บทที่ 5
เมตริกซ์ (Matrices)

5.1 คำนำ

ในชีวิตประจำวันเราจะพบกับกลุ่มของจำนวนที่นำมาเรียงกันเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก เช่น การบอกราคา ไข่ไก่ และไข่เป็ด

	เล็ก	กลาง	ใหญ่
ไข่ไก่	10	12	16
ไข่เป็ด	11	13	17

ตารางที่ 1

ราคาขายคิดราคาต่อโหล

หรือตารางที่ 2 แสดงยอดนักศึกษาปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ที่สมัครเรียนในแต่ละวัน เช่น

	10 พ.ค.	11 พ.ค.	12 พ.ค.	13 พ.ค.
คณิตศาสตร์	10	15	9	21
สถิติ	9	16	10	15
เคมี	50	45	49	59
ชีวะ	45	50	42	49
ฟิสิกส์	11	14	8	7

ตารางที่ 2

จากตารางที่ 1 และตารางที่ 2 ถ้าเรานำแต่เฉพาะจำนวนตัวเลขต่าง ๆ มาเขียนเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยเขียนไว้ภายในสัญลักษณ์ [ ] เราเรียกว่า เมตริกซ์ (Matrices) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 11 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$ อ่านว่า เมตริกซ์ A

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 & 21 \\ 9 & 16 & 10 & 15 \\ 50 & 45 & 49 & 59 \\ 45 & 50 & 42 & 49 \\ 11 & 14 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$ อ่านว่า เมตริกซ์ B

จากเมตริกซ์ A

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 11 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$

จำนวนตามแนวนอน เช่น 10, 12, 16 เรียกว่าแถว (Row)

จำนวนตามแนวยืน เช่น 10 เรียกว่า คอลัมน์ (Column)

11

จากเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ (Matrices) ที่มี 2 แถว และ 3 คอลัมน์

เราเรียกเมตริกซ์นี้มีขนาด 2 by 3 หรือ 2×3

นิยาม 5.1.1 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็บวก : จำนวนหรือฟังก์ชันที่จัดเรียงเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีจำนวน m แถว (Row) และ n คอลัมน์ (Columnn) ภายในสัญลักษณ์ [ ] เรียกว่าเมตริกซ์ (Matrices) ที่มีขนาด m by n หรือ $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือ $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$

ถ้าสมาชิกทุกตัวภายในสัญลักษณ์ [ ] เป็นศูนย์ (0) เราเรียกเมตริกซ์ (Matrices) นั้นว่า เมตริกซ์ศูนย์ (Null matrix) และใช้สัญลักษณ์ 0 แทน

ดรรชนีล่าง (Subscipt) i ของสมาชิกตัวที่ a_{ij} หมายถึงแถวที่สมาชิกตัวที่ a_{ij} อยู่ และดรรชนีล่าง j ของสมาชิกตัวที่ a_{ij} หมายถึงคอลัมน์ที่สมาชิกตัวที่ a_{ij} อยู่ ดังนั้น ดรรชนีล่าง ij ก็แสดงถึงตำแหน่งของสมาชิกตัวนั้น ว่าอยู่แถวและคอลัมน์ที่เท่าไร

เมตริกซ์ (Matrices) ที่มีสมาชิกอยู่ m แถว และ n คอลัมน์ เรียกว่าเป็นเมตริกซ์ขนาด m by n หรือ $m \times n$ โดยจำนวนที่แสดงจำนวนแถวจะต้องอยู่หน้า และจำนวนที่แสดงจำนวนคอลัมน์จะต้องอยู่หลัง

ถ้า $m = n$ นั้นคือจำนวนแถว เท่ากับจำนวนคอลัมน์ เราเรียกเมตริกซ์ (Matrices) นั้นว่า เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) ขนาด n (Order n) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3

บ่อยครั้งที่เราเขียนแสดงเมตริกซ์ A ขนาด m by n

โดย $A = [a_{ij}]_{(m,\ n)}$ ซึ่ง $i = 1, 2, 3, ..., m$ และ $j = 1, 2, 3, ..., n$

เช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

เราเขียนได้เป็น $A = [a_{ij}]_{(2,\ 3)}$

นิยาม 5.1.2 เมตริกซ์ (Matrices) สองเมตริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน เช่น

$A = [a_{ij}]_{(m,\ n)}$ และ $B = [b_{ij}]_{(m,\ n)}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อ

$a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ i และ j (นั้นคือสมาชิกที่อยู่ในแถว (Row)

และคอลัมน์ (column) ที่สมนัยกันเท่ากัน)

ตัวอย่าง 5.1.1

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{4} & 2 \\ \frac{6}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์ $A = B$

b) $C = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

เมตริกซ์ $C = D$ เมื่อ $x = 2$

C) $E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์ $E \neq F$ เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x-y & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้น สมาชิกที่อยู่ในแถว และคอลัมน์ที่สมนัยกันจะเท่ากัน นั้นคือ

$$x+y = 3 \qquad \text{..........(1)}$$

$$x-y = -1 \qquad \text{..........(2)}$$

สมการ (1) + (2)

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

แทนค่า x ในสมการ (1)

$$1+y = 3$$

$$y = 3-1$$
$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$

$y = 2$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} 1 & x^2+y^2 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2xy & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้นสมาชิกที่อยู่ในแถว และคอลัมน์ที่สมนัยกันเท่ากัน นั้นคือ

$$x^2+y^2 = 1 \quad \text{......(1)}$$
$$-2xy = 0 \quad \text{......(2)}$$
$$x+y = 1 \quad \text{......(3)}$$

จากสมการ (1)+(2) $x^2+y^2-2xy = 1$

$$x^2-2xy+y^2 = 1$$
$$(x-y)^2 = 1$$
$$x-y = \pm 1$$

ถ้า $x-y = 1$ ......(4)

หรือ $x-y = -1$ ......(5)

สมการ (3)+(4)

$$x+y+x-y = 2$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

แทนค่า x ในสมการ (3)

$$1+y = 1$$
$$y = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 1,\ y = 0$ ......(6)

ถ้าสมการ (3) + (5)

$$x+y+x-y = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

แทนค่า ในสมการ (1)

$$0^2+y^2 = 1$$

$$y^2 = 1$$

$$y = 1, -1$$

ถ้าแทนค่า x ในสมการ (2)

y จะหาค่าไม่ได้

ถ้าแทนค่า x ในสมการ (3)

$$0+y = 1$$

$$y = 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 0,\ y = 1$ หรือ -1 ......(7)

จากสมการ (6) แทนค่า $x = 1,\ y = 0$ ในสมการ (1), (2) และ (3) ซึ่งเป็นจริงทั้งสามสมการ

เพราะฉะนั้น $x = 1,\ y = 0$ **ตอบ**

จากสมการ (7) แทนค่า $x = 0,\ y = 1$ ในสมการ (1), (2) และ (3) ซึ่งเป็นจริงทั้งสามสมการ

เพราะฉะนั้น $x = 0,\ y = 1$ **ตอบ**

จากสมการ (7) แทนค่า $x = 0, y = -1$ ในสมการ (1), (2) และ (3) จะพบว่าถ้าแทนในสมการ (3) จะได้ว่า $0+(-1) = 1$ ซึ่งไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x = 0, y = -1$ ไม่ใช่ค่าที่จะทำให้เมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน

ตอบ

หมายเหตุ การแก้สมการเพื่อหาค่าตัวไม่ทราบค่าที่เป็นสมาชิกของเมตริกซ์ซึ่งกำหนดให้ทั้งสองเมตริกซ์เท่ากันนั้น เมื่อแก้สมการหาค่าตัวไม่ทราบค่า แล้ว

ลองนำเอาค่าที่หาได้ไปแทนตัวไม่ทราบค่าแล้ว ทำให้ทั้งสองเมตริกซ์เท่ากันค่าที่ได้ก็จะเป็นคำตอบ

ตัวอย่าง 5.1.4 จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ xy & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้นสมาชิกที่อยู่ในแถวและคอลัมน์ที่สมนัยกัน เท่ากันนั้นคือ

$$x+y = -1 \qquad \text{......(1)}$$

$$xy = -2 \qquad \text{......(2)}$$

จากสมการ (1)

$$x = -1-y$$

แทนค่า x ในสมการ (2)

$$(-1-y)\,y = -2$$
$$-y-y^2 = -2$$
$$-y^2-y+2 = 0$$
$$y^2+y-2 = 0$$
$$(y+2)(y-1) = 0$$

ถ้า $y+2 = 0$

$$y = -2$$

ถ้า $y-1 = 0$

$$y = 1$$

แทนค่า $y = -2$ ในสมการ (1)

$$x+(-2) = -1$$
$$x = 2-1$$
$$= 1$$

แทนค่า $y = 1$ ในสมการ (1)

$$x+1 = -1$$
$$x = -1-1$$
$$= -2$$

เพราะฉะนั้น

$$y = -2,\ x = 1 \qquad \text{......(3)}$$
$$y = 1,\quad x = -2 \qquad \text{......(4)}$$

จากสมการ (3) แทนค่า $y = -2, x = 1$ ในสมการ (1) และ (2) ซึ่งเป็นจริงทั้งสองสมการ

เพราะฉะนั้น $x = 1, y = -2$ **ตอบ**

จากสมการ (4) แทนค่า $y = 1, x = -2$ ในสมการ (1) และ (2) ซึ่งเป็นจริงทั้งสองสมการ

เพราะฉะนั้น $x = -2, y = 1$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.1.5 จงหาค่า x, y และ z ถ้า

$$\begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & y+z \\ 1 & z+x \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้นสมาชิกที่อยู่ในแถว และคอลัมน์ที่สมนัยกันเท่ากัน นั้นคือ

$$x+y = 3 \qquad \text{......(1)}$$
$$y+z = 5 \qquad \text{......(2)}$$
$$z+x = 4 \qquad \text{......(3)}$$

สมการ (1)+(2)+(3)

$$x+y+y+z+z+x = 3+5+4$$
$$2x+2y+2z = 12$$

$x+y+z = 6$ เอา 2 หารตลอด (4)

สมการ (4) – (1)

$$z = 3$$

สมการ (4) – (2)

$$x = 1$$

สมการ (4) – (3)

$$y = 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$

$$y = 2$$

$$z = 3$$ ตอบ

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงบอกขนาดของเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E = [\,1+2+3\,]$$

2. จงเขียนเมตริกซ์ $[\,a_{ij}\,]_{(2,\ 3)}$ ซึ่งมีสมาชิก

$a_{13} = 3,\ a_{22} = 4,\ a_{11} = 5,\ a_{23} = 6,\ a_{12} = 7,\ a_{21} = 8$

3. ถ้า $[a_{ij}]_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

a_{12}, a_{23} และ a_{13}

4. จงหาค่า x และ y

4.1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

4.2) $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 9 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & x \end{bmatrix}$

4.3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 4 \\ 3 & x-y \end{bmatrix}$

4.4) $\begin{bmatrix} 1 & 2x+y \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ x-3y & 2 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่า x, y และ z

5.1) $\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$

5.2) $\begin{bmatrix} x-y & -4 \\ 0 & y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.3) $\begin{bmatrix} x+2y & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & y+2x \\ z+2x & 5 \end{bmatrix}$

5.2 การบวกเมตริกซ์ (Matrices addition) และการคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลา (Scalars Multiplicotion)

การที่จะบวกเมตริกซ์สองเมตริกซ์เข้าด้วยกันนั้น เมตริกซ์ทั้งสองจะต้องมีขนาดเท่ากัน เวลาบวกกันเอาสมาชิกตัวที่สมนัยกันบวกกัน (นั่นคือตัวที่อยู่บนแถว และคอลัมน์เดียวกันบวกกัน)

นิยาม 5.2.1 กำหนด $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ และ

$B = [b_{ij}]_{m,n)}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n

ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B คือ

$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{(m,n)}$ มีขนาด m by n

ตัวอย่าง 5.2.1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

จงหาค่า A + B

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.2.2

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า C + D

วิธีทำ

$$C+D = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 & 3+3 \\ 4+4 & 5+3 & 2+1 \\ 2+3 & 3+2 & 1+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ตอบ

นิยาม 5.2.2 ให้ $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n c เป็นจำนวนสเกลา แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{(m,n)}$ และ $Ac = [a_{ij}c]_{(m,n)}$

จากนิยามเราพบว่า เราเอาสเกลา c คูณกับสมาชิกทุก ๆ ตัวของเมตริกซ์นั้น

ตัวอย่าง 5.2.3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ จงหาค่า cA และ Ac

วิธีทำ

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

และ $$Ac = \begin{bmatrix} a_{11}c & a_{12}c \\ a_{21}c & a_{22}c \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.2.4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ จงหาค่า 2B

วิธีทำ

$$2B = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 3 & 2\times 0 & 2\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.2.5 $C = [1 \quad 2 \quad 3]$ จงหาค่า $-C$

วิธีทำ

$$-C = (-1)C$$
$$= [(-1)\times 1(-1)\times 2(-1)\times 3]$$
$$= [-1 \quad -2 \quad -3]$$

หมายเหตุ $-C = (-1)C$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.2.6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

จงหาค่า $A+B$ และ $B+A$

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{:1}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

ตอบ

$$B+A = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}a_{23} \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 5.2.6 เพราะว่า

$a_{11}+b_{11} = b_{11}+a_{11}$, $a_{12}+b_{12} = b_{12}+a_{12}$, $a_{13}+b_{13} = b_{13}+a_{13}$

$a_{21}+b_{21} = b_{21}+a_{21}$, $a_{22}+b_{22} = b_{22}+a_{22}$, $a_{23}+b_{23} = b_{23}+a_{23}$

เพราะฉะนั้น

$$A+B = B+A$$

หมายเหตุ ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด m by n แล้ว

$A+B = B+A$ (กฎการสลับที่)

ตัวอย่าง 5.2.7 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ถ้า c เป็นจำนวนสเกลา จงหาค่า

c(A+B) และ cA+cB

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c(A+B) = \begin{bmatrix} c(a_{11}+b_{11}) & c(a_{12}+b_{12}) \\ c(a_{21}+b_{21}) & c(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}+cb_{11} & ca_{12}+cb_{12} \\ ca_{21}+cb_{21} & ca_{22}+cb_{22} \end{bmatrix}$$

$$cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

$$cB = c\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $cA+cB = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}+cb_{11} & ca_{12}+cb_{12} \\ ca_{21}+cb_{21} & ca_{22}+cb_{22} \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 5.2.7 จะได้ว่า

$c(A+B) = cA+cB$

หมายเหตุ ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n และ c: เป็นสเกลา แล้ว

$c(A+B) = cA+cB$

ตัวอย่าง 5.2.8 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

จงหาค่า (A+B)+C และ A+(B+C)

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

$$B+C = \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

จากตัวอย่าง 5.2.8 จะได้ว่า

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

หมายเหตุ ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n แล้ว

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = A+(B+C)$$

(กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)

นิยาม 5.2.3 เมตริกซ์ $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)}$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์และใช้สัญลักษณ์ $\mathbf{0}$ แทนเมตริกซ์ศูนย์

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์ศูนย์

ตัวอย่าง 5.2.9 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า $\mathbf{A}+0$ และ $O+A$

วิธีทำ

$$a+0 = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ตอบ

$$0+A = \begin{bmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ตอบ

จากตัวอย่าง 5.2.9 จะได้ว่า

$A+0 = 0+A = A$

หมายเหตุ ถ้า A และ 0 เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n แล้ว

$A+0 = 0+A = A$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

จากข้อ 1 ถึง 6 จงหาผลบวกของเมตริกซ์ แต่ละคู่

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $[1 \quad 2 \quad 5]$, $[2 \quad 0 \quad 1]$

4. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[1 \quad 0 \quad 1]$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าต่อไปนี้

7.1 $3A$

7.2 $-2B$

7.3 $-A$

7.4 $A+3B$

7.5 $\frac{1}{2}B-2A$

7.6 จงหา C ถ้า $B+C = A$

5.3 การคูณระหว่างเมตริกซ์ (Mulitiplication of Matrices)

นิยาม 5.3.1 ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 1 by p

B เป็นเมตริกซ์ขนาด p by 1

ผลคูณของ $AB = C$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 1 by 1 เช่น

$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \ldots \quad a_{1p}]$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ . \\ . \\ . \\ b_{p1} \end{bmatrix}$$

$$C = AB$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{p1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1p}b_{p1}]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}\right]$$

จากนิยามพบว่าจำนวนคอลัมน์ของตัวตั้ง จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ

ตัวอย่าง 5.3.1 $A = [1 \quad 2 \quad 3]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า AB

วิธีทำ

$$AB = [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= [(1 \times 2) + (2 \times 1) + (3 \times 3)]$$

$$= [2 + 2 + 9]$$

$$= [13]$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.3.2 $A = [1 \quad 2]$

$$B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

และ $AB = [3]$ จงหาสมการเชิงเส้น

วิธีทำ

$$[1 \quad 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [3]$$

$$[(1 \times x) + (2 \times y)] = [3]$$

$$[x + 2y] = [3]$$

เพราะฉะนั้น $x + 2y = 3$ จากการเท่ากันของเมตริกซ์สองเมตริกซ์

สมการ $x + 2y = 3$ เป็นสมการเชิงเส้น [linear equation] ซึ่งจากสมการนี้เราสามารถเขียนกลับไปเป็นผลคูณของเมตริกซ์สองเมตริกซ์ได้เช่นกัน

นั่นคือ $x + 2y = 3$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$[1 \quad 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [3]$$

โดย $[1 \quad 2]$ คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปร, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ คือตัวแปรและ $[3]$ คือ ตัวคงที่ของสมการเชิงเส้น

นิยาม 5.3.2 ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด m by p และ B เป็นเมตริกซ์ ขนาด p by n ผลคูณของเมตริกซ์ $AB = C$ เป็นเมตริกซ์ขนาด m by n ซึ่งสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของ C คือ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

จากนิยามพบว่าจำนวนคอลัมน์ของตัวตั้ง (A) จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ (B) และผลคูณ $AB = C$ จะมีขนาด m by n และ c_{ij} เป็นสมาชิก แถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ C ซึ่งเท่ากับผลรวมของผลคูณของสมาชิกที่สมนัยกันของแถวที่ i ของ A กับคอลัมน์ที่ j ของ B นั้นคือ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

ซึ่งสามารถเขียนแสดงโดย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

ตัวอย่าง 5.3.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

จงหาค่า AB

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-3)+2(2) & 1(1)+2(4) \\ -2(-3)+3(2) & -2(1)+3(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+4 & 1+8 \\ 6+6 & -2+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.3.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่า AB

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 3)+(2\times 1) & (1\times 2)+(2\times 1) & (1\times 4)+(2\times 2) \\ (2\times 3)+(1\times 1) & (2\times 2)+(1\times 1) & (2\times 4)+(1\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & 2+2 & 4+4 \\ 6+1 & 4+1 & 8+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

ตอบ

พิจารณา BA ซึ่งหาค่าไม่ได้ เพราะว่าคอลัมน์ของ B (เท่ากับ 3) ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A (เท่ากับ 2)

เพราะฉะนั้นเราจะทราบว่า $AB \neq BA$ นั้นคือ การคูณของเมตริกซ์ไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่

ตัวอย่างที่ 5.3.5 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า AB

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+(-2)1 & 1(2)+(-2)1 \\ (-1)2+2(1) & (-1)2+2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตอบ

จากตัวอย่าง 5.3.5 จะพบว่า

AB = 0 แต่ A $\neq$ 0 และ B $\neq$ 0

หมายเหตุ ถ้าเมตริกซ์ AB = 0 แล้ว A และ B ไม่จำเป็นจะต้องเป็นเมตริกซ์ 0

ตัวอย่าง 5.3.6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า AC และ BC แล้ว AC = BC หรือไม่

วิธีทำ

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2 & -2+4 \\ 3+1 & 6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1 & 0+2 \\ 0+4 & 0+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

และ AC = BC **ตอบ**

จากตัวอย่าง 5.3.6 จะพบว่า

เมื่อ AC = BC แล้ว A และ B ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

หมายเหตุ ถ้าเมตริกซ์ AC = BC และ A และ B ไม่จะเป็นจะต้องเท่ากัน

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้นสมาชิกที่อยู่ในแถวและคอลัมน์ที่สมนัยกันจะเท่ากัน

$$x+2y = -1 \qquad \ldots\ldots. (1)$$

$$2x+3y = -1 \qquad \ldots\ldots. (2)$$

เอา $2\times(1)$ $2x+4y = -2$ .... (3)

เอา $(3)-(2)$

$$y = -1$$

แทนค่า y ในสมการ (1)

$$\begin{aligned} x &= -1-2y \\ &= -1-2(-1) \\ &= -1+2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x = 1, y = -1$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.3.8 จงหาค่า x, y และ z ถ้า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2y-2z \\ 2x-z \\ 2x-4y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เพราะฉะนั้นสมาชิกที่อยู่แถวและคอลัมน์ที่สมนัยกันจะเท่ากัน จึงได้ว่า

$$x+2y-2z = -3 \qquad ....(1)$$

$$2x-z = -3 \qquad ....(2)$$

$$2x-4y+z = -1 \qquad ....(3)$$

เอา $2\times(1)$

$$2x+4y-4z = -6 \qquad ....(4)$$

สมการ $(4)+(3)$

$$4x-3z = -7 \qquad ....(5)$$

เอา $2\times(2)$

$$4x-2z = -6 \qquad ....(6)$$

สมการ $(6)-(5)$

$$z = 1$$

แทนค่า $z = 1$ ในสมการ (2)

$$2x-1 = -3$$

$$2x = -3+1$$

$$2x = -2$$
$$x = -1$$

แทนค่า $x = -1$ และ $z = 1$ ในสมการ....... (1)

$$-1+2y-2(1) = -3$$
$$2y-3 = -3$$
$$2y = -3+3$$
$$2y = 0$$
$$y = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -1, y = 0$ และ $z = 1$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

11. จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

12. จงหาค่า x และ y ถ้า

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

13. จงหาค่า x, y และ z ถ้า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. จงหาค่า x, y และ z ถ้า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5.4 ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinonts)

ถ้าเมตริกซ์ A มีขนาด n by n นั้นคือมีแถวและคอลัมน์เท่ากัน เราเรียกว่า เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) เช่น

$$\text{เมตริกซ์ } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ เมตริกซ์ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง เมตริกซ์ A มีขนาด 2 by 2

และเมตริกซ์ B มีขนาด 3 by 3

จากเมตริกซ์จัตุรัส สมาชิกตัวที่ a_{ij} ซึ่ง $i = j$ เช่น $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots a_{nn}$ เรียกว่า Main diagonal เช่น

$$\text{เมตริกซ์ } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Main diagonal คือ 1, 2, 3

จากเมตริกซ์จัตุรัสจะศึกษาเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของเมตริกซ์ขนาด n by n เช่น

$$\text{เมตริกซ์ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนท์ของ เมตริกซ์ A ใช้สัญลักษณ์ $|A|$ ซึ่ง

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

นั้นคือ เอา a_{11} คูณลงมา a_{22} มีค่าบวก

เอา a_{21} คูณขึ้นไป a_{12} มีค่าลบ

หมายเหตุ คูณลงเป็นบวก, คูณขึ้นเป็นลบ

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-7)-(3)(5)$$

$$= -22$$

ตอบ

ถ้าเมตริกซ์ A มีขนาด 3 by 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A คือ

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

การคำนวณเรานำคอลัมน์ที่ 1 มาเขียนต่อจากคอลัมน์ที่ 3 เป็นคอลัมน์ที่ 4 และนำคอลัมน์ที่ 2 เขียนต่อจากคอลัมน์ที่ 4 เป็นคอลัมน์ที่ 5 แล้วหาดีเทอร์มิแนนท์

ตัวอย่าง 5.4.2 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

$$= 1(1)(3) + 2(2)(4) + 1(3)(2) - 4(1)(1) - 2(2)(1) - 3(3)(2)$$

$$= 3 + 16 + 6 - 4 - 4 - 18$$

$$= -1$$ **ตอบ**

ถ้าเมตริกซ์ A มีขนาดมากกว่า 3 แล้วการหาดีเทอร์มิแนนท์ ไม่อาจหาได้โดยวิธีนี้ซึ่งต้องใช้วิธีอื่น และจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 5.4.3 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0(3)(2) + 0(-2)(0) + 0(1)(-1) - 0(3)(0) - (-1)(-2)(0)$$
$$-2(1)(0)$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 0$$ **ตอบ**

จากตัวอย่าง 5.4.3 จะพบว่าสมาชิกบนแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์ทุกตัว เวลาหา |A| จะมีค่าเป็นศูนย์

หมายเหตุ ถ้าสมาชิกบนแถว (คอลัมน์) ใดแถว (คอลัมน์) หนึ่งของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์ทุกตัวแล้ว |A| = 0

ตัวอย่าง 5.4.4 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 1(2)(2)+2(3)(-2)+3(1)(1)-(-2)(2)(3)-1(3)(1)-2(1)(2)$$

$$= 4-12+3-(-12)-3-4$$

$$= 4-12+3+12-3-4$$

$$= 0$$ **ตอบ**

จากตัวอย่าง 5.4.4 จะพบว่าสมาชิกของแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 เหมือนกัน ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์

หมายเหตุ ถ้าสมาชิกบนแถว (คอลัมน์) สองแถว (คอลัมน์) ของเมตริกซ์ A เหมือนกัน แล้ว $|A| = 0$

ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า $|AB|$ และ $|A|\,|B|$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 3+10 \\ 6-1 & 9-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4(4) - 5(13)$$

$$= 16 - 65$$

$$= -49$$ **ตอบ**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) - 3(2)$$

$$= -1 - 6$$

$$= -7$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 1(3)$$

$$= 10 - 3$$

เพราะฉะนั้น

$$|A|\,|B| = -7(7)$$

$$= -49$$ **ตอบ**

ข้อสังเกต $|AB| = |A|\,|B|$

แบบฝึกหัด 5.4

จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -9 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

18. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า $|AB|$

19. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า $|AB|$

5.5 การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ขนาด n ใด ๆ สำหรับ $n \geqslant 2$

เพื่อที่จะหาดีเทอร์มิแนนท์สำหรับเมตริกซ์ขนาด n by n สำหรับ $n \geqslant 2$ นั้น ก่อนอื่นควรทราบความหมายของคำบางคำเสียก่อน

นิยาม 5.5.1 ถ้าบางแถวหรือคอลัมน์ (หรือทั้งแถวและคอลัมน) ของเมตริกซ์ A ถูกขีดฆ่าไป แล้วนำสมาชิกที่เหลือมาเขียนเป็นเมตริกซ์ใหม่เรียกว่า ซับเมตริกซ์ (submatrix) ของเมตริกซ์ A

ตัวอย่าง 5.5.1 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาซับเมตริกซ์ของ A

วิธีทำ ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 1 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[3 \quad 4]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 2 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[1 \quad 2]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าคอลัมน์ที่ 1 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าคอลัมน์ที่ 2 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[4]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[3]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 2 และคอลัมน์ที่ 1 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[2]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A

ถ้าขีดฆ่าแถวที่ 2 และคอลัมน์ที่ 2 ทิ้ง แล้ว

เมตริกซ์ $[1]$ เป็นซับเมตริกซ์ของ A **ตอบ**

นิยาม 5.5.2 ไมเนอร์ (Minor) ของสมาชิก a_{ij} ของเมตริกซ์จัตุรัส A $(n > 2)$ คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของซับเมตริกซ์ (submatrix) ของเมตริกซ์ A โดยขีดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ทิ้งไป

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาไมเนอร์ของ a_{11} ของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ไมเนอร์ของ $a_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix} = |a_{22}| = a_{22}$ **ตอบ**

หมายเหตุ ขีดแถวที่ 1 กับคอลัมน์ที่ 1 ทิ้งไปจะเหลือ a_{22} เพียงตัวเดียว แล้วหาดีเทอร์มิแนนท์ของ a_{22}

ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาไมเนอร์ของ 3 ของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ไมเนอร์ของ 3 $= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

$$= |-9|$$

$$= -9$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.5.4 จงหาไมเนอร์ ของสมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ไมเนอร์ของ 4 $= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 18 - 42 = -24$$ **ตอบ**

ไมเนอร์ของ 5 $= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 6 - 0 = 6$$ **ตอบ**

ไมเนอร์ของ 1 $= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

$$= 21 - 0 = 21$$ **ตอบ**

ไมเนอร์ของ 3 $= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 10 - 7 = 3$$ **ตอบ**

$$\text{ไมเนอร์ของ } 9 = \begin{vmatrix} 4 & \cancel{5} & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{6} \\ 0 & \cancel{7} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8-0 = 8$$ **ตอบ**

$$\text{ไมเนอร์ของ } 6 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & \cancel{1} \\ \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{6} \\ 0 & 7 & \cancel{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 28-0 = 28$$ **ตอบ**

$$\text{ไมเนอร์ของ } 0 = \begin{vmatrix} \cancel{4} & 5 & 1 \\ \cancel{3} & 9 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 30-9 = 21$$ **ตอบ**

$$\text{ไมเนอร์ของ } 7 = \begin{vmatrix} 4 & \cancel{5} & 1 \\ 3 & \cancel{9} & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 24-3 = 21$$ **ตอบ**

$$\text{ไมเนอร์ของ } 2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & \cancel{1} \\ 3 & 9 & \cancel{6} \\ \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 36-15 = 21$$ **ตอบ**

นิยาม 5.5.3 โคเฟกเตอร์ (cofactor) ของสมาชิก a_{ij} ของเมตริกซ์จัตุรัส $A(n \geqslant 2)$ คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ กับไมเนอร์ของ a_{ij} ซึ่งใช้สัญลักษณ์ A_{ij}

ตัวอย่าง 5.5.5 จงหาโคเฟกเตอร์ของ a_{11}, a_{12} และ a_{13} ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (1)\,(a_{22}a_{23} - a_{32}a_{23}) \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)\,(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (1)\,(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \quad \textbf{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 5.5.6 จงหาโคแฟกเตอร์ของ สมาชิกแต่ละตัวของดีเทอร์มิแนนท์ที่กำหนดให้

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-2) = 2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,(6-4) = -2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-8) = -2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,(8-10) = 2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-20) = -18 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,(2-16) = 14 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(4-10) = -6 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\,(1-15) = 14 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (1)\,(2-12) = -10 \quad \textbf{ตอบ}$$

แบบฝึกหัด 5.5

จงหาซับเมตริกซ์ของเมตริกซ์

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

จงหาไม่เนอร์ และโคเฟกเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัวของดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \end{vmatrix}$

5.6 การกระจายดีเทอร์มิแนนท์ด้วยโคเฟกเตอร์

ตัวอย่าง 5.6.1 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}) - a_{11}(a_{32}a_{23})$$
$$+ a_{12}(a_{31}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32}) - a_{13}(a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}) - a_{11}(a_{32}a_{23})$$
$$- a_{12}(a_{21}a_{33}) + a_{12}(a_{31}a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32}) - a_{13}(a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$ **ตอบ**

จากตัวอย่าง 5.6.1

$$|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

นั่นคือดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A เท่ากับ ผลรวมของผลคูณของ

a_{11} คูณกับ โคเฟกเตอร์ของ a_{11}

a_{12} คูณกับ โคเฟกเตอร์ของ a_{12}

a_{13} คูณกับ โคเฟกเตอร์ของ a_{13}

เป็นการหาดีเทอร์มิแนนท์ โดยการกระจายโคเฟกเตอร์ด้วยแถวที่ 1

ซึ่งจะใช้แถวที่ 2 หรือแถวที่ 3 ก็ได้ ซึ่งจะได้ค่าเท่ากัน

ในทำนองเดียวกัน เราจะใช้คอลัมน์ที่ 1 ที่ 2 หรือที่ 3 ก็ได้จะได้ค่าดีเทอร์มิแนนท์ เท่ากันเสมอ

ทฤษฎีบท 5.6.1 ถ้า $A = [a_{ij}]_{(n,\,n)}$ เป็นเมตริกซ์ซึ่ง $n \geqslant 2$ แล้ว

$$|A| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

ซึ่ง $i = 1, 2, \ldots, n$

หรือ $|A| = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$

ซึ่ง $j = 1, 2, \ldots, n$

ทฤษฎีบทนี้จะไม่พิสูจน์ แต่จะนำไปใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ ของเมตริกซ์ขนาด n ใด ๆ สำหรับ $n \geqslant 2$

ตัวอย่าง 5.6.2 จงหาค่า $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ การกระจายด้วยแถวที่ 1

$$|A| = 1A_{11}+6A_{12}+2A_{13}$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\6 & 2\end{vmatrix} + 6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\2 & 6\end{vmatrix}$$

$$= 1(1)\ (0-12) + 6(-1)\ (6-4) + 2(1)\ (18-0)$$

$$= -12-12+36$$

$$= 12$$ **ตอบ**

ถ้ากระจายด้วยแถวที่ 2

$$|A| = 3A_{21} + 0A_{22} + 2A_{23}$$

$$= 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}6 & 2\\6 & 2\end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 6\\2 & 6\end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)\ (12-12) + 0(1)\ (2-4) + 2(-1)\ (6-12)$$

$$= 0+0+(-2)\ (-6)$$

$$= 12$$ **ตอบ**

หรือ ถ้ากระจายด้วยคอลัมน์ที่ 1

$$|A| = 1A_{11} + 3A_{21} + 2A_{31}$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}0 & 2\\6 & 2\end{bmatrix} + 3(-1)^{2+1}\begin{bmatrix}6 & 2\\6 & 2\end{bmatrix} + 2(-1)^{3+1}\begin{bmatrix}6 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$= 1(1)\ (-12) + 3(-1)\ (0) + 2(1)\ (12)$$

$$= -12+0+24$$

$$= 12$$ **ตอบ**

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 5.6.2 นี้จะพบว่า $|A|$ จะมีค่าเท่ากันเสมอ ไม่ว่าจะกระจายด้วยแถวหรือคอลัมน์ใด ๆ

ตัวอย่าง 5.6.3 จงหาค่า $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\3 & 0 & 0 & 2\\0 & 2 & 3 & 0\\2 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

วิธีทำ กระจายโดยแถวที่ 2

$$|A| = 3A_{21} + 0A_{22} + 0A_{23} + 2A_{24}$$

$$= 3A_{21} + 2A_{24}$$

$$= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

พิจารณา $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 2A_{12} + 0A_{13} = 2A_{12}$ กระจายโดยแถวที่ 1

$$= 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)(6) = -12 \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

และ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{31} + 0A_{32} + 1A_{33} = 2A_{31} + 1A_{33}$ กระจายโดยแถวที่ 3

$$= 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)(-4) + 1(1)(6-0) = -8 + 6$$

$$= -2 \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

แทนค่าสมการ (2) และ (3) ในสมการ (1) จะได้

$$|A| = -3(-12) + 2(-2)$$

$$= 36 - 4$$

$$= 32$$

ตอบ

หมายเหตุ จากเมตริกซ์ ขนาด 4 by 4 นี้ เมื่อหาดีเทอร์มิแนนท์ ด้วยการกระจายโคเฟกเตอร์ จะพบว่าไมเนอร์ของ a_{ij} ใด ๆ เป็นเมตริกซ์ ขนาด 3 by 3 ดังสมการที่ (1)

และจากไมเนอร์ของ a_{ij} ใด ๆ นี้ ใช้โคเฟกเตอร์กระจายหาค่าดีเทอร์มิแนนท์อีกที่หนึ่ง ดังสมการ (2) และสมการ (3)

ตัวอย่าง 5.6.4 จงหาค่า $|A|$ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ กระจายโดยแถวที่ 1

$$\begin{aligned}
|A| &= 1A_{11} + 2A_{12} + 1A_{13} \\
&= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1(10-8) - 2(-6-4) + 1(-12-10) \\
&= 1(2) - 2(-10) + 1(-22) \\
&= 2 + 20 - 22 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.6.5 จงหาค่า x ถ้ากำหนดให้

$$\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2(4) - 3(x) \\
&= 8 - 3x \qquad \text{....... (1)}
\end{aligned}$$

แต่ $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$8 - 3x = 0$$
$$-3x = -8$$
$$x = \frac{-8}{-3}$$
$$= \frac{8}{3}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.6.6 จงหาค่า x ถ้ากำหนดให้

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

วิธีทำ เพราะว่า $\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)-(-2)(4)$

$$= x^2 - 1 - (-8)$$
$$= x^2 - 1 + 8$$
$$= x^2 + 7 \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

แต่ $\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$x^2 + 7 = 0$$
$$x^2 = -7$$
$$x = \pm\sqrt{-7}$$

เพราะฉะนั้น $x = \pm\sqrt{-7}$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.6.7 จงหาค่า x ถ้ากำหนด

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)A_{11} + 1A_{12} + 0A_{13}$$

กระจายโดยแถวที่ 1

$$= (x-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)[-2(x+2)-(-1)(-1)]+(-1)(-2)$$

$$= (x-1)(-2x-4-1)+2$$

$$= (x-1)(-2x-5)+2$$

$$= -2x^2-5x+2x+5+2$$

$$= -2x^2-3x+7 \qquad \ldots\ldots\, (1)$$

แต่ $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$-2x^2-3x+7 = 0$$

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(-2)(7)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{9+56}}{-4}$$

ตอบ

หมายเหตุ ถ้า $ax^2+bx+c = 0$ แล้วรากของ x คือ

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

เมื่อ a คือสัมประสิทธิ์ของ x^2

b คือสัมประสิทธิ์ของ x

c คือค่าคงที่

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A ด้วยการกระจายโคเฟกเตอร์ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 ด้วยคอลัมน์ที่ 1

1.2 ด้วยคอลัมน์ที่ 3

1.3 ด้วยแถวที่ 2

1.4 ด้วยแถวที่ 3

ข้อ 2 ถึง 11 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ ด้วยการกระจายโคเฟกเตอร์

2. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ข้อ 12 ถึง 19 จงหาค่า x เมื่อกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนท์ให้

12. $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

13. $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

14. $\begin{vmatrix} -x-4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

15. $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -x+2 \end{vmatrix} = 0$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & x+5 & 1 \\ 2 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 \\ 3 & 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

18. $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

19. $\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

5.7 คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

ก่อนจะกล่าวถึงคุณสมบัติ ควรจะทราบคำบางคำ เช่นคำว่าสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมตริกซ์ A

นิยาม 5.7.1 ให้ A เป็นเมตริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose) ของ A ใช้สัญลักษณ์ A^T คือเมตริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนจากแถวเป็นคอลัมน์ของเมตริกซ์ A นั้นคือแถวที่ i เปลี่ยนเป็นคอลัมน์ที่ i

ตัวอย่าง 5.7.1 จงหา A^T ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ **ตอบ**