นั่นคือ แถวที่ 1 ของ A เปลี่ยนเป็นคอลัมน์ที่ 1 ของ A^T

แถวที่ 2 ของ A เปลี่ยนเป็นคอลัมน์ที่ 2 ของ A^T

แถวที่ 3 ของ A เปลี่ยนเป็นคอลัมน์ที่ 3 ของ A^T

ตัวอย่าง 5.7.2 กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

จงหา B^T

วิธีทำ $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ที่จะกล่าวต่อไปนี้ ณ ที่นี้จะไม่มีการพิสูจน์ และจะนำเอาคุณสมบัติเหล่านี้ไปใช้ในการหาดีเทอร์มิแนนท์เลย

ข้อที่ 1 ดีเทอร์มิแนนท์ของ A^T มีค่าเท่ากับดีเทอร์มิแนนท์ของ A เมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส

$(|A^T| = |A|)$

ตัวอย่าง 5.7.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $|A| = |A^T|$

วิธีทำ เพราะ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$$

เพราะฉะนั้น $|A| = |A^T|$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.4 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ จงแสดงว่า $|A| = |A^T|$

วิธีทำ $|A| = 1A_{11} + 0A_{12} + 2A_{13}$ กระจายด้วยแถวที่ 1

$$= 1A_{11} + 2A_{13}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1)(1-9) + 2(1)(6-0)$$

$$= -8 + 12$$

$$= 4 \qquad \ldots\ldots. (1)$$

$|A^T| = 1A_{11} + 2A_{12} + 0A_{13}$ กระจายด้วยแถวที่ 1

$$= 1A_{11} + 2A_{12}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1)(1-9) + 2(-1)(0-6)$$

$$= 1(-8) + 2(6)$$

$$= -8 + 12$$

$$= 4 \qquad \ldots\ldots. (2)$$

เพราะฉะนั้น $|A| = |A^T|$ จาก (1) = (2)

ข้อที่ 2 ถ้าสมาชิกทุก ๆ ตัวของแถวหรือคอลัมน์ใด ๆ ของเมตริกซ์จัตุรัสเป็นศูนย์ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง 5.7.5 กำหนดให้ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ จงหา $|A|$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

เพราะว่าแถวที่ 2 เป็นศูนย์ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.6 กำหนดให้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา $|B|$

วิธีทำ

$|B| = 1A_{11} + 2A_{12} + 0A_{13}$ กระจายด้วยแถวที่ 1

$$\begin{aligned}
&= 1A_{11} + 2A_{12} \\
&= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1(1)(0-0) + 2(-1)(0-0) \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

เพราะว่า คอลัมน์ที่ 3 เป็นศูนย์ **ตอบ**

ข้อที่ 3 **ถ้าสลับแถวกันสองแถวหรือสลับคอลัมน์กันสองคอลัมน์ของเมตริกซ์จัตุรัสค่าของดีเทอร์มิแนนท์เท่ากันแต่เครื่องหมายต่างกัน**

ตัวอย่าง 5.7.6 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B เกิดจากการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของ A

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
|A| &= 1(4) - 3(2) \\
&= 4-6 \\
&= -2 \\
|B| &= 3(2) - 1(4)
\end{aligned}$$

$= 6-4$

$= -(-2)$

เพราะฉะนั้น $|A| = -|B|$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.7 กำหนด $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ D เกิดจากการสลับคอลัมน์ที่ 1 กับคอลัมน์ที่ 3 ของ C

วิธีทำ $|C| = 0A_{13} + 0A_{23} + 1A_{33}$ กระจายด้วยคอลัมน์ที่ 3

$= 1A_{33}$

$= 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1)(1-6)$

$= -5$

$|D| = 0A_{11} + 0A_{21} + 1A_{31}$ กระจายด้วยคอลัมน์ที่ 1

$= 1A_{31}$

$= 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(1)(6-1)$

$= 5$

$= -(-5)$

เพราะฉะนั้น $|C| = -|D|$ **ตอบ**

ข้อที่ 4 ถ้าแถวสองแถวหรือคอลัมน์สองคอลัมน์ของเมตริกซ์จัตุรัส มีสมาชิกตัวที่สมนัยกันเท่ากัน ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 5.7.8 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $|A|$

ซึ่งเมตริกซ์ A มีสมาชิกแถวที่ 1 เหมือนกับแถวที่ 2

วิธีทำ

$$|A| = 1(2) - 1(2)$$
$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $|A| = 0$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.9 กำหนด $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $|B|$

ซึ่งเมตริกซ์ B มีสมาชิกคอลัมน์ที่ 1 เหมือนกับคอลัมน์ที่ 3

วิธีทำ

$$|B| = 3A_{21} + 0A_{22} + 3A_{23}$$ กระจายด้วยแถวที่ 2

$$= 3A_{21} + 3A_{23}$$
$$= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-1)(3-2) + 3(-1)(2-3)$$
$$= -3 + 3$$

เพราะฉะนั้น $|B| = 0$ **ตอบ**

ข้อที่ 5 ถ้าเราคูณสมาชิกแต่ละตัวของแถว (คอลัมน์) หนึ่งแถว (คอลัมน์) ใดของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวน m แล้วค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์นั้นเท่ากับ $m|A|$

ตัวอย่าง 5.7.10 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(2) \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

B เกิดจากเอา 2 คูณสมาชิกทุก ๆ ตัวของแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A

วิธีทำ $|A| = 1(4) - 3(2)$

$= 4 - 6$

$= -2$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 2(4) - 3(4)$

$= 8 - 12$

$= -4$

$= 2(-2)$

เพราะฉะนั้น $|B| = 2|A|$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.11 กำหนด $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 2 & 1 \\ 3(3) & 1 & 2 \\ 3(2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง D เกิดจากเอา 3 คูณสมาชิกทุก ๆ ตัวของคอลัมน์ที่ 1 ของ C

วิธีทำ $|C| = 2A_{31} + 0A_{32} + 0A_{33}$ กระจายด้วยแถวที่ 3

$= 2A_{31}$

$= 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(1)(4-1)$

$= 6$

$|D| = 6A_{31} + 0A_{32} + 0A_{33}$ กระจายด้วยแถวที่ 3

$= 6A_{31}$

$$= 6(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(1)(4-1)$$

$$= 18$$

$$= 3(6)$$

เพราะฉะนั้น $|D| = 3|C|$ **ตอบ**

ข้อที่ 6 ถ้าเอาจำนวนคงที่คูณกับแถว (คอลัมน์) ที่ u ไปบวกกับแถว (คอลัมน์) ที่ v ของเมตริกซ์แล้วค่าของดีเทอร์มิแนนท์ไม่เปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 5.7.12 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

แถวที่ 2 ของ B เกิดจากเอา 2 คูณแถวที่ 1 ของ A บวกกับแถวที่ 2 ของ A เขียนสัญลักษณ์ว่า $2R_1 + R_2$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4) - 3(2)$$

$$= 4 - 6$$

$$= -2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(8) - 5(2)$$

$$= 8 - 10$$

$$= -2$$

$|A| = |B|$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.13 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

คอลัมน์ที่ 1 ของ B เกิดจากเอา 2 คูณคอลัมน์ที่ 3 ของ A บวกกับคอลัมน์ที่ 1 ของ $A(2C_3 + C_1)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
|A| &= 0A_{13} + 2A_{23} + 0A_{33} \\
&= 2A_{23} \\
&= 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1)(1-4) \\
&= 6 \\
|B| &= 0A_{13} + 2A_{23} + 0A_{33} \\
&= 2A_{23} \\
&= 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1)(1-4) \\
&= 2(-1)(1-4) \\
&= 6 \\
|A| &= |B|
\end{aligned}
$$

ตอบ

ข้อที่ 7 ถ้าแถว (คอลัมน์) สองแถว (คอลัมน์) ของเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ เป็นสัดส่วนกันแล้วค่าของดีเทอร์มิแนนท์เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 5.7.14 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ซึ่งแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 เป็นสัดส่วนกัน

นั้นคือ แถวที่ 1 เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของแถวที่ 2 ($R_1 = \frac{1}{3}R_2$)

วิธีทำ

$$|A| = 1(6) - 3(2)$$
$$= 6 - 6$$
$$= 0$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.7.15 กำหนด $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

ซึ่งคอลัมน์ที่ 1 กับคอลัมน์ที่ 3 เป็นสัดส่วนกัน

นั้นคือคอลัมน์ที่ 1 เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ของคอลัมน์ที่ 3 ($C_1 = \frac{1}{2}C_3$)

วิธีทำ

$$|B| = 0A_{21} + 2A_{22} + 0A_{23}$$
$$= 2A_{22}$$
$$= 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2(1)(4-4)$$
$$= 0$$

ตอบ

ข้อที่ 8 ถ้าเขียนสมาชิกแต่ละตัวของแถว (คอลัมน์) หนึ่งแถว (คอลัมน์) ใด ๆ ของดีเทอร์มิแนนท์ อยู่ในรูปของผลบวกของเทอมสองเทอมหรือมากกว่าจะได้ค่าดีเทอร์มิแนนท์อยู่ในรูปผลบวกของดีเทอร์มิแนนท์สองดีเทอร์มิแนนท์หรือมากกว่า

ตัวอย่าง 5.7.16 จงแสดง

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+1) & (2+1) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ ให้ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4-3 = 1$ ......(1)

ให้ $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2-2 = 0$ ......(2)

ให้ $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2-1 = 1$ ......(3)

$|A| = |B|+|C|$

$1 = 0+1$

$= 1$ จาก (1), (2), (3)

ตอบ

ตัวอย่าง 5.7.17 จงแสดงว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อ 1 **ตอบ**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อที่ 3

$$= (-)(-)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อที่ 3

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.18 จงแสดง

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อที่ 1

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2(1) & 2(1) & 2(1) \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อที่ 5

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(0) & 2(2) & 2(1) \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ คุณสมบัติข้อที่ 5

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.7.19 จงแสดง

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ สลับ R_1 กับ R_2, คุณสมบัติข้อ 3

$$= (-)(-)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ สลับ C_2 กับ C_3, คุณสมบัติข้อ 3

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

สลับ R_2 กับ R_3, คุณสมบัติข้อ 4

หมายเหตุ C_2 หมายถึงคอลัมน์ 2

R_1 หมายถึงแถว 1

แบบฝึกหัด 5.7

ข้อ 1-3 ตอบว่าถูกหรือผิด พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} 2X & 3X & 4X \\ 5X & 6X & 7X \\ 8X & 9X & 10X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

ข้อ 4 ถึง15 จงพิสูจน์โดยใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

4. $$\begin{vmatrix} x+y & -z(x+y) \\ z+x & y(z+x) \end{vmatrix} = (x+y)\,(x+z)\,(y+z)$$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6. $$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x+y & x \\ x-y & 1 & 1 \\ x-y & 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

7. $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

8. $$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 2 & -5 & 10 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

10. $$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 10 & 15 & -3 \\ 18 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

11. $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 36 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

13. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

14. $$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

15. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5.8 การหาดีเทอร์มิแนนท์โดยใช้คุณสมบัติต่าง ๆ

เมื่อเรียนเกี่ยวกับคุณสมบัติต่าง ๆ ของดีเทอร์มิแนนท์จากหัวข้อที่แล้ว ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำเอาคุณสมบัติต่าง ๆ เหล่านั้นมาใช้หาดีเทอร์มิแนนท์ เพื่อจะลดความยุ่งยาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.8.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

จงหา $|A|$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} \quad -2R_1 + R_3$$

$= 2A_{13}$ โดยกระจายคอลัมน์ 3 โดยโคเฟกเตอร์

$$= 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)(-18-4)$$

$$= -44$$

ตอบ

หมายเหตุ พยายามทำแถว (คอลัมน์) หนึ่งแถว (คอลัมน์) ใดให้เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 5.8.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่า $|A|$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad 2R_1 + R_2$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 3R_1 + R_3$$

= $(-1)A_{11}$ กระจายคอลัมน์ 1 โดยโคเฟคเตอร์

$$= (-1) \quad (-1)^{“’} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \; (1) \; (15 - 5)$$

$$= (-1) \; (10)$$

$$= -10$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.8.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

จงหาค่า $|A|$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & & 2-5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad 1C_1 + C_4$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & -9 & 8 \end{vmatrix} \quad -2C_1 + C_3$$

$$= 1A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14}$$

$$= 1A_{11}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 5 \\ 2 & -9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 5 \\ 2 & -9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 19 \\ 0 & -9 & 15 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 2R_1 + R_2 \\ 1R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$= -2A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31}$$

$$= -2A_{11}$$

$$= (-2)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & 19 \\ -9 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(1)(-105 + 171)$$

$$= (-2)(66)$$

$$= -132$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.8.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงหาค่า $|A|$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad R_3 \longleftrightarrow R_5 \text{ คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$= -(-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad R_2 \longleftrightarrow R_3 \text{ คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} + 0A_{15}$$

$$= 1A_{11}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14}$$

$$= 1A_{11}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1)\ (1+0+0-0-0-0)$$

$$= 1$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.8

จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

5.9 อินเวอร์สของเมตริกซ์ (Inverse of a matrices)

นิยาม 5.9.1 เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่ง

$a_{ij} = 1$ สำหรับ $i = j$

และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$

จากนิยาม 5.9.1 เมตริกซ์เอกลักษณ์คือเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งสมาชิกตัวที่

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = \ldots = a_{nn} = 1$

ส่วนสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็นศูนย์หมด

ใช้สัญลักษณ์ I แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ เช่น

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2 by 2

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3 by 3

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4 by 4

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด n by n

นิยาม 5.9.2 สำหรับ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ใด ๆ แล้ว

$$AI = IA = A$$

ตัวอย่าง 5.9.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่า AI

วิธีทำ

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+2(0) 1(0)+2(1) \\ 3(1)+4(0) 3(0)+4(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= A$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.9.2 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า IA

วิธีทำ

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 2+0+0 & 3+0+0 \\ 0+4+0 & 0+5+0 & 0+6+0 \\ 0+0+7 & 0+0+8 & 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

ตอบ

นิยาม 5.9.2 Adjoint matrix A ใช้สัญลักษณ์ adj A ของเมตริกซ์จัตุรัส คือ สลับเปลี่ยน (Transpose) ของ โคเฟกเตอร์ของ A เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_{ij} สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$ คือ โคเฟกเตอร์ของ A

ตัวอย่าง 5.9.3 จงหา adj A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\ |4| & (-1)^{1+2}\ |3| \\ (-1)^{2+1}\ |2| & (-1)^{2+2}\ |1| \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.9.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

จงหาค่า adj A

วิธีทำ

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +(24-5)-(-12-15)+(-2-12) \\ -(18-4)+(6-12)-(1-9) \\ +(15-16)-(5+8)+(4+6) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 27 & -14 \\ -14 & -6 & 8 \\ -1 & -13 & 10 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 27 & -6 & -13 \\ -14 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

ตอบ

นิยาม 5.9.3 สำหรับเมตริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ ซึ่ง $|A| \neq 0$ แล้ว อินเวอร์ส (Inverse) ของเมตริกซ์ A ใช้สัญลักษณ์ A^{-1} คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

และถ้า A^{-1} เป็นอินเวอร์สของ A แล้ว $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ตัวอย่าง 5.9.5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่า A^{-1}

วิธีทำ

$$\begin{aligned} |A| &= 2(1) - 4(3) \\ &= 2 - 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{adj} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$

$$= \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$ **ตอบ**

หมายเหตุ ตรวจคำตอบดูว่า $AA^{-1} = I$ หรือไม่

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10}+\frac{12}{10} & \frac{6}{10}-\frac{6}{10} \\ -\frac{4}{10}+\frac{4}{10} & \frac{12}{10}-\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

เพราะว่า $A^{-1}A = I$ จริง แสดงว่า A^{-1} ที่หามาได้นั้นถูกต้องแล้ว

ตัวอย่าง 5.9.6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่า A^{-1}

วิธีทำ เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$ .... (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1A_{11} + (-2)A_{12} + 0A_{13}$ กระจายโดยแถวที่ 1

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1(1)(0-3) + (-2)(-1)(4+3)$

$= -3 + 2(7)$

$= -3 + 14$

$= 11$ .... (2)

$$\text{adj } A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^T \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(0-3)$$

$$= -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(4+3)$$

$$= -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2+0)$$

$$= 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-4 - 0)$$

$$= 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2+0)$$

$$= 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1-2)$$

$$= 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-6-0)$$

$$= -6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(3-0)$$

$$= -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(0+4)$$

$$= 4$$

แทนค่า A_{ij} สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$ ต่าง ๆ ในสมการ (3)

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -7 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{.......} (4)$$

แทนค่าสมการ (2) และ (3) ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -7 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

ตอบ

หมายเหตุ ตรวจคำตอบดูว่า $AA^{-1} = I$ หรือไม่

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

เพราะว่า $A^{-1}A = I$ จริง แสดงว่า A^{-1} นั้นถูกต้องแล้ว

เมื่อทราบการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด n by n ใด ๆ แล้ว สามารถนำอินเวอร์สนี้มาช่วยในการแก้สมการเชิงเส้น (linear equations)

สมมุติให้ $a_1x + b_1y = d_1$

$a_2x + b_2y = d_2$

ซึ่งสมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้

เป็น $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad \text{----}(1)$$

ให้ $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

แทนค่า M และ B ใน (1)

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$$

เอา M^{-1} คูณทั้งสองข้าง

$$M^{-1}M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}B$$

$$I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}B$$

ซึ่งสามารถหาค่า x และ y ได้ เนื่องจากเมตริกซ์ทางซ้ายมือ เท่ากับเมตริกซ์ทางขวามือ ดังนั้น สมาชิกตัวที่สมนัยกันจะเท่ากัน

ตัวอย่าง 5.9.6 จงแก้สมการ

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{T}$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

เอา $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ คูณทั้งสองข้างของ (1)

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}+\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}-\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3}+\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$

$y = 2$

เนื่องจากเมตริกซ์สองอันเท่ากันสมาชิกตัวที่สมนัยกันเท่ากัน **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.9.7 จงแก้สมการ

$$\begin{aligned} 2x+y-2z &= -1 \\ x-2y+2z &= 6 \\ x+y+z &= 6 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 2A_{11}+1A_{12}+(-2)A_{13}$ กระจายโดยแถวที่ 1

$$= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-2)-1(1-2)-2(1+2)$$

$$= \; -8+1-6$$

$$= \; -13 \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-2-2)$$

$$= -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1-2)$$
$$= 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1+2)$$

$$= 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1+2)$$

$$= -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2+2)$$
$$= 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(2-1)$$

$$= -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2-4)$$

$$= -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(4+2)$$

$$= -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-4-1)$$

$$= -5$$

แทนค่า A_{ij} สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$ ในสมการ (3)

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (4)$$

เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$

$$= \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$ จากสมการ (2), (4)

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

เอา A^{-1} คูณทั้งสองข้างของ (1)

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{3}{} & \frac{2}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $x = 2$

$y = 1$

$z = 3$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.9

ข้อ 1-5 จงหา adjoint ของเมตริกซ์ที่กำหนดให้

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $$E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

6. $$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. จากโจทย์ข้อ 1—6 จงหาอินเวอร์สของแต่ละเมตริกซ์

ข้อ 8-15 จงแก้สมการโดยใช้เมตริกซ์

8. $2x+2y = 1$

$3x-2y = 8$

9. $4x+5y = 2$

$3x+4y = 1$

10. $3x-y = 0$

$2x+y = 5$

11. $x+2y = 6$

$3x-y = 4$

12. $3x-y-z = 1$

$2x+y+2z = 6$

$5x-3y-2z = 1$

13. $x+y+z = 0$

$2x-y-3z = 4$

$5x+3y-z = 0$

14. $4x+3y+5z = 2$

$3x-y+2z = 0$

$2x-5y+4z = -7$

15. $x+y-z = 8$

$2x-y+2z = -3$

$5x+3y+3z = 6$

5.10 Cramer's Rule

จากหัวข้อที่แล้ว พบว่าการแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว และ 3 ตัว นั้น วิธีการจะยุ่งยากและซับซ้อนมาก

ณ ที่นี้ จะพูดถึงการแก้สมการโดยการนำเอาดีเทอร์มิแนนท์มาใช้อย่างเดียว เช่น กำหนดสมการ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$.

$$X_1 = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

X_1 เกิดจากแทนคอลัมน์ 1 ของ A ด้วยสมาชิกของ K

$$X_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

X_2 เกิดจากแทนคอลัมน์ 2 ของ A ด้วยสมาชิกของ K

$$X_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{bmatrix}$$

X_3 เกิดจากแทนคอลัมน์ 3 ของ A ด้วยสมาชิกของ K แล้ว

$$X_1 = \frac{|X_1|}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{|X_2|}{|A|}$$

$$X_3 = \frac{|X_3|}{|A|}$$

การแก้สมการโดยวิธีนี้ เรียกว่า Gramer's Rule

หมายเหตุ $|A| \neq 0$

ตัวอย่าง 5.10.1 จงแก้สมการโดย Gramer's Rule

$$2x + y = 17$$

$$2x - y = 3$$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2(-1) - 2(1)$$

$$= -2 - 2 = -4 \qquad \text{......(1)}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|X_1| = 17(-1) - 3(1) = -17 - 3 \qquad \text{......(2)}$$

$$= -20$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|X_2| = 6-34 \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$= -28$$

เพราะฉะนั้น $x = \dfrac{|X_1|}{|A|}$

$= \dfrac{-20}{-4}$ จากสมการ (1) และ (2)

$= 5$

$y = \dfrac{|X_2|}{|A|}$

$= \dfrac{-28}{-4}$ จากสมการ (1) และ (3)

$= 7$

เพราะฉะนั้น $x = 5$

$y = 7$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.10.2 จงแก้สมการ โดย Cramer's Rule

$$3x+2y-z = 4$$
$$5x+4y-2z = 7$$
$$x+y+z = 3$$

วิธีทำ เขียนสมการนี้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 3A_{11}+2A_{12}+(-1)A_{13}$ กระจายโดยแถวที่ 1

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & -2\\1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= 3(4+2)-2(5+2)-1(5-4)$$

$$= 18-14-1$$

$$= 3 \qquad \text{......(1)}$$

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\7 & 4 & -2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$|X_1| = 4A_{11}+7A_{21}+3A_{31}$ กระจายโดยคอลัมน์ที่ 1

$$= 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{vmatrix} + 7(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & -2\end{vmatrix}$$

$$= 4(4+2)-7(2+1)+3(-4+4)$$

$$= 24-21+0$$

$$= 3 \qquad \text{......(2)}$$

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\5 & 7 & -2\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}$

$|X_2| = 4A_{12}+7A_{22}+3A_{32}$ กระจายโดยคอลัมน์ที่ 2

$$= 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 7(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$= -4(5+2)+7(3+1)-3(-6+5)$$

$$= -28+28+3$$

$$3 \qquad \text{......(3)}$$

ให้ $X_3 = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & 4 & 7\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$|X_3| = 4A_{13}+7A_{23}+3A_{33}$ กระจายโดยคอลัมน์ที่ 3

$$= 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 7(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}$$

$$= 4(5-4)-7(3-2)+3(12-10)$$

$$= 4-7+6$$

$$= 3 \qquad \text{......(4)}$$

เพราะฉะนั้น

$$x = \frac{|X_1|}{|A|}$$

$= \frac{3}{3}$ จากสมการ (1) และ (2)

$$= 1$$

$$y = \frac{|X_2|}{|A|}$$

$$= \frac{3}{3} \quad \text{จากสมการ (1) และ (3)}$$

$$= 1$$

$$z = \frac{|X_3|}{|A|}$$

$$= \frac{3}{3} \quad \text{จากสมการ (1) และ (4)}$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$

$y = 1$

$z = 1$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.10

จงแก้สมการโดย Gramer's rule

1. $2x - y = 3$

   $x - 3y = 1$

2. $2x - 3y = 4$

   $x + y = 1$

3. $x + y = 6$

   $2x - y = 3$

4. $x + 2y = -1$

   $3x + y = 3$

5. $x + 2z = 1$

   $3x - y = 3$

   $x + 2y + z = 4$

6. $4x_1 + 5x_2 = 6$

$-6x_2 + x_3 = -2$

$3x_1 + 4x_2 = 3$

7. $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$

$-x_2 + x_3 = -1$

$3x_1 - 5x_3 = 3$

8. $x_1 +$ [illegible] $+ x_3 = 0$

2. [illegible] $_2 + 3x_3 = 0$

$4x_2 + 4x_3 = 0$