บทที่ 2
ความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชัน
(Relations and Function)

2.1 **ผลคูณคาร์เซียน** (Cartesian Product)

ถ้าจะถามว่าในการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ผลลัพธ์ (outcomes) ที่ได้จะเป็นอย่างไร

ผลลัพธ์ (outcomes) ที่ได้จากการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง คือ

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

เมื่อ H แทนหัว และ T แทนก้อย

มีสมาชิกอยู่ 4 ตัวในเซต S

(H,T) และ (T,H) แตกต่างกัน เพราะว่า (H,T) หมายถึง ได้หัวในการโยนเหรียญครั้งแรก และได้ก้อยในการโยนเหรียญครั้งที่ 2

ส่วน (T,H) หมายถึง ได้ก้อยในการโยนเหรียญครั้งแรก และได้หัวในการโยนเหรียญครั้งที่ 2

(H,H),(H,T),(T,H) และ (T,T) เป็นตัวอย่างของ **คู่อันดับ** (ordered pairs)

นิยาม 2.1.1 คู่อันดับ (ordered pairs)

สำหรับ x และ y ใด ๆ ไม่จำเป็นต้องต่างกัน เราเรียก (x,y) ว่า คู่อันดับของ x กับ y หรือ คู่อันดับ (x,y) ที่สำคัญคือ จะต้องมีอันดับและ เป็นคู่

เราเรียก x ว่า สมาชิกตัวแรก (first element)

และ y ว่า สมาชิกตัวที่สอง (second element)

คู่อันดับ (x,y) จะแตกต่างจาก คู่ลำดับ (y,x) และ คู่อันดับทั้งคู่จะแตกต่างจากเซต {x,y}

นิยาม 2.1.2 สำหรับ a,b,c,d ใด ๆ จะได้ว่า

1. (a,b) = (b,a) ก็ต่อเมื่อ a = b
2. $\forall(a,b),(c,d) \in A \times B$ (v หมายถึง ทุก q)

$(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$, $b = d$

และ $(a,b) \neq (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

คู่อันดับเกิดจาก ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต 2 เซต (Cartesian product of two sets)

ถ้า A และ B เป็นเซต 2 เซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต A กับเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ (อ่านว่า A คูณ B หรือ A cross B)

ผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต A กับเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด ซึ่ง $a \in A$ และ $b \in B$

หรือ $A \times B = \{(a,b) | a \in A$ และ $b \in B\}$

ตัวอย่างที่ 2.1.1 ถ้า $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$B = \{b_1, b_2\}$

แล้ว จงหา $A \times B$, $B \times A$

วิธีทำ

$$A \times B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2)\}$$

$$B \times A = \{(b_1,a_1),(b_2,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_2),(b_1,a_3),(a_2,a_3)\}$$

ผลคูณคาร์ทีเซียน มีประโยชน์มากในทางสถิติ (Statisics) และความน่าจะเป็น (probability) ซึ่งมีคำถามเกี่ยวกับการพิจารณาผลลัพธ์ (outcomes) ทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่ม เช่น การพิจารณาการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ถ้าเรากำหนดให้ผลลัพธ์ของการโยนเหรียญครั้งที่ 1 คือเซต $S_1 = \{H,T\}$ และผลลัพธ์ของการโยนเหรียญครั้งที่ 2 คือเซต $S_2 = \{H,T\}$ และผลคูณคาร์เซียน $S_1 \times S_2$ จะให้ผลลัพธ์ของการโยนเหรียญทั้งสองครั้ง ซึ่งเราจะพบว่า ผลลัพธ์ คือ

$$S_1 \times S_2 = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

ผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต 2 เซต สามารถหาได้โดยง่ายจากรูปตาราง รูปตาราง 2.1.1 แสดงผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต S_1 และเซต S_2

วิธีการเขียนรูปตาราง คือ

เขียนสมาชิกของเซต S_1 ไว้ทางซ้ายมือของตาราง และสมาชิกของเซต S_2 เขียนไว้บนตาราง เราก็จะเติมคู่อันดับซึ่งได้จากผลคูณคาร์เซียน $S_1 \times S_2$ ลงในช่องว่างในตาราง เช่น (H,H),(H,T),(T,H),(T,T)

		S_2 H	T
S_1	H	H,H	H,T
	T	T,H	T,T

รูป 2.1.1

ตัวอย่างที่ 2.1.2 ให้ A = {1,2}

B = {a,b}

จงหา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$

วิธีทำ

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$B \times B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

ตัวอย่างที่ 2.1.3 จากตัวอย่างที่ 2.1.2 จงหาผลคูณคาร์ทีเซียน โดยใช้ตาราง

วิธีทำ

		B a	b
A	1	1,a	1,b
	2	2,a	2,b

ดังนั้น $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

		A 1	2
B	a	a,1	a,2
	b	b,1	b,2

ดังนั้น $B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

		A	
		1	2
A	1	1,1	1,2
	2	2,1	2,2

ดังนั้น $A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

		B	
		a	b
B	a	a,a	a,b
	b	b,a	b,b

ดังนั้น $B \times B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

ตัวอย่างที่ 2.1.4 **ให้** $A = \{a,b,c\}$

$B = \{1,2,3,4\}$

จงหา ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ โดยใช้ตาราง

วิธีทำ

		B			
		1	2	3	4
	a	a,1	a,2	a,3	a,4
A	b	b,1	b,2	b,3	b,4
	c	c,1	c,2	c,3	c,4

ดังนั้น $A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),$
$(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4)\}$

ตัวอย่างที่ 2.1.5 ให้ $P = \{1,2,3\}$

$M = \{r,t,n\}$

จงหา ผลคูณคาร์ทีเซียน $P \times M$ โดยใช้ตาราง

วิธีทำ

		M		
		r	t	n
	1	1,r	1,t	1,n
P	2	2,r	2,t	2,n
	3	3,r	3,t	3,n

ดังนั้น $P \times M = \{(1,r),(1,t),(1,n),(2,r),(2,t),$
$(2,n),(3,r),(3,t),(3,n)\}$

ข้อสังเกต 1. จำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B ($A \times B$) จะมีค่าเท่ากับจำนวนสมาชิกใน A คูณกับจำนวนสมาชิกใน B

เช่น เซต A มีสมาชิกอยู่ 5 ตัว
เซต B มีสมาชิกอยู่ 4 ตัว

ดังนั้น $A \times B$ จะมีสมาชิก = (5) (4)
= 20 ตัว

$B \times A$ จะมีสมาชิก = (4) (5)
= 20 ตัว

$A \times A$ จะมีสมาชิก = (5) (5)
= 25 ตัว

$B \times B$ จะมีสมาชิก = (4) (4)
= 16 ตัว

2. $A \times B \neq B \times A$

แต่จำนวนสมาชิกใน $A \times B$ จะเท่ากับจำนวนสมาชิกใน $B \times A$

3. ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว

$A \times \varnothing = \varnothing$ (เซตว่าง)

และ $\varnothing \times A = \varnothing$

4. $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

ทฤษฎีที่ 2.1.1 สำหรับ A,B,C ซึ่งเป็นเซตใด ๆ

1. ถ้า $A \neq \varnothing$ และ $B \neq \varnothing$

แล้ว $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

2. $A \times B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ

$A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$

3. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \times C \subseteq B \times C$

นิยาม 2.1.3 ผลคูณคาร์เซียนของเซตหลายเซต

สำหรับ $n \in N$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\}$

สำหรับทุก ๆ $i = \{1, 2, \ldots, n\}$

นิยาม 2.1.4 $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots b_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i$ สำหรับทุก $i = \{1, 2, \ldots, n\}$

ตัวอย่างที่ 2.1.6 จากตัวอย่างการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง

ถ้าเราต้องการเพิ่มการโยนอีก 2 ครั้ง

ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง คือ

$$(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times S_2 \times S_3$$
$$= \{(H,H,H), (H,H,T), (T,H,H), (T,T,H), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,T)\}$$

ซึ่งอาจจะหาได้จากตาราง

		$S_1 \times S_2$: H,H	H,T	T,H	T,T
S_3	H	H,H,H	H,H,T	H,T,H	H,T,T
	T	T,H,H	T,H,T	T,T,H	T,T,T

ตัวอย่างที่ 2.1.7 ให้ $P = \{1,2,3\}$, $M = \{r,t,n\}$, $S = \{a,b\}$

จงหา $P \times M \times S$ จากตาราง

วิธีทำ

P \ M	r	t	n
1	1,r	1,t	1,n
2	2,r	2,t	2,n
3	3,r	3,t	3,n

P×M \ S	a	b
1,r	1,r,a	1,r,b
1,t	1,t,a	1,t,b
1,n	1,n,a	1,n,b
2,r	2,r,a	2,r,b
2,t	2,t,a	2,t,b
2,n	2,n,a	2,n,b
3,r	3,r,a	3,r,b
3,t	3,t,a	3,t,b
3,n	3,n,a	3,n,b

ข้อสังเกต 1. (1,r,a) ประกอบด้วยสมาชิก 3 ตัว เราเรียก (1,r,a) ว่า สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (ordered triples หรือ ordered 3-tuple)

ดังนั้น คู่อันดับ (ordered pair) สามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า ordered 2-tuple

และ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ประกอบด้วยสมาชิก n จะเรียกว่า ordered n-tuple

2. จำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนหลายเซต เช่น $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ซึ่ง $A_1,A_2,\ldots,A_n$ มีสมาชิก $N_1,N_2,\ldots,N_n$ ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = (N_1)(N_2)\ldots(N_n)$

ตัวอย่างที่ 2.1.8 ถ้า A มีสมาชิก 10 ตัว B มีสมาชิก 6 ตัว C มีสมาชิก 12 ตัว และ D มีสมาชิก 3 ตัว

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $A \times B \times C \times D$ = (10) (6) (12) (3)

= 2160 ตัว

แบบฝึกหัด 2.1

1. ให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{x,y\}$

จงหา ผลคูณคาร์ทีเซียน ต่อไปนี้

1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $A \times C$
4. $C \times A$
5. $B \times C$
6. $C \times B$
7. $A \times (B \cup C)$
8. $A \times (B \cap C)$
9. $B \times (A \cap A)$
10. $(C \times A) \cup (C \times B)$
11. $(C \times A) \cap (C \times B)$
12. $(A \cup B) \times C$
13. $(A \cap B) \times C$
14. $(A - B) \times C$
15. $(B \cap C) \times A$
16. $(B \times B) \cap (A \times A)$
17. $(C \times A) \cup (A \times C)$
18. $(C \times C) \cup (A \times B)$

19. $(A-C)\times B$

20. $(A\times C)\cup(A\times B)$

2. ให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$

จงหา a. $A\times B$

b. $B\times A$

c. $A\times A$

d. $B\times B$

3. ให้ $A = \{x,y,z\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ

1. $A\times A$
2. $B\times B$
3. $C\times C$
4. $A\times B$
5. $B\times A$
6. $A\times C$
7. $C\times A$
8. $B\times C$
9. $C\times B$
10. $(A\cup B)\times C$
11. $(A\cap B)\times C$
12. $(A\cup C)\times A$
13. $(A\cap C)\times B$
14. $(B\cup C)\times A$
15. $(B\cup C)\times B$

4. ให้ $A = \{s,w\}$

$B = \{1,2,3\}$

$C = \{a,b\}$

จงหา
1. $A\times B\times C$
2. $B\times A\times C$
3. $C\times A\times B$
4. $C\times B\times A$
5. $B\times C\times A$

5. ให้ $A = \{x,y,z\}$

$B = \{1,2,3,4,5\}$

$C = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ

1. $A \times B \times C$
2. $A \times C \times B$
3. $(A \cup B) \times C$
4. $(B \cap A) \times C$
5. $(B \cup C) \times (A \cup C)$

2.2 ฟังก์ชัน (Function)

เมื่อเราพิจารณาสิ่งของ 2 สิ่งที่สัมพันธ์กัน เช่น พื้นที่ของวงกลมและรัศมีของวงกลมสัมพันธ์กันด้วยสูตร

$$A = \pi r^2$$

A = พื้นที่ของวงกลม

r = รัศมีของวงกลม

จะเห็นว่า $r = 1$ จะได้ว่า $A = \pi$

$r = 2$ จะได้ว่า $A = 4\pi$

$r = 3$ จะได้ว่า $A = 9\pi$

.

.

.

เราจะจับคู่ r และ A ด้วยสัญลักษณ์ $(1,\pi), (2,4\pi), (3,9\pi), \ldots$

ดังนั้น เราจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง r และ A ด้วยสูตร $A = \pi r^2$ ทำให้เราได้คู่อันดับต่าง ๆ ของค่า r และค่า A ที่สัมพันธ์กัน ถ้าเรานำคู่อันดับต่าง ๆ เหล่านี้มาประกอบกันเป็นเซต เราก็จะได้เซตของคู่อันดับเซตหนึ่งคือ

$$\{(1,\pi),(2,4\pi),(3,9\pi), \ldots\}$$

คู่อันดับต่าง ๆ ในเซตนี้บอกให้เราทราบว่าค่า r ค่าใดสัมพันธ์กับค่าใดของ A

จากตัวอย่างจะเห็นว่า เราสามารถให้เซตของคู่อันดับมาพรรณนาฟังก์ชันแทนสูตรได้

นิยาม 2.2.1 ให้ A,B เป็นเซต 2 เซตใด ๆ เราจะกล่าวว่า F **เป็นฟังก์ชันจาก** A ไปยัง B ถ้า F เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$, $y \in B$ และแต่ละ $x \in A$ จะมี $y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in F$ ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวของ $y \in B$

นั่นคือ ถ้า F เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) ซึ่ง $x \therefore A$, $y \therefore B$ แล้ว จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชัน เมื่อ x แต่ละตัวในเซต A จับคู่กับ y ในเซต B ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวเท่านั้น

และเราถือว่า θ (empty set) เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า ไม่ขัดกับนิยามของฟังก์ชัน เรียกว่า ฟังก์ชันเปล่า (empty function)

และอาจมี x หลาย ๆ ตัวจับคู่กับ y เพียงตัวเดียวก็ได้ F ก็ยังเป็นฟังก์ชัน

แต่ถ้า x หนึ่งตัวที่อยู่ในเซต A ไปจับคู่กับ y มากกว่าหนึ่งตัว (อาจเป็น 2, 3, ...) แล้ว F ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2.2.1 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

จงพิจารณาว่า ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1. $F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$
2. $G = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$
3. $H = \{(1, a), (2, b), (3, d)\}$
4. $I = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
5. $J = \{(b, 1), (c, 2), (d, 1)\}$

วิธีทำ

1. F = { (a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3), }

ก. สมาชิกของ F ซึ่งเป็นคู่อันดับมีสมาชิกตัวแรกอยู่ใน A และสมาชิกตัวที่ 2 อยู่ใน B

ข. $(a, 1) \in F$ และ $(a, 2) \in F$

จะเห็นว่า a จับคู่กับ 1 และ a ยังไปจับคู่กับ 2

นั่นคือ a จับคู่กับสมาชิกใน B มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น F จึงไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

2. G = { (a, 1), (b, 1), (c, 1) }

ก. สมาชิกของ G ซึ่งเป็นคู่อันดับมีสมาชิกตัวแรกอยู่ใน A และสมาชิกตัวที่ 2 อยู่ใน B

ข. สมาชิกแต่ละตัวใน A จับคู่กับสมาชิกเพียงตัวเดียวใน B

ดังนั้น G เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

3. H = { (1, a), (2, b), (3, d) }

ก. สมาชิกของ H ซึ่งเป็นคู่อันดับมีสมาชิกตัวแรกอยู่ใน B และมีสมาชิกตัวที่ 2 อยู่ใน A

ข. สมาชิกแต่ละตัวใน B จับคู่กับสมาชิกเพียงตัวเดียวใน A

ดังนั้น H ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

4. I = { (a, 1), (b, 2), (b, 3) }

ก. สมาชิกของ I ซึ่งเป็นคู่อันดับมีสมาชิกตัวแรกอยู่ใน A และมีสมาชิกตัวที่ 2 อยู่ใน B

ข. $(b, 2) \in I$ และ $(b, 3) \in I$

จะเห็นว่า b จับคู่กับ 2 และ b ยังจับคู่กับ 3

นั่นคือ b จับคู่กับสมาชิกใน B มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น I จึงไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

5. J = { (b, 1), (c, 2), (d, 1) }

ก. สมาชิกของ J ซึ่งเป็นคู่อันดับมีสมาชิกตัวแรกอยู่ใน A และมีสมาชิกตัวที่ 2 อยู่ใน B

ข. สมาชิกแต่ละตัวใน A จับคู่กับสมาชิกเพียงตัวเดียวใน B

ดังนั้น J เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.2.2 ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนเต็ม

F ประกอบด้วย (x, y) ซึ่ง $x \in A, y \in B$

จงพิจารณาว่า F คือ $y = -4+2x$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

วิธีทำ จาก $y = -4+2x$

แทนค่า x แล้วพิจารณาค่า y ถ้าแทนค่า x 1 ค่า ได้ y หลายค่า ก็แสดงว่า F ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

$$x = -1, \quad y = -4-2 = -6$$

$$x = 0, \quad y = -4$$

$$x = 1, \quad y = -4+2 = -2$$

$$x = 2, \quad y = -4+4 = 0$$

$$x = 3, \quad y = -4+6 = 2$$

$$x = 4, \quad y = -4+8 = 4$$

$$x = 5, \quad y = -4+10 = 6$$

ฯลฯ

ดังนั้น $F = \{\ldots, (-1, -6), (0, -4), (1, -2), (2, 0), \ldots\}$

จะเห็นว่า x 1 ค่า ให้ค่า y **เพียงค่าเดียว**

ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.2.3 ถ้า $F = \{(0, 0), (0, 1), (2, 1), (3, 2)\}$

แล้ว F เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ $(0, 0), (0, 1) \in F$

จะเห็นว่า 0 จับคู่กับ 0 และยังจับคู่กับ 1

ดังนั้น F ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2.2.4 $F = \{(1, 2), (3, 4), (6, 7), (8, 9)\}$

จะเห็นว่า F เป็นฟังก์ชัน

เพราะว่าสมาชิกตัวแรกจับคู่กับสมาชิกตัวที่สองเพียงตัวเดียวเท่านั้น

สำหรับฟังก์ชัน F ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in F$ จะกล่าวว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน F ที่ x และเขียนว่า $y = F(x)$ อ่านว่า F of x

ตัวอย่างที่ 2.2.5 จากตัวอย่างที่ 2.2.4 จะได้ว่า

$F(1) = 2$ (อ่านว่า ค่าของ F ที่ 1 เท่ากับ 2)

$F(3) = 4$

$F(6) = 7$

$F(8) = 9$

โดเมน (domian) ของฟังก์ชัน F จากเซต A ไปยังเซต B คือ เซตของตัวประกอบตัวแรกทั้งหมดในคู่อันดับ ซึ่งอยู่ใน F

หรือ $(x, y) \in F$ โดเมนก็คือ ค่า x ทั้งหมด

พิสัย (Range) ของฟังก์ชัน F จากเซต A ไปยังเซต B คือเซตของตัวประกอบตัวที่สอง

ทั้งหมดในคู่อันดับซึ่งอยู่ใน F

เรียก x และ y ว่าตัวแปร (varibles) เรียก x ว่าตัวแปรอิสระ (independent variable) และเรียก y ว่าตัวแปรตาม (dependent variable)

ตัวอย่างที่ 2.2.6 ถ้า $F = \{(0, 3), (1, 2), (3, 3), (4, 2), (5, -1)\}$

แล้ว โดเมนคือ $\{0, 1, 3, 4, 5\}$ พิสัยคือ $\{-1, 2, 3\}$

ตัวอย่างที่ 2.2.7 ถ้า $G = \{(a, 1), (b, 3), (c, 6)\}$

แล้ว โดเมนคือ $\{a, b, c\}$ พิสัยคือ $\{1, 3, 6\}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก B เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหลาย ให้ F เป็นเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x \in A$, $y \in B$ และคล้องตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จงพิจารณาดูว่า ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

   ก. $y - x = 3$

   ข. $y - (x+1)^2 = 0$

   ค. $y - \sqrt{x} = 0$

   ง. $y^2 - x = 0$

   จ. $y^2 - 2x + 1 = 0$

จากข้อ 2-7 จงหาโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันที่กำหนดให้

2. $y = f(x) = 2x + 3$
3. $y = f(x) = \sqrt{x-4}$
4. $y = f(x) = x$
5. $y = \sqrt{x+3}$
6. $y = 1$
7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
8. จงพิจารณาดูว่า ต่อไปนี้ข้อใดเป็นฟังก์ชัน

   ก. $F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 5)\}$

   ข. $G = \{(1, x), (3, z), (8, y), (5, y)\}$

   ค. $H = \{(a, 1), (b, 2)\}$

   ง. $I = \{(1, a), (3, c)\}$

   จ. $J = \{(x, 1), (y, 3), (z, 3)\}$

9. ถ้า $f(x) = x + 3$ จงหา

   $f(0), f(-3), f(-1), f(1)$

10. ถ้า $g(x) = x^2$ จงหา

   $g(0), g(1), g(-1), g(1/2), g(4)$

11. & $h(x) = 2x^2 - 3x + 5$ จงหา

$h(0)$, $h(-1)$, $h(a)$, $h(b)$, $h(1)$

12. ถ้า $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ จงหา

$F(1)$, $F(0)$, $F(x-1)$, $F(a)$, $F(x^2)$

13. ถ้า $f(x) = 2x^* - 3x$ จงหา

$f(1)/f(-1)$, $f(a+1)/f(a)$, $f(x+1)/f(x-1)$

2.3 ความสัมพันธ์ (Relation)

ความสัมพันธ์ คือ เซตย่อยของ $A \times B$ เมื่อ A และ B เป็นเซตใด ๆ
ถ้า $R \subseteq A \times B$ แล้วเรียก R ว่า ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B
โดยที่แต่ละเซตย่อยของ $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B
ดังนั้น $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

นิยาม 2.3.1 เซต T "เป็นความสัมพันธ์" ก็ต่อเมื่อ T เป็นเซตของคู่อันดับ นั่นคือ เซตของคู่อันดับทุกเซตเป็นความสัมพันธ์

สำหรับความสัมพันธ์ T ใด ๆ จาก A ไปยัง B ถ้า $(a, b) \in T$ เรากล่าวว่า a มีความสัมพันธ์ T กับ b และเขียนแทนด้วย a T b

ตัวอย่างที่ 2.3.1 $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$

เป็นความสัมพันธ์ที่มีสมาชิก 4 ตัว

และ $(1, 3) \in R$ เขียนแทนด้วย 1 R 3

$(1, 4) \in R$ เขียนแทนด้วย 1 R 4

$(2, 3) \in R$ เขียนแทนด้วย 2 R 3

$(3, 5) \in R$ เขียนแทนด้วย 3 R 5

ตัวอย่างที่ 2.3.2 $S = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, y \leqslant x\}$

เป็นความสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน (infinite number) of elements) สมาชิกบางตัวของเซต S คือ (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) ฯลฯ

ตัวอย่างที่ 2.3.3 $Q = \{(2, 1), (4, 3), (6, 7), (6, 9)\}$

เป็นความสัมพันธ์ และได้ว่า

2 Q 1 เป็นจริง เพราะว่า $(2, 1) \in Q$

4 Q 3 เป็นจริง เพราะว่า $(4, 3), \in Q$

4 Q 4 เป็นเท็จ เพราะว่า $(4, 4) \notin Q$

6 Q 7 เป็นจริง เพราะว่า $(6, 7) \in Q$

2 Q 2 เป็นเท็จ เพราะว่า $(2, 2) \notin Q$

3 Q 4 เป็นเท็จ เพราะว่า $(3, 4) \notin Q$

ตัวอย่างที่ 2.3.4 ถ้าความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ถูกกำหนดโดย

$y = r(x) = x^2 - 1$

จงหาค่า y สำหรับค่า $x = 0, 1, 3$

วิธีทำ จาก $y = r(x) = x^2 - 1$

$x = 0, y = r(0) = 0^2 - 1 = -1$

$x = 1, y = r(1) = 1^2 - 1 = 0$

$x = 3, y = r(3) = 3^2 - 1 = 8$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ถ้า $y^2 = 25 - x^2$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y จงหาค่า y ที่สมนัยกับ $x = 0, 3, 4, 5$

วิธีทำ จาก $y^2 = 25 - x^2$ ......(1)

แทนค่า $x = 0, 3, 4, 5$ ลงในสมการ (1) ก็จะได้ค่า y ตามตารางข้างล่างนี้

x	0	3	4	5
y	± 5	± 4	± 3	0

โดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์

โดเมน (Domain)	ของความสัมพันธ์ R ซึ่งเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือเซตของสมาชิกตัวแรกทั้งหมดในคู่อันดับ $(x, y) \in R$ (คือเซตของ x ทั้งหมด)
พิสัย (Range)	ของความสัมพันธ์ R ซึ่งเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือเซตของสมาชิกตัวที่สองทั้งหมดในคู่อันดับ $(x, y) \in R$ (คือเซตของ y ทั้งหมด)

ตัวอย่างที่ 2.3.6 จากตัวอย่างที่ 2.3.1

$$D = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{3, 4, 5\}$$

จากตัวอย่างที่ 2.3.3

$$D = \{2, 4, 6\}$$

$$R = \{1, 3, 7, 9\}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.7 ให้

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

ถ้ากำหนดให้ F, G, H, U, V และ W เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ดังนี้

$$F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x < y\}$$

$$G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \leqslant y\}$$

$$H = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x > y\}$$

$$U = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \geqslant y\}$$

$$V = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \neq y\}$$

$$W = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x = y\}$$

โดเมนของ F คือ $\{1, 2\}$

โดเมนของ G คือ $\{1, 2\}$

โดเมนของ H คือ $\{2\}$

โดเมนของ U คือ $\{1, 2\}$

โดเมนของ V คือ $\{1, 2\}$

โดเมนของ W คือ $\{1, 2\}$

พิสัยของ F คือ $\{2, 3\}$

พิสัยของ G คือ $\{1, 2, 3\}$

พิสัยของ H คือ $\{1\}$

พิสัยของ U คือ $\{1, 2\}$

พิสัยของ V คือ $\{1, 2, 3\}$

พิสัยของ W คือ $\{1, 2\}$

ตัวอย่างที่ 2.3.8 กำหนดให้ $F(x) = x^2-3x+5$ และโดเมน $= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ จงหาพิสัย

วิธีทำ จาก $F(x) = x^2-3x+5$

$x = -1, \quad F(-1) = (-1)^2-3(-1)+5 = 9$

$x = 0, \quad F(0) = 0-3(0)+5 = 5$

$x = 1, \quad F(1) = 1^2-3(1)+5 = 3$

$x = 2, \quad F(2) = 2^2-3(2)+5 = 3$

$x = 3, \quad F(3) = 3^2-3(3)+5 = 5$

$x = 4, \quad F(4) = 4^2-3(4)+5 = 9$

ดังนั้น พิสัยคือ $\{3, 5, 9\{$ ตอบ

ข้อสังเกต ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันจะเป็นเซตย่อยของความสัมพันธ์ แต่ความสัมพันธ์ทุกอันไม่จำเป็นต้องฟังก์ชัน คืออาจเป็นฟังก์ชัน หรือไม่เป็นฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 2.3

ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$F_1 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$

$F_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$F_3 = \{(a, 2), (b, 2)\}$

$F_4 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$F_5 = \{(a, 3), (b, 1)\}$

$F_6 = \{(2, b), (3, c)\}$

1. จงพิจารณาดูว่า F ใดบ้างที่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B
2. จงพิจารณาดูว่า F ใดบ้างที่เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A
3. จงพิจารณาดูว่า F ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B
4. จงพิจารณาดูว่า F ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A
5. ให้ $A = \{a, b, c\}$

   $B = \{c, d, e\}$

   $R = \{(a, c), (a, d), (c, e), (c, c), (b, d)\}$

   $T = \{(c, b), (d, c), (c, c), (e, a), (d, b)\}$

จงพิจารณาดูว่าต่อไปนี้ข้อใดถูกและข้อใดผิด

ก. $a R c$

ข. $c R c$

ค. $e T a$

ง. $e R c$

จ. $a T e$

ฉ. $e T e$

ช. $d R b$

ซ. $a R d$

ฌ. R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

ญ. R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

ด. T เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

ต. T เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

6. จงหาโดเมนและพิสัยของ R ในข้อ 5

7. จงหาโดเมนและพิสัยของ T ในข้อ 5

8. จงหาเซตของคู่อันดับที่ได้จากการจับคู่ระหว่างสมาชิกตัวที่ n ของ $\{2, 4, 8, 16\}$ กับสมาชิกตัวที่ $(n+1)$ ของ $\{1, 3, 7, 13, 21\}$

9. จงหาเซตของคู่อันดับที่ได้จากการจับคู่ระหว่างสมาชิกตัวที่ n ของ $\{s, h, e, e, r\}$ กับสมาชิกตัวที่ n ของ $\{c, l, i, f, f\}$

10. จงหาเซตของคู่อันดับที่ได้จากการจับคู่ระหว่างสมาชิกตัวที่ n ของ $\{b, a, s, e\}$ กับสมาชิกตัวที่ $(4-n)$ ของ $\{b, a, l, l\}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3$

11. เซตของอันดับ $\{(x, x^2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

12. เซตของคู่อันดับ $\{(x, y) \mid y^2 = x, x \in \{0, 1, 4, 9\}\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

จากข้อ 13 ถึง 16 จงหาพิสัยของฟังก์ชัน และโดเมนที่กำหนดให้

13. $f = \{(x, 2x+1)\}$; $D = \{1, 3, 5, 7\}$

14. $f = \{(x, 3x-5)\}$; $D = \{0, 1, 2, 4\}$

15. $f = \{(x, 9-x)\}$; $D = \{0, 2, 5, 9\}$

16. $f = \{(x, \sqrt{37-x^2})\}$; $D = \{12, \sqrt{3}, \sqrt{21}, 2\sqrt{7}, \sqrt{37}\}$

จากข้อ 17 ถึง 22 จงขียนคู่อันดับที่ได้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ และพิจารณาดูว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

17. $\{(x, 3x-2) \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $-1 \leq x < 3\}$

18. $\{(x, 2x+1) \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่และ $-6 < x < 0\}$

19. $\{(x, x^2-3) \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $-2 \leqslant x \leqslant 2\}$

20. $\{(x, y) \mid y = x^2-x+4,\ D = \{-1, 0, 2, 4\}\}$

21. $\{(x, y) \mid y = x^3-x^2+5,\ D = \{-1, 0, 1, 2\}\}$

22. $\{(x, y) \mid y = 5x+4,\ D = \{-3, -1, 0, 1, 2\}\}$

จากข้อ 23 ถึง 25 จงหา $f \cup g$ และ $f \cap g$

23. $f = \{(x, x-2)\},\ g = \{(x, 2x+1)\},\ D = \{-3, -1, 3, 5\}$

24. $f = \{(x, x+1)\},\ g = \{x, 2x-3)\},\ D = \{-4, -2, 1, 4\}$

25. $f = \{(x, 3x^2+2x-3)\},\ g = \{(x, 2x^2+x-1)\}\ D = \{-2, -1, 0, 1]$
