป็นไปได้ในการเลือกคนงานคือ

$$C(9, 6)\ C(5, 3) = \frac{9!}{6!\ (9-6)!} \cdot \frac{5!}{3!\ (5-3)!}$$

$$= \frac{9!}{6!\ 3!} \cdot \frac{5!}{3!\ 2!}$$

$$= \frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times6!} \cdot \frac{5\times4\times3!}{2\times3!}$$

$$= 840$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงแสดงว่า C(17, 5) = C(17, 12)
2. จงแสดงว่า 2C(9, 5) = 3C(9, 3)
3. แสดงว่า C(n, r) = C(n, n − r)
4. เด็กนักเรียนในห้องหนึ่งมี 20 คน มีกี่วิธีในวิธีจัดหมู่ถ้าเลือกนักเรียนมา 5 คน

5. มีจำนวนอยู่ 10 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 มีกี่วิธี ถ้าจะสร้างเซตซึ่งมีสมาชิกอยู่ 5 ตัว
6. มีหนังสือ 20 เล่มอยู่บนชั้นหนังสือ จะมีกี่วิธีที่จะเลือกหนังสือ 3 เล่มจากชั้น
7. มีกี่วิธีในการดึงไพ่ 4 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง (52 ใบ)
8. ชาย 9 คนนั่งรถสองคันไปเที่ยว ถ้ารถคันหนึ่งบรรทุกได้ 6 คน รถอีกคันหนึ่งบรรทุกได้ 3 คน มีกี่วิธีที่ชายทั้งหมดจะนั่งรถไปเที่ยว
9. นักเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียนชาย 12 คน นักเรียนหญิง 10 คน มีกี่วิธีที่อาจารย์จะเลือกเด็กชาย 6 คน และเด็กหญิง 3 คน เพื่อทำงานอย่างหนึ่ง
10. มีอักษรอยู่ห้าตัว คือ A, B, C, D, E จะสร้างรูปตามเงื่อนไขต่อไปนี้ได้ทั้งหมดกี่รูป

    10.1 เส้นตรง

    10.2 รูปสามเหลี่ยม

    10.3 รูปสี่เหลี่ยม