บทที่ 6
ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

6.1 แฟคตอเรียล (factorial)

นิยาม 6.1.1 ถ้า $n \geqslant 1$ แล้ว $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ สัญลักษณ์ $n!$ อ่านว่า n แฟคตอเรียล จากนิยามพบว่า $n!$ คือผลคูณของเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาค่า 5!

วิธีทำ $5! = 5\times4\times3\times2\times1$

$= 120$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาค่าของ 8!

วิธีทำ $8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$= 40,320$ **ตอบ**

หมายเหตุ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$

$= n[(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1]$

$= n(n-1)!$

สำหรับ $n \geqslant 1$

พิจารณา 0! มีค่าเท่าไร

ถ้า $n! = n(n-1)!$

ถ้า $n = 1$, $1! = 1(1-1)!$

$= 1\times0!$

$1 = 1\times0!$ เพราะว่า $1! = 1$

ดังนั้น $0! = \frac{1}{1} = 1$

เพราะฉะนั้น $0! = 1$

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาค่าแฟคตอเรียลต่อไปนี้

1. $5!$
2. $7!$
3. $\dfrac{3!\,4!}{6!}$
4. $\dfrac{7!\,9!}{10!}$
5. $\dfrac{4!\,6!}{5!}$
6. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$
7. $\dfrac{n!\,(n-1)!}{(n-3)!}$
8. $\dfrac{(n-2)!\,(n-4)!}{(n-3)!}$
9. $\dfrac{n!\,(n+3)!}{(n+2)!}$

6.2 Binomial Formular

ลองพิจารณาการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$$n = 1,\ (x+y)^1 = x+y$$
$$n = 2,\ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$n = 3,\ (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$n = 4,\ (x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$n = 5,\ (x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

จากการกระจายนี้จะทราบคุณสมบัติการกระจาย $(x+y)^n$ ดังนี้

ข้อที่ 1 เทอมแรกของ $(x+y)^n$ คือ x^n

ข้อที่ 2 เทอมที่สองของ $(x+y)^n$ คือ $nx^{n-1}y$

ข้อที่ 3 กำลังของ x จะลดลงทีละหนึ่ง ส่วนกำลังของ y จะเพิ่มขึ้นทีละหนึ่งเทอมต่อเทอม

ข้อที่ 4 การกระจายนี้จะมีเทอมทั้งหมด $n+1$ เทอม

ข้อที่ 5 เทอมสุดท้ายหรือเทอมที่ $(n+1)$ คือ y^n

ข้อที่ 6 เทอมรองสุดท้าย หรือเทอมที่ n คือ nxy^{n-1}

ข้อที่ 7 สัมประสิทธิของเทอมที่ $n+1$ เท่ากับสัมประสิทธิของเทอมที่ n คูณกับกำลังของ x ในเทอมที่ n นั้น แล้วหารด้วย n

ข้อที่ 8 กำลังของ x และ y ในทุก ๆ เทอมรวมกันเท่ากับ n

ตัวอย่าง 6.2.1 จงเขียนแต่ละเทอมของ $(x+y)^5$

วิธีทำ จะมีเทอมทั้งหมด $= 5+1 = 6$ จากข้อที่ 4

เทอมที่ 1 $= x^5$ จากข้อที่ 1

เทอมที่ 2 $= 5x^{5-1}y$ จากข้อที่ 2

$= 5x^4y$

เทอมที่ 3 $= \frac{5\times 4}{2}x^{4-1}y^{1+1}$ จากข้อที่ 7 และข้อที่ 3

$= 10x^3y^2$

เทอมที่ 4 $= \frac{10\times 3}{3}x^{3-1}y^{2+1}$ จากข้อ 7 และข้อที่ 3

$= 10x^2y^3$

เทอมที่ 5 $= 5xy^{5-1}$ จากข้อที่ 6

$= 5xy^4$

เทอมที่ 6 $= y^5$ จากข้อที่ 5

ตอบ

ถ้าพิจารณาแต่ละเทอมของ $(x+y)^n$ จะพบว่าการกระจายมีเทอมทั้งหมด $n+1$ เทอม ซึ่งแต่ละเทอมคือ

เทอมที่ 1 $= x^n$ จากข้อที่ 1

เทอมที่ 2 $= nx^{n-1}y$ จากข้อที่ 2

เทอมที่ 3 $= \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2$ จากข้อที่ 7 และ 3

$= \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2$

เทอมที่ 4 $= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2!} x^{n-3} y^3$ จากข้อที่ 7 และ 3

$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3$

เทอมที่ 5 $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!} x^{n-4} y^4$ จากข้อที่ 7 และ 3

$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^{n-4} y^4$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาเทอมต่อ ๆ ไปอีกได้

เทอมที่ n $= n x y^{n-1}$ จากข้อที่ 6

เทอมที่ n + 1 $= y^n$ จากข้อที่ 5

จากการหาเทอมต่าง ๆ ของ $(x+y)^n$ นี้ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}y^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^{n-4} y^4 + \ldots + n x y^{n-1} + y^n$$

สมการนี้เรียกว่า Binomial Formular และสมการนี้เป็นจริงเรียกว่า Binomial Theorem (ทฤษฎีบททวินาม)

ตัวอย่าง 6.2.2 จงกระจาย $(2x+y)^6$ โดยใช้ Binomial Formula

วิธีทำ

$$(2x+y)^6 = (2x)^6 + 6(2x)^{6-1} y + \frac{6(6-1)(2x)^{6-2}}{2!} y^2 +$$

$$\frac{6(6-1)(6-2)}{3!} (2x)^{6-3} y^3 + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4!} (2x)^{6-4} y^4$$

$$+ 6(2x)^{6-1} + y^6$$

$$= 64 x^6 + 6(32 x^5) y + \frac{6(5)}{2!} (16 x^4) y^2 + \frac{6(5)(4)}{3!} (8 x^3) y^3 +$$

$$\frac{6(5)(4)(3)}{4!} (4 x^2) y^4 + 6(2 x) y^5 + y^6$$

$= 64x^6 + 192x^5y + 15(16x^4)y^2 + 20(8x^3)y^3 +$

$15(4x^2)y^4 + 12xy^5 + y^6$

$= 64x^6 + 192x^5y + 240x^4y^2 + 160x^3y^3 + 60x^2y^4 +$

$12xy^5 + y^6$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 6.2.3 จงกระจาย $(x-2y)^5$ โดยใช้ Binomial Formula

วิธีทำ

$$(x-2y)^5 = x^5 + 5x^{5-1}(-2y) + \frac{5(5-1)}{2!}x^{5-2}(-2y)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}x^{5-3}(-2y)^3 +$$

$$5x(-2y)^{5-1} + (-2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 10x^3(4y^2) + 10x^2(-8y^3) + 5x(16y^4) - 32y^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 10x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $(1.01)^4$ โดยใช้ Binomial Formula

วิธีทำ

$$(1.01)^4 = (1+.01)^4$$

$$= 1^4 + 4(1)^{4-1}(.01) + \frac{4(4-1)}{2!}(1)^{4-2}(.01)^2 + 4(1)(.01)^{4-1} + (.01)^4$$

$$= 1 + 4(1)^3(.01) + 6(1)^2(.01)^2 + 4(1)(.01)^3 + (.01)^4$$

$$= 1 + 4(.01) + 6(.0001) + 4(.000001) + (.00000001)$$

$$= 1 + (.04) + (.0006) + (.000004) + .00000001$$

$$= 1.04060401$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 6.2

ข้อ 1-8 จงใช้ Binomial Formula กระจายเทอมต่อไปนี้

1. $(a+x)^4$
2. $(x-y)^4$
3. $(a+2b)^5$

4. $(2x+a)^7$

5. $(3x-5y)^5$

6. $(2x+y^2)^6$

7. $(x^3-4y)^4$

8. $(2x^2-3y^3)^6$

ข้อ 9-12 จงหาสี่เทอมแรก

9. $(x+2y)^{13}$

10. $(x-4y)^{16}$

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{15}$

12. $(x^3-\frac{1}{x^2})^{13}$

ข้อ 13-16 จงหาค่าต่อไปนี้ ตามตัวอย่าง 6.2.4

13. $(1.03)^4$

14. $(1.04)^5$

15. $(1.05)^6$

16. $(1.06)^5$

6.3 การหาเทอมที่ r ของ Binomial Formula

จาก Binomial Formula

$$(x+y)^n = x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4+\ldots+nxy^{n-1}+y^n$$

ถ้าพิจารณา เทอมที่ 4 คือ $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3$ พบว่า

ข้อที่ 1 กำลังของ y = เทอมที่ 4 – 1 = 3

ข้อที่ 2 กำลังของ x = n – กำลังของ y = n – 3

ข้อที่ 3 ตัวหารของสัมประสิทธิ หรือจำนวนส่วน = (กำลังของ y) ! = 3!

ข้อที่ 4 ตัวประกอบตัวแรกของเศษคือ n ตัวที่สองคือ $(n-1)$ ตัวสุดท้ายคือ $n-($เทอมที่ $4-2)$ ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้เป็นจริงสำหรับการหาเทอมหนึ่งเทอมใดแล้ว สามารถหาเทอมที่ r ของ $(x+y)^n$ ดังคุณสมบัติต่อไปนี้

ข้อที่ 1 กำลังของ y = เทอมที่ $r-1$

ข้อที่ 2 กำลังของ x = $n-$ กำลังของ y

$= n-(r-1)$

ข้อที่ 3 ตัวหารของสัมประสิทธิ หรือจำนวนส่วน = (กำลังของ y)!

$= (r-1)!$

ข้อที่ 4 เพราะว่าตัวประกอบตัวสุดท้ายของเศษคือ $[n-(r-2)]$

เพราะฉะนั้นเศษทั้งหมด $= n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-2)]$

ดังนั้นเทอมที่ r ของ $(x+y)^n$ คือ

$$\text{เทอมที่ } r = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ .\ .\ .\ [n-(r-2)]}{(r-1)!}\ x^{n-(r-1)}\,y^{r-1}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.1 จงหาเทอมที่ 4 ของ $(2x+y)^6$

วิธีทำ เพราะว่า $n = 6,\ r = 4$

เพราะฉะนั้น

$$\text{เทอมที่ } 4 = \frac{6(6-1)\ [6-(4-2)]}{(4-1)!}\ (2x)^{6-(4-1)}\,y^{4-1}$$

$$= \frac{6\ (5)\ (4)}{3!}\ (2x)^3y^3$$

$$= 20(8x^3)\ y^3$$

$$= 160x^3y^3$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 6.3.2 จงหาเทอมที่ 6 ของ $(2x-y)^9$

วิธีทำ เพราะว่า $n = 9,\ r = 6$

$$\text{เทอมที่ } 6 = \frac{9(9-1)\ldots[9-(6-2)]}{(6-1)!}\ (2x)^{9-(6-1)}(-y)^{6-1}$$

$$= \frac{9(8)(7)(6)(5)}{5!}(16x^4)(-y^5)$$

$$= (126)(16x^4)(-y^5)$$

$$= -2016x^4y^5$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.3.3 จงหาเทอมที่ 4 ของ $(2x+2y)^7$

วิธีทำ เพราะว่า $n = 7, r = 4$

เทอมที่ 4 $= \frac{7(7-1)[7-(4-2)]}{(4-1)!}(2x)^{7-(4-1)}(2y)^{4-1}$

$$= \frac{7(6)(5)}{3!}(2x)^4(2y)^3$$

$$= 35(16x^4)(8y^3)$$

$$= 4480x^4y^3$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาเทอมที่ 4 ของ $(2x-b)^{14}$
2. จงหาเทอมที่ 6 ของ $(a+3y)^9$
3. จงหาเทอมที่ 7 ของ $(2x-y^2)^8$
4. จงหาเทอมที่ 5 ของ $(x^3+4y)^9$
5. จงหาเทอมกลาง ของ $(x-3y^{1/2})^9$
6. จงหาเทอมกลาง ของ $(2x+y^{1/3})^7$
7. จงหาเทอมกลาง ของ $(a^{1/2}-a^{1/3})^5$

6.4 การพิสูจน์ Binomial Formular

จาก Binomal Formular

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(r-2)]}{(r-1)!}x^{n-(r-1)}y^{r-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(r-2)][n-(r-1)]}{r!}x^{n-r}y^r$$
$$+ \ldots + nxy^{n-1} + y^n$$

จะพิสูจน์ว่าเป็นจริงสำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

การพิสูจน์จะพิสูจน์โดยวิธีอุปมาณทางคณิตศาสตร์ นั้นคือ

1. สูตรนี้เป็นจริงสำหรับ $n = 1$

2. กำหนดให้สูตรนี้เป็นจริงสำหรับ $n = k$ แล้ว $n = k+1$ เป็นจริงด้วย

แล้วสรุปว่า Binomial Formular นี้เป็นจริงสำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

พิสูจน์ 1. ถ้า $n = 1$

$$(x+y)^1 = x^1 + 1x^{1-1}y$$

$$x+y = x + x^0 y$$

$$= x+y \text{ เพราะว่า } x^0 = 1$$

2. กำหนดให้ $n = k$ เป็นจริง นั้นคือ

$$(x+y)^k = x^k + kx^{k-1}y + k(k-1)\, x^{k-2}y^2 + \cdots$$

- T - -

$$+ \frac{k(k-1)\cdots[k-(r-2)]}{(r-1)!} x^{k-(r-1)}y^{r-1}$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdots[k-(r-2)][k-(r-1)]}{r!} x^{k-r}y^r$$

$$+ \cdots + kxy^{k-1} + y^k$$

เพราะว่า $(x+y)^{k+1} = (x+y)^k\,(x+y)$ (1)

แทนค่า $(x+y)^k$ ใน (1)

$$(x+y)^{k+1} = \Big[x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}\, x^{k-2}y^2 + \cdots$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdots[k-(r-2)]}{(r-1)!} x^{k-(r-1)}y^{r-1}$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdots[k-(r-2)]\ [k-(r-1)]}{r!} x^{k-r}y^r$$

$$+ \cdots + kxy^{r-1} + y^k \Big](x+y)$$

$$= x^k(x+y) + kx^{k-1}y(x+y)$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2!} x^{k-2}y^2(x+y) + \cdots$$

$$+ \frac{k(k\ \ 1)\cdots[k-(r-2)]}{(r-1)!} x^{k-(r-1)}y^{r-1}(x+y)$$

$$+\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]\,[k-(r-1)]}{r!}\,x^{k-r}y^r\,(x+y)$$

$$+——— + kxy^{k-1}(x+y) + y^k(x+y)$$

$$= (x^{k+1} + x^k y) + (kx^k y + kx^{k-1}y^2)$$

$$+\left(\frac{k(k-1)}{2!}\,x^{k-1}y^2 + \frac{k(k-1)}{2!}\,x^{k-2}y^3\right) + ———$$

$$+\left(\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]}{(r-1)!}\,x^{k-(r-2)}y^{r-1}\right)$$

$$+\left(\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]}{r-1!}\,x^{k-(r-1)}y^r\right)$$

$$+\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]}{r!}\,[k-(r-1)]\,x^{k-(r-1)}y^r)$$

$$+\left(\frac{k(k-1)———[h-(r-2)]}{r!}\,[k-(r-1)]\,x^{k-r}y^{r+1}\right)$$

$$+——— + (kx^2y^{k-1}) + (kxy^k) + xy^k + y^{k+1}$$

$$= x^{k+1} + (x^k y + kx^k y) + \left(kx^{k-1}y^2 + \frac{k(k-1)}{2!}\,x^{k-1}y^2\right)$$

$$+——— + \left\{\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]}{(r-1)!}\right.$$

$$\left.+\frac{k(k-1)———[k-(r-1)]}{r!}\right\}x^{k-(r-1)}y^r\ +———$$

$$+———+ (kxy^k + xy^k) + y^{k+1} \qquad (2)$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $x^{k-(r-1)}\,y^r$ นั้นคือ

$$\left\{\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]}{(r-1)!}\right\} + \left\{\frac{k(k-1)———[k-(r-1)]}{r!}\right\}$$

$$= \left\{\frac{k(k-1)———[k-(r-2)}{(r-1)!}\right\} + \left\{\frac{k(k-1)———[k-(r-2)]\,[k-(r-1)]}{r!}\right\}$$

$$= \frac{k(k-1)———[k-(r-2)]\,r + k\,(k-1)———[k-(r-2)]\,[k-(r-1)]}{r!}$$

$$= \frac{\{k(k-1)———[k-(r-2)]\}\,\{r+[k-(r-1)]\}}{r!}$$

$$= \frac{\{k(k-1)———[k-(r-2)]\}\,(k+1)}{r!}$$

$$= \frac{(k+1)\,(k)\,(k-1)———[k-(r-2)]}{r!} \qquad (3)$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ $x^{k-(r-1)}y^r$ ในสมการ (2)

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= x^{k+1} + (x^k y + kx^k y) + ——— \\
&\quad —— + \frac{(k+1)\,(k)\,(k-1)———[k-(r-2)]}{r!}\, x^{k-(r-1)}y^r \\
&\quad + ——— + (k+1)\,xy^k + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + (x^k y + kx^k y) + ——— + (k+1)\,(k)\,(k-1)——— \\
&\quad \frac{——[(k+1)-(r-1)]}{r!}\, x^{(k+1)-r}y^r + ——— + (k+1)\,xy^k + y^{k+1}
\end{aligned}
$$

ค่าที่ได้นี้ เสมือนกับการแทนค่า $k = k+1$ นั้นแสดงว่าถ้า $x = k$ สูตรนี้เป็นจริงแล้ว $x = k+1$ ก็เป็นจริงด้วย

สรุปได้ว่า Binomial Formula เป็นจริงสำหรับ $n = 1, 2, 3,$ ———เสมอ

สำหรับ $(x+y)^n$ สำหรับ n เป็นลบ หรือ เศษส่วน ซึ่ง ณ ที่นี้จะไม่มีการพิสูจน์ และจะพบว่าสำหรับ n เป็นลบนั้นเราจะไม่พบเทอมสุดท้าย เนื่องจากสัมประสิทธิ์จะไม่มีทางเป็นศูนย์ดังนั้นจะไม่สามารถหาเทอมทั้งหมดได้

และการกระจาย $(x+y)^n$ สำหรับ n เป็นลบ หรือ n เป็นเศษส่วนนี้ค่าของ y จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง $-x$ และ $x(-x < y < x)$

ตัวอย่างที่ 6.4.1

จงหาสี่เทอมแรกของ $(2+x)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ $$(2+x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2)^{\frac{1}{2}-1}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})(2)^{\frac{-1}{2}-1}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(2)^{\frac{-3}{2}-1}}{3!}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}2^{\frac{-1}{2}}x - \frac{1}{8}(2)^{\frac{-3}{2}}x^2 + \frac{1}{16}(2)^{\frac{-5}{2}}x^3$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{x^2}{16\sqrt{2}} + \frac{x^3}{64\sqrt{2}} ----$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{x^2\sqrt{2}}{32} + \frac{x^3\sqrt{2}}{128} ----$$

$$= \sqrt{2}\,(1 + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128})$$

สำหรับ $-2<x<2$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.4.2 จงหาสี่เทอมแรกของ $(x+y)^{-1}$

วิธีทำ

$$(x+y)^{-1} = x^{-1} + (-1)\,x^{-1-1}y + \frac{(-1)\,(-2)}{2!}\,x^{-1-2}y^2$$

$$+ \frac{(-1)\,(-2)}{3!}\,(-3)\,x^{-1-3}y^3 + ---$$

$$= x^{-1} - x^{-2}y + \frac{2}{2!}\,x^{-3}y^2 - \frac{6}{3!}\,x^{-4}y^3 ----$$

$$= x^{-1} - x^{-2}y + x^{-3}y^2 - x^{-4}y^3$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 6.4

ข้อ 1-5 จงหาสี่เทอมแรกของ

1. $(x-y)^{-1}$
2. $(a+b)^{-2}$
3. $(a-x)^{-1}$
4. $(b+3x)^{-4}$
5. $(x-2)^{-2}$
6. $(3a-4)^{-4}$
7. $(x^3+y^2)^{-1}$

8. $(x^{-2} + x)^{-3}$

9. $(x + y)^{-5}$

10. $(x^{-1} - x^{-2})^{-1}$

11. $(1 + x)^{1/2}$

12. $(8 - x)^{1/3}$

13. $(27 - x^3)^{-1/3}$

14. $(4 + x)^{-1}$

15. $(16 - x^2)^{1/4}$