บทที่ 3
จำนวน (Numbers)

3.1 จำนวนนับ (counting number) **หรือ จำนวนธรรมชาติ** (Natural number) **หรือจำนวนเต็มบวก** (positive integer)

จำนวนนับ คือ จำนวน 1 และจำนวนที่สามารถเขียนในรูปผลบวกของ 1 ซึ่งเขียนได้เป็น $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$

หรือ $1, 2, 3, \ldots$

ใช้สัญลักษณ์ N แทนเซตของจำนวนนับ

ดังนั้น $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

จะเห็นจำนวนนับก็คือ จำนวนที่เราใช้นับสิ่งของต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน

เราจะศึกษาเกี่ยวกับ การบวก, การลบ, การคูณ และการหาร ของสมาชิกในเซต N

เช่น จะศึกษาว่า ถ้าสมาชิก 2 ตัวในเซต N บวกหรือคูณเข้าด้วยกัน เราจะได้ผลลัพธ์เป็นสมาชิกตัวหนึ่งในเซต N

จากผลที่ได้อันนี้ กล่าวว่า N ปิดภายใต้การบวก และการคูณ (closed under the operations of addition and multiplication)

นิยาม 3.1.1 คุณสมบัติของการปิด (closure properties)

ถ้า $a \in N$ และ $b \in N$ แล้ว

$a+b \in N$ และ $a \times b \in N$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 ผลของการบวก 2 และ 3

คือ $2+3 = 5$

ซึ่ง 5 ก็เป็นสมาชิกของเซต N

และผลของการคูณ 2 และ 3

คือ $2 \times 3 = 6$

ซึ่ง 6 ก็เป็นสมาชิกของเซต N

ขอให้สังเกตว่า สำหรับ $a - b$ จะไม่เป็นสมาชิกของเซต N นอกจากว่า a จะมีค่ามากกว่า b

และ $a \div b$ ไม่เป็นสมาชิกของเซต N

แสดงว่าจำนวนนับไม่ปิดภายใต้การลบและการหาร

ตัวอย่างที่ 3.1.2 เซตของจำนวนนับ คี่ จะไม่ปิดภายใต้การบวก

เช่น $3 + 3 = 6$

3 เป็นเลขคี่ เมื่อบวกกันแล้วได้ 6 ซึ่งไม่ใช่เลขคี่ **ตอบ**

ยังมีกฎเกี่ยวกับการบวกและการคูณอีก คือ ถ้าเราเอา 2 บวกกับ 3 จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับ 3 บวกกับ 2 ในทำนองเดียวกับเอา 2 คูณกับ 3 จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับ 3 บวกกับ 2

โดยทั่วไป ถ้า $a \in N$ และ $b \in N$ แล้ว

$$a + b = b + a$$

และ $$a \times b = b \times a$$

เราเรียกข้อความนี้ว่า กฎการสลับที่สำหรับการบวก (Commutative property of addition) และกฎการสลับที่สำหรับการคูณ (Commutative property of multiplication) ตามลำดับ

กฎเกี่ยวกับการบวกสำหรับจำนวนนับที่มากกว่า หรือเท่ากับ 3 ตัว สามารถจับกลุ่มได้หลายวิธี โดยไม่ทำให้ค่าเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่างที่ 3.1.3 $2 + (3 + 4) = 2 + 7$

$= 9$

และ $(2 + 3) + 4 = 5 + 4$

$= 9$

นั่นคือ $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการคูณ เราก็มีว่า

$$2\times(3\times4) = 2\times12$$
$$= 24$$

และ $(2\times3)\times4 = 6\times4$
$$= 24$$

นั่นคือ $2\times(3\times4) = (2\times3)\times4$ **ตอบ**

โดยทั่วไป $a, b, c\in N$ แล้ว

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

และ $a\times(b\times c) = (a\times b)\times c$

ซึ่งเรียกว่า กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก (associative property of addition) และกฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ (associative property of multiplication) ตามลำดับ

เราสามารถรวมการบวกและการคูณเข้าด้วยกัน ซึ่งเรียกว่า กฎการกระจาย (distributive property)

ตัวอย่างที่ 3.1.4 $4\times12 = 4\times(10+2)$
$$= (4\times10)+(4\times2)$$
$$= 40+8$$
$$= 48$$
ตอบ

โดยทั่วไป ถ้า $a, b, c\in N$ แล้ว

$$a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$$

และ

$$(b+c)\times a = (b\times a)+(c\times a)$$

เราจะรวมกฎต่าง ๆ เข้ากัน เพื่อสะดวกในการนำไปอ้างอิง

ถ้า $a, b, c\in N$ แล้ว

1. $a+b\in N$ คุณสมบัติปิดภายใต้การบวก (closure property of addition)
2. $a\times b\in N$ คุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ (closure property of multiplication)

3. $a+b = b+a$ กฎการสลับที่สำหรับการบวก (commutative property of addition)

4. $a \times b = b \times a$ กฎการสลับที่สำหรับการคูณ (commutative property of multiplication)

5. $a+(b+c) = (a+b)+c$ กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก (associative property of addition)

6. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ (associative property of multiplication)

7. $a \times (b+c) = (a \times b)+(a \times c)$ กฎการกระจายทางซ้าย (left-hand distributive property)

8. $(b+c) \times a = (b \times a)+(c \times a)$ กฎการกระจายทางขวา (right-hand distributive property)

9. จะมี $1 \in N$ ซึ่ง $1 \times a = a = a \times 1$

10. ถ้า a, b เป็นจำนวนนับแล้ว จะต้องได้ว่า

    $a = b$ หรือ $a<b$ หรือ $b<a$ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

11. ถ้า $a<b$ และ $b<c$ แล้ว $a<c$

12. ถ้า $a<b$ แล้ว $a+c<b+c$

13. ถ้า $a<b$ และ $o<c$ แล้ว $ac<bc$

ตัวอย่างที่ 3.1.5 1, 2, $3 \in N$ แล้ว

$$1 \times (2+3) = 1 \times 5$$
$$= 5$$

และ $(1 \times 2)+(1 \times 3) = 2+3$
$$= 5$$

ดังนั้น $1 \times (2+3) = (1 \times 2)+(1 \times 3)$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.1

จากข้อ 1 – 12 จงพิจารณาดูว่า คล้องตามคุณสมบัติข้อใด และหาค่าที่ได้ด้วย

1. $3+(5+2) = (3+5)+2$
2. $(13+10)+2 = 13+(10+2)$
3. $2\times(5\times3) = (2\times5)\times3$
4. $(11\times11)\times10 = 11\times(11\times10)$
5. $4\times(3+5) = (4\times3)+(4\times5)$
6. $2x(1+2) = (2x\ 1)+(2\times2)$
7. $(13+10)\times2 = (13\times2)+(10\times2)$
8. $6x(10+3) = (6x\ 10)+(6\times3)$
9. $(2+3)x5 = (2\times5)+(3\times5)$
10. $(7+2)x\ 10 = (7x\ 10)+(2x\ 10)$
11. $(2+4)x5 = 5x(2+4)$
12. $(2\times3)+7 = 7+(2x3)$

จากข้อ 13-22 จงพิจารณาดูว่า เซตที่กำหนดให้ปิดภายใต้การกระทำ (operation) ที่กำหนดให้หรือไม่

13. เลขคู่, การบวก
14. เลขคู่, การคูณ
15. เลขคี่, การคูณ
16. เลขคี่, การบวก
17. จำนวนเฉพาะ, การบวก
18. จำนวนเฉพาะ, การคูณ
19. เซตของเศษส่วนที่มีรูปเป็น $x/3$ (เมื่อ x เป็นจำนวนนับ), การบวก
20. เซตของเศษส่วนที่มีรูปเป็น $x/3$ (เมื่อ x เป็นจำนวนนับ), การคูณ
21. $\{0, 1\}$, การบวก
22. $\{0, 1\}$, การคูณ

3.2 **จำนวนเต็ม** (Integers)

นิยาม 3.2.1 ให้ a และ b เป็นสมาชิกของเซต N
แล้ว $b-a$ จะเป็นรากเพียงตัวเดียวของสมการ

$$x+a = b$$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 จาก $x+2 = 5$
จะได้ว่า $x = 5-2 = 3$

จากหัวข้อ 3.1 เราจะเห็นว่า N ไม่ปิดภายใต้การลบ ดังนั้นเราก็จะกำหนดจำนวนใหม่ขึ้นมาอีก

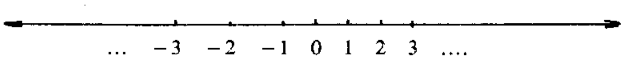
นิยาม 3.2.2 ถ้า $a \in N$ แล้วรากของสมการ $x+a = a$ เราใช้สัญลักษณ์ว่า 0 (zero)

นิยาม 3.2.3 ถ้า $a \in N$ แล้วรากของสมการ $x+a = 0$ จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $-a$
ซึ่งเราเรียกว่าค่าลบของ a (the negative of a)
หรือส่วนกลับสำหรับการบวกของ a (the additive inverse of a)

ดังนั้นสำหรับ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะมี $-a$ เสมอ, เซตที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก, จำนวนเต็มลบ และศูนย์ เรียกว่า เซตของจำนวนเต็ม (Integers) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ว่า I

ดังนั้น $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

มีวิธีพิจารณาเซตของจำนวนเต็มได้ง่ายจากวิธีทางเรขาคณิต คือ ลากเส้นตรงขึ้นมา 1 เส้น เลือกจุด ๆ หนึ่งให้ชื่อว่า จุดกำเนิด (origin) มีพิกัดเท่ากับ 0 วัดระยะทาง 1 หน่วยไปทางขวามือของ 0 แทน 1 และระยะทาง 2 หน่วยไปทางขวามือของ 0 แทน 2 ฯลฯ ในทำนองเดียวกันวัดระยะทาง 1 หน่วยไปทางซ้ายมือของ 0 แทน -1 และระยะทาง 2 หน่วยไปทางซ้ายมือของ 0 แทน -2 ฯลฯ เส้นตรงเส้นนี้เรียกว่า เส้นจำนวน (number line) ดูรูป 3.2.1



รูป 3.2.1

ดังนั้นทุก ๆ จุดที่อยู่ทางขวามือของ 0 จะแทนจำนวนเต็มบวก (สมาชิกของเซต N) และทุก ๆ จุดที่อยู่ทางซ้ายมือของ 0 จะแทนจำนวนเต็มลบ

นั่นคือ $a, b \in I$ ถ้า $a < b$ แล้ว a จะอยู่ทางซ้ายของ b ในทางกลับกัน ถ้า a อยู่ทางซ้ายของ b แล้ว $a < b$

จะเห็นว่า จำนวนนับจะเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็ม

นั่นคือ $N \subseteq I$

นิยาม 3.2.4 สำหรับทุก ๆ a ที่อยู่ใน I รากของสมการ $x + a = 0$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $-a$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 รากของสมการ $x + 3 = 0$

คือ -3

นั่นคือ $(-3) + 3 = 0$

การบวก, การลบ, การคูณและการหาร

จาก $N \subseteq I$ ดังนั้น เราก็ทราบวิธีการบวกจำนวนเต็มบวก จากหัวข้อ 3.1 แล้ว

จากนิยาม 3.2.2 และคุณสมบัติการสลับที่ จะได้ว่า

$$a + 0 = 0 + a = a$$

จากนิยาม 3.2.3 และคุณสมบัติการสลับที่ จะได้ว่า

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

ปัญหาของการบวกในเซต I คือการหา $a + b$ เมื่อ a หรือ b เป็นลบ หรือเมื่อ a และ b เป็นลบทั้งคู่

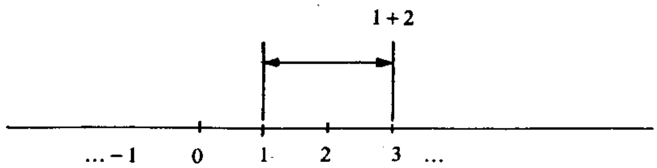
ในทางเรขาคณิต จุดที่สมนัยกับ $a + b$ หาได้จากให้จุด a อยู่บนเส้นจำนวน และเอาจุด a เป็นจุดตั้งต้น

ถ้า b เป็นจำนวนบวก ก็นับไปทางขวามือของ a โดยเริ่มจาก a ไปให้มีความยาวเท่ากับ b หน่วย

ถ้า b เป็นจำนวนลบ ก็นับไปทางซ้ายมือของ a โดยเริ่มจาก a ไป ให้มีความยาวเท่ากับ b หน่วย

ตัวอย่างที่ 3.2.2 $1+2 = 3$

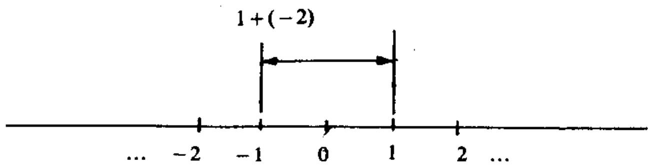
ดูรูป 3.2.2



รูป 3.2.2

ตัวอย่างที่ 3.2.3 $1+(-2) = 1$

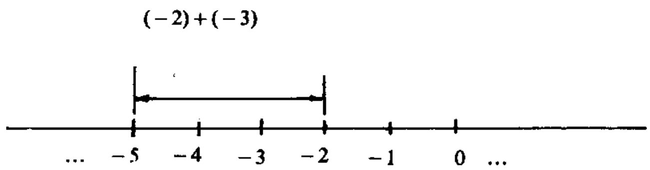
ดูรูป 3.2.3



รูป 3.2.3

ตัวอย่างที่ 3.2.4 $(-2)+(-3) = -5$

ดูรูป 3.2.4

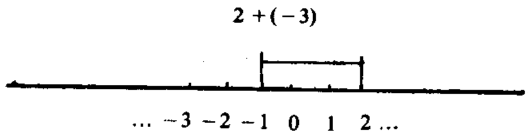


$(-2)+(-3) = -5$

รูป 3.2.4

ตัวอย่างที่ 3.2.5 $2+(-3) = -1$

ดูรูป 3.2.5

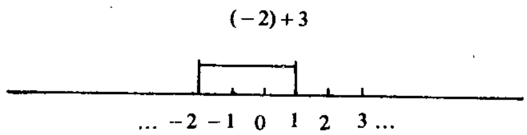


$2+(-3) = -1$

รูป 3.2.5

ตัวอย่างที่ 3.2.6 $(-2)+3 = 1$

ดูรูป 3.2.6



$(-2)+3 = 1$

รูป 3.2.6

นิยาม 3.2.5 ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ I
แล้ว $b-a$ จะเป็นรากของสมการ
$x+a = b$

ทฤษฎีที่ 3.2.1 สำหรับทุก ๆ a และ b ที่อยู่ในเซต I

$$b-a = b+(-a)$$

นั่นคือ การลบ a ออกจาก b คือ การเอาส่วนกลับของการบวกของ a มาบวกกับ b

ตัวอย่างที่ 3.2.7 $2-3 = 2+(-3) = -1$

ตัวอย่างที่ 3.2.8 $-2-3 = (-2)+(-3) = -5$

ตัวอย่างที่ 3.2.9 $-2-(-3) = (-2)+3 = 1$

ตัวอย่างที่ 3.2.10 $2-(-3) = 2+3 = 5$

คุณสมบัติของจำนวนเต็ม

ถ้า $x, y, z \in I$ แล้ว

1. $x(y+z) = xy+xz$ กฎการกระจาย
2. $x+(y+z) = (x+y)+z$ กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก
3. $x(yz) = (xy)z$ กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ
4. $(x)(0) = (0)(x) = 0$
5. $x+0 = 0+x = x$
6. $-x+x = 0$

ทฤษฎีที่ 3.2.2 ถ้า $a, b \in I$

แล้ว $(-a)(-b) = ab$

พิสูจน์

$(-a)(-b)$	$= (-a)(-b)+0$	คุณสมบัติข้อ 5
	$= (-a)(-b)+(a)(0)$	คุณสมบัติข้อ 4
	$= (-a)(-b)+a(-b+b)$	คุณสมบัติข้อ 6
	$= (-a)(-b)+[a(-b)+ab]$	คุณสมบัติข้อ 1
	$= [(-a)(-b)+a(-b)]+ab$	คุณสมบัติข้อ 2
	$= [(-a+a)(-b)]+ab$	คุณสมบัติข้อ 1
	$= 0(-b)+ab$	คุณสมบัติข้อ 6
	$= 0+ab$	คุณสมบัติข้อ 4
	$= ab$	คุณสมบัติข้อ 5

ช.ต.พ.

นิยาม 3.2.6 ให้ a และ $b \neq 0$ เป็นสมาชิกของเซต I
แล้ว $a \div b$ เป็นรากของสมการ

$$bx = a$$

ตัวอย่างที่ 3.2.11 จงหา $6 \div 2$

วิธีทำ จะเห็นว่ารากของสมการ

$$2x = 6$$

คือ $x = 3$

ดังนั้น $6 \div 2 = 3$

ตัวอย่างที่ 3.2.12 จงหา $35 \div (-7)$

วิธีทำ จะเห็นว่ารากของสมการ

$$(7)\,x = 35$$

คือ $x = -5$

ดังนั้น $35 \div (-7) = -5$

ตัวอย่างที่ 3.2.13 จงหา $(-36) \div (-4)$

วิธีทำ จะเห็นว่ารากของสมการ

$$(-4)\,x = -36$$

คือ $x = 9$

ดังนั้น $(-36) \div (-4) = 9$

ข้อสังเกต จากนิยาม 3.2.6

$4 \div 3$ เป็นรากของสมการ $3x = 4$

แต่รากของสมการ $3x = 4$ คือ $4/3$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนเต็ม

ดังนั้นจะได้ว่าเซต I ไม่ปิดภายใต้การหาร

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาค่า $x \in I$ ของสมการต่อไปนี้

   ก. $x+3 = 5$

   ข. $x+25 = 26$

   ค. $x+5 = 3$

   ง. $x+2 = 100$

   จ. $x+26 = 25$

   ฉ. $x+100 = 2$

   ช. $x+10 = 10$

   ซ. $x+2 = 0$

2. สมการใดบ้างในข้อ 1 ที่มีค่า $x \in N$

3. จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $b-a$ (เมื่อ a, b เป็นสมาชิกใด ๆ ที่อยู่ใน I)

   ก. $x+3 = 5$

   ข. $x+(-3) = 5$

   ค. $x+3 = -5$

   ง. $x+(-3) = -5$

   จ. $x+0 = 0$

   ฉ. $x+(-2) = 0$

4. จงหาค่าลบ (negative) หรือส่วนกลับของการบวก (additive inverse) ของแต่ละข้อต่อไปนี้

   ก. 5

   ข. -5

   ค. 0

   ง. 1

   จ. -0

ฉ. -25

ช. 50

ซ. -101

5. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

ก. $6+(-4)$

ข. $(-6)+7$

ค. $7-(-4)$

ง. $12-15$

จ. $12-(-15)$

ฉ. $(-7)+8+(-12)$

ช. $6-(-7)-12$

ซ. $(-1)+(-2)+(-19)$

ฌ. $15-(-20)-(-26)-15$

ญ. $(-16)-4+(-16)+(-4)$

จากข้อ 6-8 จงแสดงว่า $a+b = b+a$ และ $(a+b)+c = a+(b+c)$

6. $a = 25,\ b = -10,\ c = 2$

7. $a = -6,\ b = -4,\ c = 8$

8. $a = -1,\ b = 7,\ c = -1$

จากข้อ 9-10 จงแสดงว่า $a-b \neq b-a$ และ $a-(b-c) \neq (a-b)-c$

9. $a = 4,\ b = 1,\ c = 1$

10. $a = 1,\ b = -2,\ c = -5$

11. จงหาผลคูณ และผลหารต่อไปนี้

ก. $5(-3)$

ข. $4(-5)$

ค. $(-9)(-3)$

ง. $(-3)(-5)(7)$

จ. $(-5)(-3)(-2)$

ฉ. $4(-2)(-5)(7)$

ช. $(-18) \div 3$

ซ. $(-15) \div 5$

ฌ. $(-20) \div (-4)$

ญ. $(-3)(-12) \div (-4)$

ฎ. $(-6)(-9) \div (-27)$

ฏ. $(-15)(-8) \div (-12)(2)$

จากข้อ 12-17 จงแสดงว่า $a(b+c) = ab+ac$

12. $a = 2,\ b = -5,\ c = 3$
13. $a = 6,\ b = -3,\ c = 2$
14. $a = -3,\ b = -2,\ c = 5$
15. $a = 4,\ b = -6,\ c = -3$
16. $a = 6,\ b = -4,\ c = -3$
17. $a = -3,\ b = -5,\ c = -2$

3.3 จำนวนตรรกยะ (Rational numbers)

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูป a/b เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และ b เป็นจำนวนเต็มยกเว้นศูนย์ (b is a nonzero integer)

ตัวอย่างที่ 3.3.1 2/3, −25/2, 5/1 เป็นจำนวนตรรกยะ

ยิ่งไปกว่านั้น 3 = 3/1, 0 = 0/1, −3 = −3/1 โดยทั่วไป เขียนว่า a = a/1 สำหรับ $a \in I$ ดังนั้น จำนวนเต็มทุกจำนวนก็จะเป็นจำนวนตรรกยะด้วย

จาก 0.4 = 4/10

0.57 = 57/100

ฯลฯ

จะเห็นว่า ทศนิยมเหล่านี้ก็เป็นจำนวนตรรกยะด้วย

พิจารณา 5/0 จะได้ว่า หาค่าไม่ได้ (does not exist) ดังนั้น 5/0 ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ และ 5/0 ก็ไม่ใช่เลขจำนวนด้วย

เราจะแทนเซตของจำนวนตรรกยะด้วยสัญลักษณ์ Q

$$Q = [\ldots, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots,$$

$$-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots]$$

ตอนนี้เราจะศึกษาถึงการบวก, การลบ, การคูณ และการหาร ในเซต Q ซึ่งจะเป็นเช่นเดียวกับกฎต่าง ๆ ของเซต I

นิยาม 3.3.1 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a/b = c/d ก็ต่อเมื่อ ad = bc

ตัวอย่างที่ 3.3.2 2/3 = 4/6 เพราะว่า (2) (6) = (3) (4)

3/5 = 6/10 เพราะว่า (3) (10) = (5) (6)

นิยาม 3.3.2 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$

ตัวอย่างที่ 3.3.3

$$\begin{aligned}(-2/3)(4/5) &= (-2)(4)/(3)(5)\\ &= (-8)/15\end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 3.3.1 $c/c = 1$ สำหรับ $c \neq 0$

พิสูจน์ c/c จะเป็นรากของสมการ

$$cx = c$$

แต่ $(c)(1) = c$

ดังนั้น $x = 1$

นั่นคือ $c/c = 1$

ซ.ต.พ.

ทฤษฎีที่ 3.3.2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนและ $b \neq 0$

แล้ว $(-a)/(-b) = a/b$

ทฤษฎีที่ 3.3.3 ถ้า a/b เป็นจำนวนตรรกยะ และ $c \in I, c \neq 0$

แล้ว $ac/bc = a/b$

และ $ca/cb = a/b$

ทฤษฎีที่ 3.3.4 การตัดออก (cancellation)

การกระทำเพื่อกำจัดค่า c จาก $\frac{ac}{bc}$ เรียกว่า การตัดออก

ตัวอย่างที่ 3.3.4 $25/20 = (5)(5)/(4)(5) = 5/4$

หลักมูลฐาน (Fundamental Principle)

ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ จะได้ว่า

$$(a)(1) = a$$

นั่นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (multiplicative identity)

ตัวอย่างที่ 3.3.5 จากตัวอย่างที่ 3.3.4

$$\begin{aligned} 25/20 &= (5)(5)/(4)(5) \\ &= (5/4)(5/5) \\ &= (5/4)(1) \\ &= 5/4 \end{aligned}$$

ข้อควรระวัง สำหรับการตัดออก มีข้อควรระวังคือเราไม่สามารถกระทำสิ่งต่อไปนี้ได้

$(\cancel{2}-5)/\cancel{2}$

และ $(\cancel{x}+4)/(\cancel{x}+2)$

นิยาม 3.3.3 จำนวนตรรกยะ a/b ซึ่ง a และ b ไม่มีตัวร่วมที่เป็นจำนวนเต็ม (ยกเว้น $1, -1$) เรียกว่า เศษส่วนอย่างต่ำ (lowest terms)

ตัวอย่างที่ 3.3.6 $2/3, 7/5$ และ $-12/19$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ตัวอย่างที่ 3.3.7 $15/10, 19/38$ และ $8/4$ ไม่ใช่เศษส่วนอย่างต่ำ

เพราะว่า
$$\begin{aligned} 15/10 &= (3)(5)/(2)(5) \\ &= 3/2 \\ 19/38 &= (19)(1)/(19)(2) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$
และ
$$\begin{aligned} 8/4 &= (2)(4)/(1)(4) \\ &= 2/1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ขอให้สังเกตว่าสมการ $bx = a$ $(b \neq 0)$ บางครั้งแก้สมการหาค่า $x \in I$ ไม่ได้ แต่สามารถหาค่า $x \in Q$ ได้เสมอ

การบวก การลบ การคูณ และการหารเศษส่วน

นิยาม 3.3.4 ถ้า a/c และ b/c เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$$a/c + b/c = (a+b)/c$$

ตัวอย่างที่ 3.3.8 $-7/3 - 5/3 = (-7+5)/3 = -2/3$

ทฤษฎีที่ 3.3.5 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว

$$a/b + c/d = (ad+bc)/bd$$

พิสูจน์ $a/b + c/d = ad/bd + cb/db$ (จากทฤษฎีที่ 3.3.3)

$= (ad+bc)/bd)$ (จากนิยาม 3.3.3 และกฎการสลับที่สำหรับการคูณของจำนวนเต็ม)

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.3.9 $5/7+3/11 = ((5)(11)+(3)(7))/(7)(11)$

$= 76/77$

ตัวอย่างที่ 3.3.10 $-3/2+12/7 = ((-3)(7)+(2)(12))/14$

$= 3/14$

ตัวอย่างที่ 3.3.11 $3/10+2/15 = ((3)(15)+(2)(10)/(10)(15)$

$= (45+20)/150$

$= 65/150$

$= (13)(5)/(30)(5)$

$= 13/30$

นิยาม 3.3.5 ถ้า a/b เป็นจำนวนตรรกยะ รากของสมการ

$x+a/b = 0$ คือ $-(a/b)$

ทฤษฎีที่ 3.3.6 ถ้า $a, b \in I$ และ $b \neq 0$ แล้ว $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.3.5 จะได้ว่า $-(a/b)$ คือรากของสมการ

$$x+a/b = 0$$

แต่ $(-a)/b$ ก็คล้องตามสมการนี้ด้วย

เพราะว่าจาก $(-a)/b+a/b = ((-a)+a)/b$

$= 0/b$

$= 0$

ดังนั้น $(-a)/b = -(a/b)$

และ $(-a)/b = a/(-b)$

ช.ต.พ.

นิยาม 3.3.6 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะ

แล้ว $a/b-c/d$ จะเป็นรากของ

$$x+c/d = a/b$$

ทฤษฎีที่ 3.3.7 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะ
แล้ว $a/b - c/d = (ad - bc)/bd$

พิสูจน์ $a/b - c/d$ เป็นรากของสมการ

$$x + c/d = a/b$$

แต่ $(ad - bc)/bd + c/d$

$= (ad - bc)/bd + bc/bd$	จากทฤษฎีที่ 3.3.3
$= ((ad - bc) + bc)/bd$	จากนิยาม 3.3.4
$= (ad + (bc - bd))/bd$	จากคุณสมบัติของจำนวนเต็ม
$= ad/bd$	จากทฤษฎีที่ 3.3.3
$= a/b$	

ดังนั้น $(ad - bc)/bd$ ก็จะคล้องตามสมการ

$$x + c/d = a/b$$

นั่นคือ $(ad - bc)/bd = a/b - c/d$

ตัวอย่างที่ 3.3.12 $5/7 - 3/4 = (20 - 21)/28 = -1/28$

ทฤษฎีที่ 3.3.8 ถ้า a/b และ c/d เป็นจำนวนตรรกยะ และ $c \neq 0$
แล้ว $a/b \div c/d = (a/b)(d/c)$

พิสูจน์

$$a/b \div c/d = \frac{a/b}{c/d}\,\frac{d/c}{d/c}$$

$$= \frac{(a/b)(d/c)}{cd/dc}$$

$$= (a/b)(d/c)$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.3.13

$$\frac{5/(-7)}{(-15)/28} = (5/(-7))(28/(-15))$$

$$= (5)(28)/(-7)(-15)$$

$$= (5)(7)(4)/(7)(5)(3)$$

$$= 4/3$$

ตัวอย่างที่ 3.3.14 $-12/21 \div (-(-3/14)) = -12/21 \div 3/14$

$$
\begin{aligned}
&= (-12/21)\,(14/3) \\
&= (-12)\,(14)/(21)\,(3) \\
&= (-4)\,(3)\,(2)\,(7)/(3)\,(7)\,(3) \\
&= -8/3 \\
&= -(8/3)
\end{aligned}
$$

คุณสมบัติการจัดหมู่ (associative), การสลับที่ (commutative) และการกระจาย (distributive) ของจำนวนตรรกยะ มีดังนี้

ถ้า a/b, c/d และ e/f เป็นจำนวนตรรกยะ

$$
\begin{aligned}
a/b + c/d &= c/d + a/b \\
(a/b + c/d) + e/f &= a/b + (c/d + e/f) \\
e/f\,(a/b + c/d) &= (e/f)\,(a/b) + (e/f)\,(c/d) \\
(a/b)\,(c/d) &= (c/d)\,(a/b) \\
((a/b)\,(c/d)\,(e/f) &= (a/b)\,((c/d)\,(e/f)) \\
(a/b + c/d)\,(e/f) &= (a/b)\,(e/f) + (c/d)\,(e/f)
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ต่อไปนี้จำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะ

   5, −1, 1/2, −3/4, −100/0, 72, 172, 3, 0/5, 0.4, −0.23, 0.345, 10/(−6), 7/4, 4, 2

2. จำนวนตรรกยะต่อไปนี้ จำนวนใดบ้างที่มีค่าเท่ากัน

   1/2, −0.7, 50/48, 3/(−2), −21/30, 100/96, 0.5, 700/(−1000), −0.119/70, −15/30, 125/120, −1.5, −7/14, −1.7

จากข้อ 3 ถึงข้อ 8 จงทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

3. $3/6$

4. $48/6$

5. $10/14$

6. $18/36$

7. $25/10$

8. $72/12$

จากข้อ 9 ถึง 15 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ และทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

9. $(1/2)(1/3)$

10. $(1/2)(4+3)$

11. $(10/3)(-6/15)$

12. $(-48/35)(-49/12)$

13. $(8/25)(5/12)(15/2)$

14. $(-1)(3/5)(-2/7)$

15. $(-3/5)(-25/6)(-2/5)$

จากข้อ 16 ถึง 22 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

16. $1/2+1/3+1/4$

17. $3/10-17/15-1/6$

18. $1/20+2/15-1/10$

19. $17/15-1/3+2/9$

20. $-5/6-13/(-3)+5/12$

21. $3/20-(-4)/15+7/6$

22. $13/24-(-1)/8+1/(-12)$

จากข้อ 23 ถึง 29 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

23. $1/2 \div 1/3$

24. $17/5 \div 10/3$

25. $-18/5 \div (-15)$

26. $5/(-12) \div 5$

27. $(-5)/12 \div (-5)/3$

28. $(-5)/6 \div 13/3$

29. $13/7 \div 5/7$

จากข้อ 30 ถึง 35 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ และเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

30. $(5/3)(7/15 \div 21/20)$

31. $3/(3/5) \div (3/5)/5$

32. $(2/3)^2 (3/4)$

33. $1/2 \div (4/3)/(2/9)$

34. $(5+2/3) \div (2/9-3/5)$

35. $(9/10 \div 4/15) \div 5/18$

3.4 จำนวนจริง (Real number)

เซตของจำนวนจริงประกอบด้วย เซตของจำนวนตรรกยะ และ จำนวนอตรรกยะ ใช้สัญลักษณ์ R แทนเซตของจำนวนจริง

ความแตกต่างระหว่างจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ เขียนแทนด้วยทศนิยมไม่รู้จบแต่ซ้ำ เช่น 1/3 = 0.333...

1/3 เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะว่าสามารถเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบแต่ซ้ำ คือ ซ้ำที่ 3 และ 2 = 2/1 = 2.000...

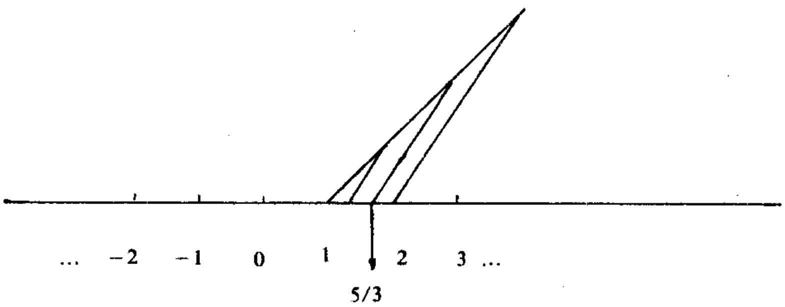
2 เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะว่าสามารถเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบแต่ซ้ำ คือ ซ้ำที่ 0

จำนวนอตรรกยะ เขียนแทนด้วยทิศนิยมไม่รู้จบและไม่ซ้ำ ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ Ir เช่น $\sqrt{2}$ = 1.414...

$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะว่าเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบ และไม่ซ้ำกันเลย

ในเรขาคณิต เราสามารถเขียนจำนวนเต็มลงบนเส้นตรงได้ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.2 จะเห็นว่าบนเส้นตรงดังกล่าวยังมีที่ว่างอีกมากมาย ซึ่งที่ว่างดังกล่าวไม่ได้แทนจำนวนเต็ม ที่ว่างเหล่านี้ บางจุดแทนจำนวนตรรกยะ

เช่น รูป 3.4.1 แสดงการแทนจุด 5/3 บนเส้นจำนวน $5/3 = 1+2/3$

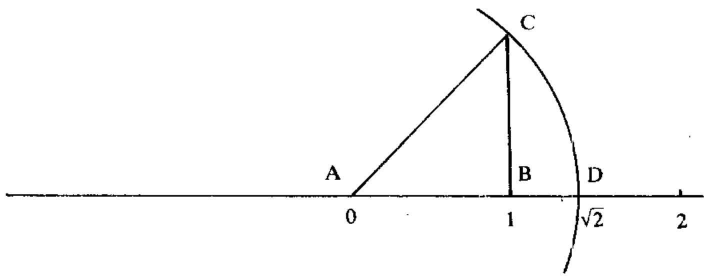


รูป 3.4.1

ดังนั้น จำนวนตรรกยะแต่ละจำนวนจะสมนัยกับจุด ๆ หนึ่งบนเส้นจำนวน ในทางกลับกัน แต่ละจุดที่อยู่บนเส้นจำนวนจะสมนัยกับจำนวนตรรกยะหนึ่งตัว สำหรับจำนวนอตรรกยะ เราก็สามารถเขียนแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวน เช่น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เราสามารถเขียนลงบนเส้นจำนวนได้ ตัวอย่างอื่น ๆ ของจำนวนอตรรกยะ คือ $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{3}, \pi, \ldots$

ให้ A และ B เป็นจุดซึ่งแทน 0 และ 1 ตามลำดับ ลาก BC ตั้งฉากกับ AB และให้ BC มีความยาวเท่ากับ AB คือยาว 1 หน่วย ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งของวงกลมด้วยรัศมี AC ตัดเส้นตรง AB ที่ D จากเรขาคณิต เราทราบว่า

$$(\text{ความยาว AD})^2 = 1^2+1^2$$
$$= 2$$
$$\therefore \quad \text{ความยาว AD} = \sqrt{2}$$

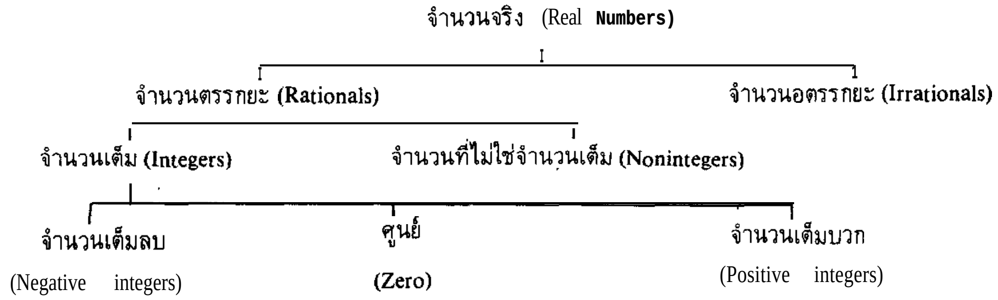


รูป 3.4.2

จะเห็นว่า บนเส้นจำนวนนี้ยังมีที่ว่างสำหรับ $\sqrt{2}$ และยังมีที่ว่างอีกมากมายสำหรับจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้น จุดต่าง ๆ ที่อยู่บนเส้นตรง จึงแทนได้ด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นจำนวนจริง (Real line)

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตย่อยต่าง ๆ ของจำนวนจริง สามารถเขียนได้ดังรูป 3.4.3



รูป 3.4.3

ข้อสังเกต

1. $N \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$
2. $Ir \subseteq R$
3. $Q \cap Ir = 0$
4. $Q \cup Ir = R$

คุณสมบัติของจำนวนจริง

สำหรับ $a, b, c \in R$

1. $a+b \in R$	ปิดภายใต้การบวก
2. $(a)(b) \in R$	ปิดภายใต้การคูณ
3. $a+b = b+a$	กฎการสลับที่สำหรับการบวก
4. $(a)(b) = (b)(a)$	กฎการสลับที่สำหรับการคูณ
5. $(a+b)+c = a+(b+c)$	กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก
6. $[(a)(b)](c) = (a)[(b)(c)]$	กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ

7. จะมี $0 \in R$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a จะได้ว่า

$a+0 = a$ 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก

8. จะมี $1 \in R$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a จะได้ว่า

$(a)(1) = a$ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

9. สำหรับแต่ละ $a \in R$ จะมี $-a \in R$ ซึ่ง

$a+(-a) = 0$

$-a$ เป็นส่วนกลับสำหรับการบวก

10. สำหรับแต่ละ $a \neq 0, a \in R$ จะมี $a^{-1} \in R$ ซึ่ง

$(a)(a^{-1}) = 1$ $(a^{-1} = \frac{1}{a})$

a^{-1} เป็นส่วนกลับสำหรับการคูณ

11. $a(b+c) = ab+ac$ กฎการกระจาย

12. ถ้า $a+c = b+c$ แล้ว $a = b$ กฎการตัดออกสำหรับการบวก (cancellation law of addition)

13. ถ้า $c \neq 0$ และ $(a)(c) = (b)(c)$ แล้ว

$a = b$ กฎการตัดออกสำหรับการคูณ (cancellation law of multiplication)

ทฤษฎีที่ 3.4.1 สำหรับ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$a(-b) = -(ab)$$

พิสูจน์

$a(-b)$	$= a(-b)+(ab-ab)$	$ab-ab = 0$
	$= [a(-b)+ab]-(ab)$	กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก
	$= [a(-b+b)]-(ab)$	กฎการกระจาย
	$= a(0)-(ab)$	$-b+b = 0$
	$= 0-(ab)$	$a(0) = 0$
	$= -ab$	

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.4.1 $(3)(-4) = -(3)(4)$

$$= -12$$

$$(-2)(7) = -(2)(7)$$
$$= -14$$
$$(-3)(-6) = 3(6)$$
$$= 18$$

ตอบ

ทฤษฎีที่ 3.4.2 $a(0) = 0$

พิสูจน์ สำหรับ a ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$0 = 0+0$ คุณสมบัติข้อ 7

$a(0) = a(0+0)$ คูณด้วย a

$a(0)+0 = a(0)+a(0)$ คุณสมบัติข้อ 7 และกฎการกระจาย

$0 = a(0)$ กฎการตัดออกสำหรับการบวก **ช.ต.พ.**

จากทฤษฎีนี้ เราจะกล่าวได้ว่า ศูนย์คูณกับจำนวนจริงใด ๆ ก็มีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 3.4.2 $5(1) = 5$

$6(0) = 0$

$0(31) = 0$

ตอบ

ข้อควรระวัง สำหรับการหาร หรือเศษส่วน ซึ่งเขียนในรูป

$a/b,\ b \neq 0$

ถ้า $b = 0$ แล้ว $a/0$ จะไม่เป็นเลขจำนวน

แต่ถ้า $b \neq 0,\ a = 0,\ 0/b = 0$ แล้ว จะได้ว่า $0/b = 0$

ทฤษฎีที่ 3.4.3 ถ้า $a+b = a+c$ และ $b = c$

พิสูจน์ ถ้า $a+b = a+c$

แล้ว $(-a)+(a+b) = (-a)+(a+c)$

$$(-a+a)+b = (-a+a)+c$$
$$0+b = 0+c$$
$$b = c$$

ช.ต.พ.

นอกจากคุณสมบัติที่กล่าวมาแล้ว จำนวนจริงยังมีคุณสมบัติเพิ่มเติมดังนี้

1. จะมีจำนวนจริง 0 อยู่เพียงจำนวนเดียวที่ทำให้

   $$a + 0 = a$$

   สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

2. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ย่อมมีจำนวนจริง $-a$ อยู่เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้

   $$a + (-a) = 0$$

3. สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใด ๆ เราย่อมได้ว่า

   $$(a + b)c = ac + bc$$

4. สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ เราย่อมได้ว่า

   $$(-a)(-b) = ab$$

5. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ เราย่อมได้ว่า

   $$-(-a) = a$$

6. สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

   $$ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

7. สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใด ๆ เราย่อมได้ว่า

   $$a - (b - c) = (a - b) + c$$

8. สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

   $$(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{ab} \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

9. สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

   $$(b \neq 0 \wedge d \neq 0) \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

GJll13.4.1 a” = a.a.a...a มีตัวประกอบ n ตัว

ผลที่ตามมา คือ

ทฤษฎีที่ 3.4.4 $a^m a^n = a^{m+n}$

พิสูจน์ $a^m a^n = \underbrace{(a.a.a...a)}_{\text{มีตัวประกอบ } m \text{ ตัว}} \underbrace{(a.a.a...a)}_{\text{มีตัวประกอบ } n \text{ ตัว}}$

เนื่องจาก ทางขวามือเป็นผลคูณของตัวประกอบ $(m+n)$ ตัว

ดังนั้น

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ซึ่งเรียกว่ากฎของเลขชี้กำลัง (Law of exponents) **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงหาผลคูณของ $4a^3$ และ $6a^5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 4a^3.6a^5 &= 4.6.a^3.a^5 \\ &= 24a^{3+5} \\ &= 24a^8 \end{aligned}$$

เราจะใช้กฎของเลขชี้กำลัง หากำลังของเลขยกกำลังอันหนึ่ง (power of a power)

ตัวอย่างที่ 3.4.4

$$\begin{aligned} (x^2)^3 &= x^2.x^2.x^2 \\ &= x^{2+2+2} \\ &= x^6 \end{aligned}$$

ตอบ

โดยทั่วไปจะได้ว่า

ทฤษฎีที่ 3.4.5 $(x^m)^n = x^{mn}$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} (x^m)^n &= \underbrace{x^m.x^m.x^m...x^m}_{\text{มีตัวประกอบ } n \text{ ตัว}} \\ &= x^{m+m+m+...+m} \quad \text{(มีอยู่ } n \text{ พจน์)} \\ &= x^{mn} \end{aligned}$$

สรุปแล้ว เราได้ว่า

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

เมื่อ $x \in R$, $m, n \in N$ **ช.ต.พ.**

ยิ่งไปกว่านั้น เรายังสามารถหากำลังของผลคูณได้

ทฤษฎีที่ 3.4.6 $(ab)^n = a^n b^n$

พิสูจน์ $(ab)^n = ab.ab.ab\ldots ab$

มีตัวประกอบ n ตัว

$= (a.a.a\ldots a) \quad (b.b.b\ldots b)$

มีตัวประกอบ n ตัว มีตัวประกอบ n ตัว

$= a^n b^n$

ดังนั้น $(ab)^n = a^n b^n$

เมื่อ $a, b \in R,\ n \in N$

ช.ต.พ.

ทฤษฎีที่ 3.4.7 กฎของเลขชี้กำลังสำหรับการหาร

ถ้า $m, n \in N$ ซึ่ง $m > n$

แล้ว จะได้ว่า

$\frac{a^m}{a^n} = x$ ก็ต่อเมื่อ $a^n x = a^m$

พิสูจน์ จาก $m > n$ และ $m, n \in N$

ดังนั้น $m - n \in N$

ถ้าเราแทน x ใน $a^n x$ ด้วย a^{m-n} จะได้ว่า

$a^n a^{m-n} = a^{n+m-n}$ กฎของเลขชี้กำลังสำหรับการคูณ

$= a^{m+n-n}$ กฎการสลับที่

$= a^m \qquad n - n = 0$

นั่นคือ ถ้า $x = a^{m-n}$ แล้ว

$a^n x = a^m$

ดังนั้น เราจะได้กฎของเลขชี้กำลังสำหรับการหาร คือ

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n$$

ช.ต.พ.

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ว่า กฎนี้เป็นจริงสำหรับ $m < n$ และ ในกรณีที่ $m = n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^n} &= a^{n-n} \\ &= a^0 \\ &= 1, a \neq 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4.5
$$\begin{aligned} 2^3.2^8.2^6 &= 2^{3+8+6} \\ &= 2^{17} \end{aligned}$$
ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.6
$$\begin{aligned} \frac{8^5}{4^3} &= \frac{(2^3)^5}{(2^2)^3} \\ &= \frac{2^{15}}{2^6} \\ &= 2^9 \end{aligned}$$
ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.7
$$\begin{aligned} 12^4 &= (2^2.3)^4 \\ &= (2^2)^4\,(3^4) \\ &= 2^8 3^4 \end{aligned}$$
ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.8
$$\begin{aligned} \frac{(3.5)^3}{27} &= \frac{(3^3)\,(5^3)}{3^3} \\ &= 3^0.5^3 \\ &= 5^3 \end{aligned}$$
ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.9
$$\begin{aligned} & (-3x^2y)\,(-4xy^3)\,(-5x^4y^2) \\ &= (-3)\,(-4)\,(-5)\,(x^2)\,(x)\,(x^4)\,(y)\,(y^3)\,(y^2) \\ &= 12\,(-5)x^{2+1+4}y^{1+3+2} \\ &= -60x^7\,y^6 \end{aligned}$$
ตอบ

ข้อสังเกต -2^4 หมายถึง ค่าลบของ 2^4

นั่นคือ $-2^4 = -16$

แต่ $(-2)^4$ หมายถึง $(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)$

$$= 16$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงเขียนจำนวนตรรกยะต่อไปนี้ลงบนเส้นจำนวน

   ก. $1/2$

   ข. $-5/3$

2. จงเขียนจำนวนอตรรกยะต่อไปนี้ลงบนเส้นจำนวน

   ก. $\sqrt{5}$

   ข. $\sqrt{2}$

3. ต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจำนวนตรรกยะและข้อใดเป็นจำนวนอตรรกยะ

   ก. -5

   ข. 1.40707

   ค. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

   ง. $.252225222225\ldots$

   จ. $\sqrt{3}$

   ฉ. $-4.1727374757\ldots$

   ช. -2

   ซ. $17.000\ldots$

4. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูก และข้อใดผิด

   ก. $0 \in Q$

   ข. $1.41414\ldots \in I$

   ค. $\sqrt{3} \in R-I$

   ง. $(5)\,(3/5) \in Q-I$

   จ. $0 \in N$

5. จงเขียน x มา 5 จำนวน ซึ่ง

   $x \in I$ และ $x \notin N$

6. จงเขียน x มา 5 จำนวน ซึ่ง

   $x \in Q$ และ $x \notin I$

7. จงเขียน x มา 5 จำนวน ซึ่ง

$x \in R$, $x \notin Ir$ และ $x \notin I$

8. จงเขียน x มา 5 จำนวน ซึ่ง

$x \in R$ และ $x \notin Q$

จากข้อ 9 ถึง 16 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

9. $(-4)(-8)$

10. $4(7)(-2)$

11. $2^2.2^3$

12. $5^2.2^2$

13. $(2^2)^3$

14. $(2^4.3)^2$

15. $\frac{3^2.2^7}{(2^2)^3}$

16. $\frac{(-3^2)^3.5^2}{(3.5)^2}$

จากข้อ 17 ถึง 25 จงใช้กฎของเลขชี้กำลัง ช่วยในการหาผลลัพธ์

17. $3^4.3^5$

18. $5^4.5^{10}$

19. $\frac{5^{17}}{-5^{12}}$

20. $\frac{7^{10}}{-7^{10}}$

21. $(5^3)^8$

22. $\frac{(5^4)^6}{5^{15}}$

23. $\frac{(3^{21}.2^6)^2}{(-3^8)^5}$

24. $\frac{(2^2.3^3.5^5)^2}{(-3^4.5^7)^2}$

25. $\frac{(5^2.3^4)^3}{(5.3^2)^4}$

3.5 **สัญลักษณ์ของการจัดกลุ่ม จตุรงค์** (Symbols of Grouping)

นักศึกษาคงจะเคยพบในหนังสือเล่มนี้ และเล่มอื่น ๆ เกี่ยวกับการใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษแทนตัวเลข ซึ่งมีอยู่ 2 อย่าง คือ

ตัวอักษรภาษาอังกฤษที่อยู่ต้น ๆ (the beginning of the alphabet) และตัวอักษรภาษาอังกฤษที่อยู่ตอนท้าย (the end of the alphabet)

Rene Descartes (1596-1650) เป็นผู้เสนอแนะวิธีใช้ตัวอักษรที่อยู่ต้น ๆ แทนตัวคงที่ ที่ทราบค่า (known constants) และตัวอักษรที่อยู่ตอนท้ายแทนตัวไม่ทราบค่า (unknowns)

ถึงแม้ว่า จะนำตัวอักษรภาษาอังกฤษมาแทนตัวที่ทราบค่าและตัวที่ไม่ทราบค่า แต่เราก็ยังถือว่า อักษรภาษาอังกฤษเป็นเพียงเซต 1 เซตเท่านั้น

เมื่อเราบวกเลขจำนวน 2 ตัว หรือมากกว่า 2 ตัวเข้าด้วยกันผลที่ได้รับ เราเรียกว่า ผลบวก (sum) ตัวเลขต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดผลบวกเรียกว่า พจน์ (terms)

ตัวอย่างที่ 3.5.1 ถ้า 3 และ -5 บวกเข้าด้วยกันผลที่ได้ คือ $3+(-5)$

3 และ -5 เป็น พจน์

$3+(-5)$ คือ ผลบวก

ตัวอย่างที่ 3.5.2 $3x+5b-c$ สามารถเขียนในรูปผลบวก

$3x+5b+(-c)$

ซึ่งประกอบด้วย 3 พจน์ คือ $3x$, $5b$ และ $-c$

ถ้าเลข 2 จำนวน หรือมากกว่า 2 จำนวนคูณกันผลที่ได้รับเรียกว่า ผลคูณ (product) ตัวเลขต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดผลคูณเรียกว่า ตัวประกอบ (factors)

ตัวอย่างที่ 3.5.3 ถ้า 3 และ 7 คูณกัน

ผลที่ได้คือ ผลคูณของ 3 และ 7

$= (3)(7)$

3 และ 7 คือ ตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 3.5.4 ผลคูณ $-3xy$

ตัวประกอบ คือ -3, x และ y

ตัวประกอบ (อาจจะมี 2 ตัว หรือมากกว่า 2 ตัว) ของผลคูณ เราอาจจะเรียกตัวประกอบตัวหนึ่งว่าเป็นสัมประสิทธิ์ (coefficient) ของตัวประกอบที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 3.5.5 $3axy$

เรากล่าวว่า สัมประสิทธ์ของ x คือ $3ay$

สัมประสิทธิ์ของ xy คือ $3a$

สัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวเลข (numerical coefficient) ของ

axy คือ 3

สัญลักษณ์ของการจักกลุ่มจตุรงค์ มีดังนี้

1. วงเล็บเล็ก (parentheses) ใช้สัญลักษณ์ ( )
2. วงเล็บสี่เหลี่ยม (brachets) ใช้สัญลักษณ์ [ ]
3. วงเล็บปีกกา (braces) ใช้สัญลักษณ์ { }

สัญลักษณ์ใช้เพื่อชี้ให้เห็นการกระทำต่าง ๆ (operations) อันไหนกระทำก่อนอันไหนกระทำหลัง

เราอาจจะลดหรือเพิ่มจำนวนของพจน์ หรือตัวประกอบในข้อความหนึ่ง ๆ เช่น $3x+5b-c$ มี 3 พจน์ แต่อาจจะเขียนเป็น

$(3x+5b)$ และ $-c$

ในทำนองเดียวกัน $-3xy$ มีตัวประกอบ 3 ตัว แต่อาจจะเขียนให้เหลือเพียงตัวประกอบ 2 ตัวได้ คือ $(-3x)y$, $-3(xy)$, $(-3y)x$,

ฯลฯ

เราจะนำสัญลักษณ์เหล่านี้มาใช้กับการบวกและการลบ

จากกฎการจัดหมู่สำหรับการบวก จะเห็นว่าเราจะบวกคู่ใดก่อนก็จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน นั่นคือ

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$
$$= a+b+c$$

นั่นคือ ถ้าเครื่องหมายหน้าวงเล็บเล็กเป็นบวก หรือไม่มีเครื่องหมาย แล้ววงเล็บนี้สามารถเปลี่ยนที่ได้

แต่ถ้าเครื่องหมายหน้าวงเล็บเล็กเป็นลบแล้ว จะใช้กฎซึ่งได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 3.5.1 $-(a+b-c) = -a-b+c$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.2.4 จะได้ว่า

$-(a+b-c)$ เป็นรากของสมการ

$x+(a+b-c) = 0$

ขอให้สังเกตว่า

$(-a-b+c)+(a+b-c)$

$= (-a+a)+(-b+b)+c+(-c)$

$= 0+0+0$

$= 0$

ดังนั้น $-a-b+c$ เป็นรากของสมการ

$x+(a+b-c) = 0$

ดังนั้น $-(a+b-c) = -a-b+c$

ช.ต.พ.

จากทฤษฎีที่ 3.5.1 และกฎการจัดหมู่สำหรับการบวกจะได้ว่า

1. ถ้าเครื่องหมายข้างหน้าวงเล็บเป็นบวกหรือไม่มีเครื่องหมายเวลาถอดวงเล็บแล้วเครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ จะไม่เปลี่ยนแปลง
2. ถ้าเครื่องหมายข้างหน้าวงเล็บเป็นลบ เวลาถอดวงเล็บแล้ว เครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ จะเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่างที่ 3.5.6 $a+(b-c) = a+b-c$

$ax-(by-c) = ax-by+c$

$2-(-x+y) = 2+x-y$

ในกรณีที่มีวงเล็บหลาย ๆ อันให้กระทำภายในวงเล็บที่อยู่ข้างในสุดก่อน

ตัวอย่างที่ 3.5.7 $3s - [5t + (2s - 5)]$

$$= 3s - [5t + 2s - 5]$$

$$= 3s - 5t - 2s + 5$$

$$= s - 5t + 5$$

ตัวอย่างที่ 3.5.8 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$2 - \{5 + (2 - 3) + [2 - (3 - 4)]\}$$

วิธีทำที่ 1 ทำเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 3.5.7

$$2 - \{5 + (2 - 3) + [2 - (3 - 4)]\}$$

$$= 2 - \{5 + 2 - 3 + [2 - 3 + 4]\}$$

$$= 2 - \{5 + 2 - 3 + 2 - 3 + 4\}$$

$$= 2 - 5 - 2 + 3 - 2 + 3 - 4$$

$$= -5$$

วิธีทำที่ 2 คำนวณในวงเล็บในสุดก่อนแล้วจึงถอดวงเล็บออกมา

$$2 - \{5 + (2 - 3) + [2 - (3 - 4)]\}$$

$$= 2 - \{5 + (-1) + [2 - (-1)]\}$$

$$= 2 - \{4 + 3\}$$

$$= 2 - 7$$

$$= -5$$

ตัวอย่างที่ 3.5.9 $3a + 5a = (3 + 5)\,a$

$$= 8a$$

$$5ac + 2bc = (5a + 2b)\,c$$

จาก $ba - ca = ba + [-(ca)]$

$$= ba + [(-c)\,a]$$

$$= [b + (-c)]\,a$$

$$= (b - c)\,a$$

ตัวอย่างที่ 3.5.10

$$3a - 5a = (3-5)\,a = (-2)\,a = -2a$$

$$5ac - 2bc = (5a - 2b)\,c$$

แบบฝึกหัด 3.5

จากข้อ 1 ถึง 6 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $(2+1)+(4-2)$
2. $(-4-5)-(2-3)$
3. $(1/2-1/3)-(5/6+1)$
4. $[-7-(3-2)]-[-5+(2-3)]$
5. $3-[(5/8+1)-3/4]-(7/8-2)$
6. $-(2-5/2)+1-\{3/2+[4-(5+5/2)]\}$

จากข้อ 7 ถึง 12 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

7. $(2a-1)+(5a-6)$
8. $-(\frac{3}{2}a-2b)+\frac{1}{2}(5a+2b)$
9. $3\,(1-2a)+5\,(a-3)$
10. $\frac{1}{3}x-3\,[\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}(2y+3x)]$
11. $3x-2\,[y-(3x+4y)]$
12. $-2(3x-\frac{1}{2})-\{3x-\frac{1}{2}[4x-2+\frac{3}{2}(x-4)]\}$

จากข้อ 13 ถึง 18 จงพิจารณาว่า ข้อความที่ 2 เป็นตัวประกอบหรือพจน์ของข้อความแรก

13. $3ax+b,\ b$
14. $-4x+5,\ 5$
15. $4a^2-2a-4,\ 4$
16. $3ab,\ a$

17. $7x^3y^3, x$

18. $(a+2)(a-3), a+2$

จากข้อ 19 ถึง 24 กำหนดข้อความ 2 ข้อความให้ จงหาสัมประสิทธิ์ของข้อความที่สอง เมื่อข้อความที่สองถูกพิจารณาว่าเป็นตัวประกอบของข้อความอันแรก

19. $9ab, a$

20. $7cd, 7c$

21. $2xy, 2x$

22. $7(x-2), x-2$

23. $4a(a-b), a-b$

24. $9(x+y)(x-y), x-y$

จากข้อ 25 ถึง 32 จงรวมพจน์ ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

25. $6a+4a-3a$

26. $7xy-3xy+2xy+3xy$

27. $7ab-4ac+3ab+6ac$

28. $-4xy+2xz-3yz+5xz+7yz$

29. $a+b-c-3b+2c-5a$

30. $x+2xy-3z+5x+8z-4xy$

31. $x+y-2z+3w-2x+y+2z-5w$

32. $3a-2b+c-4d+2a+6b-3d+4a$

จากข้อ 33 ถึง 38 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

33. $x+y+2(x+2y)-3(2x-y)$

34. $a+2b+4(-a-3b)-2(2a+5b)$

35. $x+3[2y-3x+4(-x+2y)]$

36. $a+1-2[2a+4-3(-1+5a)]$

37. $2x+2\{y-[4x-(z+2y)]+z\}-2y$

38. $6d-4e-\{2f+2[-d+e-2(d-f)]+e\}+e$

3.6 **การเท่ากัน** (Equality) และ อสมการ (Inequality)

การเท่ากัน (Equality) ในพีชคณิตแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

1. **สมการแบบเอกลักษณ์** (Identity equation) คือ การเท่ากันทุกค่าที่ยอมให้เป็นได้ของตัวอักษรที่เกี่ยวข้อง และใช้เครื่องหมาย $\equiv$ แทน เช่น

$$x^2-9 = (x+3)(x-3)$$

สำหรับทุก ๆ ค่า x

2. **สมการที่มีเงื่อนไข** (Conditional equation) คือ การเท่ากันที่เป็นจริงเพียงบางค่าที่ยอมให้เป็นได้ของตัวอักษรที่เกี่ยวข้อง เช่น

$$x+3 = 6$$

เป็นสมการเพราะเป็นจริง เฉพาะค่า $x = 3$

อสมการ (Inequality)

พิจารณาจุดที่แทนจำนวนจริงบนเส้นจำนวนจริง จะเห็นว่า จุดต่าง ๆ ที่อยู่ทางขวามือของ 0 คือ จำนวนบวก และจุดต่าง ๆ ที่อยู่ทางซ้ายมือของ 0 คือ จำนวนลบ

สำหรับ x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า x เป็นบวกจะเขียนแทนด้วย $x > 0$ ซึ่งอ่านว่า x มากกว่าศูนย์

ถ้า x เป็นลบ จะเขียนแทนด้วย $x < 0$ ซึ่งอ่านว่า x น้อยกว่า ศูนย์

ความสัมพันธ์ที่มีอันดับ (order relation) ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวนใด ๆ ถูกกำหนดโดย

นิยาม 3.6.1 ให้ $a, b \in R$

เราจะกล่าวว่า a น้อยกว่า b ถ้ามี p ซึ่งเป็นจำนวนบวก ซึ่ง $b-a = p$

เราจะเขียนว่า $a < b$ อ่านว่า a น้อยกว่า b

เราจะเขียนว่า $b > a$ (b มากกว่า a) ก็ต่อเมื่อ $a < b$

ในทางเรขาคณิต $a < b$ หมายความว่า จุดที่แทน a บนเส้นจำนวนจริงอยู่ทางซ้ายมือของจุดที่แทน b

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $c, d \in R$ เรากล่าวว่า $c > d$ ถ้าจุดที่แทน c อยู่ทางขวามือของจุดที่แทน d

$a \leqslant b$ อ่านว่า a น้อยกว่า หรือเท่ากับ b (a is less than or equal to b)

ในทำนองเดียวกัน $c \geqslant d$ อ่านว่า c มากกว่า หรือเท่ากับ d (c is greater than or equal to d)

นิยาม 3.6.2 ถ้า $a, b \in R$ แล้ว

$a < b$ หรือ $a = b$ หรือ $a > b$ เพียงกรณีเดียวเท่านั้น

นิยาม 3.6.3 ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว

1. $a+b > 0$
2. $ab > 0$

คุณสมบัติอื่น ๆ ของความสัมพันธ์ที่มีอันดับ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้นิยามต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว ถูกกำหนดไว้ในทฤษฎีต่อไปนี้

สำหรับ $a, b, c \in R$

ทฤษฎีที่ 3.6.1 ถ้า $a > b$ และ $b > c$

แล้ว $a > c$

พิสูจน์ ถ้า $a > b$ แล้ว $a-b = p$ เมื่อ p เป็นจำนวนบวก

$b > c$ แล้ว $b-c = q$ เมื่อ q เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $(a-b)+(b-c) = p+q$

$$a-c = p+q$$

จาก p และ q เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $p+q$ ก็เป็นจำนวนบวก

ให้ $p+q = r$

ดังนั้น $a-c = r$ เมื่อ r เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ $a > c$

ทฤษฎีที่ 3.6.2 ถ้า $a > b$ แล้ว

$$a+c > b+c$$

สำหรับทุก ๆ c ที่เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีที่ 3.6.3 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$

แล้ว $ac < bc$

ทฤษฎีที่ 3.6.4 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$

แล้ว $ac < bc$

บทแทรก 3.6.1 ถ้า $a < b$ และ $b < c$

แล้ว $a < c$

บทแทรก 3.6.2 ถ้า $a < b$ แล้ว

$$a+c < b+c$$

สำหรับทุก ๆ c ที่เป็นจำนวนจริง

บทแทรก 3.6.3 ถ้า $a < b$ และ $c > 0$

แล้ว $ac < bc$

บทแทรก 3.6.4 ถ้า $a < b$ และ $c < 0$

แล้ว $ac > bc$

ทฤษฎีที่ 3.6.5 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แล้ว $a^2 \geqslant 0$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.6.2

เราทราบว่า $a > 0$ หรือ $a = 0$ หรือ $a < 0$

ถ้า $a = 0$ แล้ว $a^2 = 0$

นั่นคือ $a = 0$ จะได้ว่า $a^2 \geqslant 0$

ถ้า $a > 0$ ใช้ทฤษฎีที่ 3.6.3

ให้ $b = 0$ และ $c = a$

ก็จะได้ว่า $a.a > 0.a = 0$

ดังนั้น $a^2 > 0$

ถ้า $a < 0$ ใช้บทแทรก 3.6.4

ให้ $b = 0$ และ $c = a$

ก็จะได้ว่า $a.a > 0.a = 0$

ดังนั้น $a^2 > 0$

สรุปแล้ว ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดใน 3 กรณีต่อไปนี้

$a > 0$ หรือ $a = 0$ หรือ $a < 0$

ก็จะได้ว่า

$a^2 \geqslant 0$

ซ.ต.พ.

ทฤษฎีที่ 3.6.6 ถ้า $a > 0$ แล้ว

$$\frac{1}{a} > 0$$

และถ้า $a < 0$ แล้ว

$$\frac{1}{a} < 0$$

พิสูจน์ สมมติว่า $a > 0$ และ $\frac{1}{a} < 0$

แล้ว คูณทั้งสองข้างของ $\frac{1}{a} < 0$ ด้วย a

จากบทแทรก 3.6.3 จะได้ว่า

$$a.\frac{1}{a} < 0$$

หรือ $1 < 0$

ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$

ซ.ต.พ.

ทฤษฎีที่ 3.6.7 สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

$$a < b \Rightarrow -b < -a$$

ทฤษฎีที่ 3.6.8 สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

$$(a < b \wedge c < d) \Rightarrow (a+c < b+d)$$

ข้อความใด ๆ ที่มีหนึ่งในเครื่องหมายต่อไปนี้ $>, <, \geqslant, \leqslant$ เรียกว่า อสมการ (Inequality)

ตัวอย่างที่ 3.6.1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > b > 0$ แล้ว

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นบวกทั้งคู่

ดังนั้น ab ก็จะเป็นบวกด้วย

แล้วเอา $ab > 0$ หารตลอดทั้งสองข้างของ $a > b$ ก็จะได้ว่า

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

หรือ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

ซ.ต.พ.

ในการแก้อสมการ เพื่อหาค่า x ก็ทำเช่นเดียวกับการแก้สมการ แต่การแก้อสมการนั้น ค่า x ที่ได้นั้นจะเป็นช่วง (interval) คือมีการเรียงรายอย่างต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 3.6.5 $3 < x < 5$

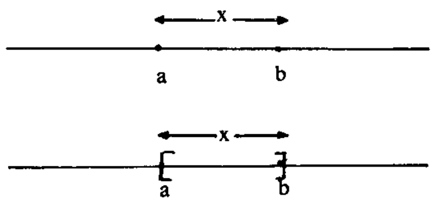
หมายความว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง 3 และ 5 โดยไม่รวมจุด 3 และ 5 ด้วย

ช่วงมีอยู่ 3 ชนิด คือ

1. **ช่วงปิด** (Closed interval) คือเซตที่รวมจุดปลายทั้ง 2 ข้างด้วย เช่น

$$a \leqslant x \leqslant b$$

หมายความว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b โดยรวมเอาจุด a และ b เข้าไปด้วย เขียนบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้

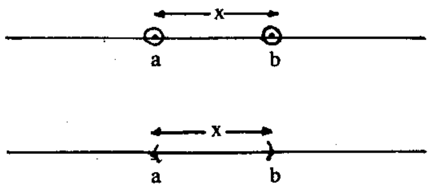


ใช้จุดทึบ หรือวงเล็บสี่เหลี่ยมแทนจุดที่รวมอยู่ในเซตนั้น

2. **ช่วงเปิด** (Open interval) คือเซตของตัวเลขที่ไม่รวมจุดปลายทั้ง 2 ข้าง เช่น

$a < x < b$

หมายความว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b โดยไม่รวมจุด a และ b เข้าไปในเซต เขียนบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้

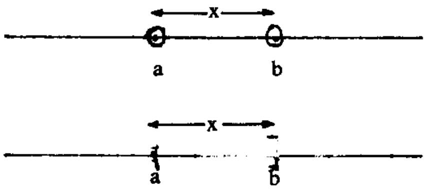


ใช้ในวงกลมเล็ก ๆ วงรอบจุด a และ b เพื่อแสดงว่าไม่รวมจุด a และ b หรือใช้วงเล็บเล็กแทนจุดที่ไม่อยู่ในเซต

3. **ช่วงครึ่งเปิด หรือช่วงครึ่งปิด** (Half-interval) คือเซตของตัวเลขที่รวมจุดปลายข้างหนึ่ง แต่ไม่รวมจุดปลายอีกข้างหนึ่ง เช่น

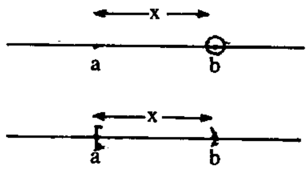
$a < x \leqslant b$

หมายความว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b โดยไม่รวมจุด a แต่รวมจุด b เขียนบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้



หรือ $a \leqslant x < b$

หมายความว่า x มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b โดยรวมจุด a แต่ไม่รวมจุด b เขียนบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 3.6.3 จงแก้อสมการ $2x+5 > 9$

วิธีทำ

$$2x+5+(-5) > 9+(-5)$$
$$2x > 4$$
$$\frac{1}{2}(2x) > \frac{1}{2}.4$$
$$x > 2$$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$$X = \{x|2x+5 > 9\}$$
$$= \{x|x > 2\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.6.4 จงแก้อสมการ

$$-5(x-1) \geqslant 3(x-3)$$

วิธีทำ

$$-5x+5 \geqslant 3x-9$$
$$-5x+5-3x-5 \geqslant 3x-9-3x-5$$
$$-8x \geqslant -14$$
$$(-\frac{1}{8})(-8x) \leqslant (-14)(-\frac{1}{8})$$
$$x \leqslant \frac{7}{4}$$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$$x = \{x|-5(x-1) \geqslant 3(x-3)\}$$
$$= \{x|x \leqslant \frac{7}{4}\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.6.5 จงแก้อสมการ $2x - 5 < -3$

วิธีทำ $2x - 5 < -3$

$2x < 2$

$x < 1$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$X = \{x | x < 1\}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.6.6 จงแก้อสมการ $1 - 2x \geqslant 5$

วิธีทำ $1 - 2x \geqslant 5$

$-2x \geqslant 4$

$x \leqslant -2$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$X = \{x | x \leqslant -2\}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.6.7 จงแก้อสมการ $x - 3 < 4$

วิธีทำ $x - 3 < 4$

$x < 7$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$X = \{x | x < 7\}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.6

จากข้อ 1 ถึง 5 จงแทน R ด้วย < หรือ >

1. $-7 \text{ R } -3$
2. $2 \text{ R } 5$
3. $-3 \text{ R } -8$
4. $-4 \text{ R } 7$

5. $-2 \, R \, -7$

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a < b$ แล้ว

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

7. จงพิจารณาดูว่า ค่า x ในข้อต่อไปนี้ น้อยกว่าหรือมากกว่า ตัวเลขที่กำหนดให้

ก. x อยู่ทางขวามือของ -2

ข. x อยู่ทางซ้ายมือของ 0

ค. x อยู่ทางขวามือของ 1

ง. x อยู่ทางซ้ายมือของ 7

จ. x อยู่ทางขวามือของ 4

จากข้อ 8 ถึง 20 จงแก้อสมการ

8. $x+3 < 4$

9. $\frac{x}{2} < 5$

10. $4x < 8$

11. $\frac{-x}{2} < 5$

12. $-4x < 8$

13. $6x-1 > 2x+7$

14. $-2x < 4$

15. $\frac{2x}{3}-1 \leqslant \frac{7x}{6}-3$

16. $3x+1 > 7$

17. $2x+9 \geqslant 3$

18. $5x+4 < 9$

19. $3x+4 \geqslant x+2$

20. $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{3}$

3.7 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)

นิยาม 3.7.1 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วค่าสัมบูรณ์ของ a เขียนแทนด้วย $|a|$ และถูกกำหนดโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a > 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } a = 0 \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 3.7.1 $|7| = 7$ เพราะว่า $7 > 0$

$|-4| = -(-4)$

$= 4$ เพราะว่า $-4 < 0$

และ $|0| = 0$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นบวกหรือศูนย์เท่านั้น

นิยาม 3.7.2 สมมติว่า a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ก. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$

แล้ว $a+b$ เป็นผลบวกของจำนวนธรรมชาติ a และ b

ข. ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$

แล้ว $a+b = -(|a|+|b|)$

ค. ถ้า $a < 0, b > 0$ และ $|a|>|b|$

แล้ว $a+b = -(|a|-|b|)$

ง. ถ้า $a < 0, b > 0$ และ $|a| < |b|$

แล้ว $a+b = |b|-|a|$

ตัวอย่างที่ 3.7.2 ก. $a = 3, b = 4$

$3+4 = 7$

ข. $a = -3, b = -4$

$(-3)+(-4) = -(|-3|+|-4|)$

$= -(3+4)$

$= -7$

ค. $a = -3,\ b = 2$

$(-3)+2 = -(|-3|-|2|)$

$= -(3-2)$

$= -1$

ง. $a = -3,\ b = 4$

$(-3)+4 = |4|-|-3|$

$= 4-3$

$= 1$

ทฤษฎีที่ 3.7.1 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $|a| \geqslant 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a|^2 = a^2$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$
5. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

ทฤษฎีที่ 3.7.2 ถ้า a, b, x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $b \geqslant 0$ แล้ว

1. $|x| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant x \leqslant b$
2. $|x-a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant x-a \leqslant b$
3. $|x-a| \leqslant b \Leftrightarrow a-b \leqslant x \leqslant a+b$
4. $|x| \geqslant b \Leftrightarrow x \leqslant -b$ หรือ $x \geqslant b$

ทฤษฎีที่ 3.7.3 ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของจำนวนจริง 2 จำนวน a และ b จะน้อยกว่าหรือเท่ากับผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของแต่ละจำนวน นั่นคือ

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$

เช่น $a = 2,\ b = 3$

$|2+3| = |5|$

$= 5$

$$|2| = 2$$

และ $|3| = 3$

ดังนั้น $|2|+|3| = 2+3$

$$= 5$$

ถ้า a และ b เป็นบวกทั้งคู่ จะได้ว่า

$$|a+b| = |a|+|b|$$

ถ้า $a = -2, b = 3$

$$|-2+3| = |1| = 1$$

$$|-2| = 2$$

และ $|3| = 3$

ดังนั้น $|-2|+|3| = 2+3$

$$= 5$$

นั่นคือ $|-2+3| = 1 < |-2|+|3| = 5$

ในกรณีที่ a หรือ b ตัวใดตัวหนึ่งเป็นลบ จะได้ว่า

$$|a+b| < |a|+|b|$$

ดังนั้น เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงได้ว่า

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า อสมการอิงสามเหลี่ยม (triangle inequality)

ทฤษฎีที่ 3.7.4 ค่าสัมบูรณ์ของผลคูณของจำนวนจริง 2 จำนวน a, b จะเท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนทั้งสองนั้น นั่นคือ

$$|ab| = |a|\,|b|$$

ถ้าเราใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์ของเลขจำนวนหนึ่ง เราจะเห็นว่า อสมการที่อยู่ในรูป

$$|ax+b| < c, c > 0 \qquad \text{....... (1)}$$

จะได้ว่า $ax+b$ จะอยู่ระหว่าง c และ $-c$

นั่นคือ ถ้า x คล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้ คือ

$$ax+b < c$$

และ $\quad ax+b > -c$

แล้ว x จะต้องคล้องตามอสมการ (1)

รากของอสมการ (1) คือ

$$= \{x|ax+b < c\} \cap \{x|ax+b > -c\}$$

$$= \{x|-c < ax+b < c\}$$

ตัวอย่างที่ 3.7.3 จงหาค่า x จาก $|3x-4| < 5$

วิธีทำ ถ้า x คล้องตาม $|3x-4| < 5$

แล้ว x จะต้องคล้องตาม

$3x-4 < 5$

และ $\quad 3x-4 > -5$

ดังนั้น รากคือ

$\{x|3x-4 < 5\} \cap \{x|3x-4 > -5\}$

เมื่อเอา 4 บวกเข้าไปทั้ง 2 ข้างของอสมการ ทั้ง 2 แล้ว เอา 3 หารตลอดจะได้ว่า

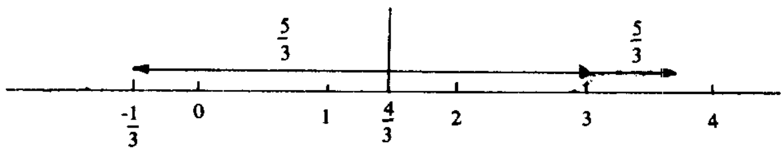
$$= \{x|x < 3\} \cap \{x|x > -\frac{1}{3}\}$$

$$= \{x|-\frac{1}{3} < x < 3\}$$

วิธีทำที่ 2 ถ้าเราหารแต่ละตัวใน $|3x-4| < 5$ ด้วย 3 จะได้ว่า

$|x-\frac{4}{3}| < \frac{5}{3}$

นั่นคือ ระยะทางระหว่าง x และ $\frac{4}{3}$ จะต้องน้อยกว่า $\frac{5}{3}$ ดังแสดงในรูป 3.7.1



$\frac{4}{3}-\frac{5}{3} = \frac{-1}{3}$ *รูปที่ 3.7.1* $\frac{4}{3}+\frac{5}{3} = 3$

ตัวอย่างที่ 3.7.4 หาค่า x จาก $|-2x+7| < 9$

วิธีทำ ถ้าค่า x คล้องตาม $|-2x+7| < 9$

แล้ว x จะต้องคล้องตาม

$-2x+7 < 9$ และ $-2x+7 > -9$

$-2x < 2$ และ $-2x > -16$

$x > -1$ และ $x < 8$

ดังนั้น รากของอสมการ คือ

$\{x \mid -1 < x < 8\}$ **ตอบ**

ถ้าเราใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่า อสมการที่อยู่ในรูป

$|ax+b| > c, c > 0$ ......(2)

จะได้ว่า $ax+b > c$

หรือ $ax+b < -c$

สรุปแล้ว รากของอสมการ (2) คือ

$\{x \mid ax+b < c\} \cup \{x \mid ax+b < -c\}$

ตัวอย่างที่ 3.7.5 จงแก้อสมการ $|3x+2| > 4$

วิธีทำที่ 1 ถ้า x คล้องตาม $|3x+2| > 4$

แล้ว x จะต้องคล้องตาม

$3x+2 > 4$

หรือ $3x+2 < -4$

จะได้ว่า $x < -2$

หรือ $x > \frac{2}{3}$

ดังนั้น รากของอสมการ คือ

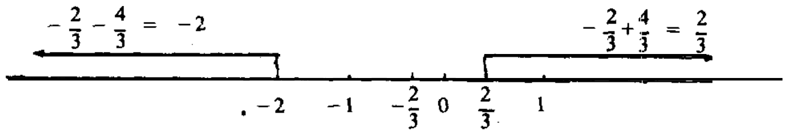
$\{x \mid x < -2\} \cup \{x \mid x > \frac{2}{3}\}$

วิธีทำที่ 2 ถ้าเราหารแต่ละตัวใน $|3x+2| > 4$ ด้วย 3

จะได้ว่า $|x+\frac{2}{3}| > \frac{4}{3}$

จาก $|x+\frac{2}{3}| = |x-(-\frac{2}{3})|$

ดังนั้น ระยะทางของ x จาก $-\frac{2}{3}$ จะต้องมากกว่า $\frac{4}{3}$ ดังรูป 3.7.2



รูป 3.7.2

ตัวอย่างที่ 3.7.6 จงแก้อสมการ $|-5x+7| > 2$

วิธีทำ ถ้า x คล้องตาม $|-5x+7| > 2$

แล้ว x จะต้องคล้องตาม

หรือ $-5x+7 > 2$

$-5x+7 < -2$

เอา -7 บวกเข้าทั้ง 2 ข้างของอสมการทั้งสอง จะได้ว่า

$x < 1$ หรือ $x > \frac{9}{5}$

ดังนั้น รากของอสมการ คือ

$\{x \mid x < 1\} \cup \{x \mid x > \frac{9}{5}\}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.7.7 จงหารากของ $|2x+5| \leqslant x+3$

วิธีทำ กรณีที่ 1 ถ้า $2x+5 \geqslant 0$

แล้ว $|2x+5| = 2x+5$

ดังนั้น $2x+5 \leqslant x+3$

$x \leqslant -2$

สำหรับ กรณีที่ 1 จะได้ว่า

$2x+5 \geqslant 0$ และ $x \leqslant -2$

หรือ

$x \geqslant -\frac{5}{2}$ และ $x \leqslant -2$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$$x_1 = \{x \mid x \geqslant -\tfrac{5}{2} \text{ และ } x \leqslant -2\}$$

$$= \{x \mid -\tfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant -2\}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $2x+5 < 0$

แล้ว $|2x+5| = -(2x+5)$

ดังนั้น $-(2x+5) \leqslant x+3$

$$2x+5 \geqslant -(x+3) = -x-3$$

$$3x \geqslant -8$$

$$x \geqslant -\frac{8}{3}$$

สำหรับ กรณีที่ 2 จะได้ว่า

$2x+5 < 0$ และ $x \geqslant -\frac{8}{3}$

หรือ

$x < -\frac{5}{2}$ และ $x \geqslant -\frac{8}{3}$

ดังนั้น รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$$x_2 = \{x \mid x < -\tfrac{5}{2} \text{ และ } x \geqslant -\tfrac{8}{3}\}$$

$$= \{x \mid -\tfrac{8}{3} \leqslant x < -\tfrac{5}{2}\}$$

จากทั้ง 2 กรณี รากของอสมการที่ต้องการ คือ

$$X = X_1 \cup X_2$$

$$= \{x \mid -\frac{8}{3} \leqslant x < -\frac{5}{2}\} \cup \{x \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -2\}$$

$$= \{x \mid -\frac{8}{3} \leqslant x \leqslant -2\}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.7

จากข้อ 1 ถึง 5 กำหนดค่า a ให้ จงหา $-a$

1. -5
2. 4
3. $-(a+b)$
4. $a-b$
5. $-(2x+3y)$

จากข้อ 6 ถึง 10 จงหาผลบวก

6. $17+(-4)$
7. $4+(-17)$
8. $(-17)+(-4)$
9. $17+4$
10. $(-32)+(-13)$

จากข้อ 11 ถึง 24 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

11. $|-3|$
12. $|-3|+|3|$
13. $(-3)+3$
14. $|6+(-2)|$
15. $|-0|$
16. $|-0|$

17. $|(-4)+(-9)|$

18. $9x+(-3x)$

19. $(-42a)+17a$

20. $15+[-\{-(4)+(-3)\}]$

21. $(-47)+[-\{6+(-[8+(-3)]\,)\}]$

22. $(-66)+\{17+[-(3+-19)]\}$

23. $87a+(-23a)+17a+12a$

24. $12a+[-\{8a+[-\{3a+(-2)\}]+(-2)\}]+(-2)$

จากข้อ 25 ถึง 38 จงแก้อสมการ หาค่า x

25. $|2x-3| < 5$

26. $|5x-1| < 9$

27. $|4x+7| < 7$

28. $|3x+2| < 8$

29. $|-7x+3| < 4$

30. $|3x+2| > 14$

31. $|2x+5| > 11$

32. $|-5x+3| > 8$

33. $|-2x-5| > 1$

34. $|2x-9| > 3$

35. $|3x+5| > 7$

36. $|x-3| \leqslant 4$

37. $|-2x+3| \leqslant 7$

38. $|2x-3| \geqslant 5$