เฉลยแบบฝึกหัด 6.1

ข้อ 1 นักศึกษามีวิธีเลือกประตูเพื่อเดินเข้าตึก NB. 3A ได้ 4 วิธี หลังจากเข้าไปในตึก NB.3A แล้ว จะมีวิธีเลือกประตูเพื่อเข้าไป NB.3B ได้อีก 2 วิธี ดังนั้น นักศึกษาจะมีวิธีเข้าตึก NB.3B โดยผ่าน NB.3A ได้

4×2

$= 8$ วิธี

ข้อ 2

มีวิธีเลือกเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปยังอยุธยาได้	4 วิธี
จากอยุธยา เดินทางต่อไปยังสระบุรี ได้	2 วิธี
จากสระบุรี เดินทางต่อไปยังนครสวรรค์ ได้	3 วิธี
จากนครสวรรค์ เดินทางต่อไปยังตาก ได้	5 วิธี
จากตาก เดินทางต่อไปยัง เชียงใหม่ ได้	1 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปยังเชียงใหม่ได้ทั้งหมด

$4 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1 = 120$ วิธี

ข้อ 3

ขาเข้ามีวิธีเลือก ประตูเข้าได้ 2 วิธี

ขาออกมีวิธีเลือก ประตูออกได้ 1 วิธี (เพราะใช้ประตูเดิมไม่ได้)

ดังนั้น จะมีวิธีเข้าและออกจากห้องนี้ได้ทั้งหมด $2 \times 1 = 2$ วิธี

ข้อ 4

นักศึกษาจะมีวิธีเลือกกางเกง (ซึ่งมีอยู่ 4 ตัว) ได้ทั้งหมด 4 วิธี หลังจากเลือกกางเกงแต่ละตัวแล้ว จะมีวิธีเลือกเสื้อ (ซึ่งมีอยู่ 7 ตัว) ได้อีก 7 วิธี

ดังนั้นนักศึกษาผู้นี้จะมีวิธีเลือกเสื้อและกางเกงเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมด $4 \times 7 = 28$ วิธี (ชุด)

ข้อ 5

นักศึกษาจะมีวิธีเลือกตอบ ข้อสอบที่ 1 ได้ 2 วิธี (คือถูก กับ ผิด)
หลังจากเลือกตอบข้อ 1 แล้ว จะมีวิธีเลือกตอบข้อที่ 2 ได้อีก 2 วิธี
หลังจากเลือกตอบข้อ 2 แล้ว จะมีวิธีเลือกตอบข้อที่ 3 ได้อีก 2 วิธี
หลังจากเลือกตอบข้อ 3 แล้ว จะมีวิธีเลือกตอบข้อที่ 4 ได้อีก 2 วิธี
หลังจากเลือกตอบข้อ 4 แล้ว จะมีวิธีเลือกตอบข้อที่ 5 ได้อีก 2 วิธี
ดังนั้น นักศึกษาจะมีวิธีเลือกตอบข้อสอบ ทั้ง 5 ข้อนั้น ได้ต่าง ๆ กันทั้งหมด $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ วิธี

ข้อ 6

ต้องใช้รองเท้าทั้งหมด $6 \times 2 \times 10 = 120$ คู่

ข้อ 7

ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อม ๆ กัน จะมีวิธีได้ ต่าง ๆ ทั้งหมดเป็น $6 \times 6 = 36$ วิธี คือ
(ให้ (x, y) แทนว่าลูกเต๋าลูกแรกออกแต้ม x ลูกเต๋าลูกที่สองออกแต้ม y)

คือ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

ข้อ 8

สมมุติให้หมายเลขทั้ง 7 ตัว โดยขึ้นต้นด้วย 377 คือ $377x_1x_2x_3x_4$ สำหรับเลขที่เราจะเลือกแทน x_1, x_2, x_3, x_4 นั้น ก็คือเลข 0 ถึง 9 (รวม 10 ตัว)

เรามีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 จากเลข 0 ถึง 9 ได้ทั้งหมด 10 วิธีต่าง ๆ กัน

เรามีวิธีเลือกเลขมาแทน x_2 จากเลข 0 ถึง 9 ได้ทั้งหมด 10 วิธีต่าง ๆ กัน

เรามีวิธีเลือกเลขมาแทน x_3 จากเลข 0 ถึง 9 ได้ทั้งหมด 10 วิธีต่าง ๆ กัน

เรามีวิธีเลือกเลขมาแทน x_4 จากเลข 0 ถึง 9 ได้ทั้งหมด 10 วิธีต่าง ๆ กัน ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 x_2 x_3 x_4 ได้ทั้งหมด

$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10{,}000$ วิธี

นั่นคือ จะมีหมายเลขโทรศัพท์ ซึ่งประกอบด้วยเลข 7 ตัว โดยสามตัวแรกเป็น 377 ทั้งหมด 10,000 หมายเลข

ข้อ ๙

สมมุติเลขหลักสิบนั้นคือ x_1 x_2

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 จากเลขที่กำหนดมาให้ 4 ตัวได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_2 จากเลขที่เหลืออีก 3 ตัวได้ 3 วิธีต่าง ๆ กัน ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเลขได้ทั้งหมด $4 \times 3 = 12$ วิธี

นั่นคือ จะมีเลขหลักสิบ ที่ประกอบด้วยเลข 3, 4, 5, 6 โดยไม่ใช้เลขซ้ำกันเลยได้ทั้งหมด 12 จำนวน

(ลองเขียนดูจะได้ว่า มีจำนวน 34, 35, 36, 45, 46, 56, 43, 53, 63, 54, 64, 65, รวม 12 จำนวน)

ข้อ 10

สมมุติเลขหลักร้อย คือ $x_1 x_2 x_3$

มีข้อน่าสังเกตว่า เลขหลักร้อยที่เขียนเป็น $x_1 x_2 x_3$ นั้น x_1 จะเป็นเลข 0 ไม่ได้ เพราะถ้า x_1 เป็น 0 แล้ว จะไม่ใช่เลขหลักร้อย (จะเป็นหลักสิบ)

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 จากเลขที่กำหนดมาให้ 5 ตัว ได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน (ไม่เลือก 0)

เราจะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_2 จากเลขที่เหลืออีก 4 ตัวได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_3 จากเลขที่เหลืออีก 3 ตัวได้ 3 วิธีต่าง ๆ กัน

ดังนั้นจะมีวิธีเลือกเลขได้ทั้งหมด $4 \times 4 \times 3 = 48$ วิธี

นั่นคือ จำนวนหลักร้อยที่ประกอบด้วยเลข 0, 1, 2, 3, 4 โดยไม่ใช้เลขซ้ำกันเลยได้ 48 จำนวน

ข้อ 11

เราจะมีวิธีเดินทางไปถึงจุดสิ้นสุดได้ทั้งหมด 4 วิธี คือ

ABC, ABDE, ADBC, ADE

เฉลยแบบฝึกหัด 6.2

ข้อ 1

1.1) $\dfrac{8!}{4!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1680$

1.2) $\dfrac{10!}{12!} = \dfrac{10!}{12 \times 11 \times 10!} = \dfrac{1}{132}$

1.3) $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100 \times 99 \times 98!}{98!} = 9900$

1.4) $\dfrac{15!\ 12!}{13!\ 10!} = \dfrac{15 \times 14 \times 13! \times 12 \times 11 \times 10!}{13! \times 10!}$

$= 21,720$

1.5) $\dfrac{10!}{7!\ 2!\ 1!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2 \times 1 \times 1} = 360$

1.6) $\dfrac{5!\ 6!}{3!\ 4!\ 5!} = \dfrac{5! \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4! \times 5!} = 5$

1.7) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

1.8) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)(n!)}{n!}$

$= (n+2)(n+1)$

$= n^2 + 3n + 2$

1 9) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}$

$= (n+1)(n)$

$= n^2 + n$

1 10) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$

$= (n+3)(n+2)$

$= n^2 + 5n + 6$

ข้อ 2 จาก $\frac{n!}{(n-1)!} = 6$

$\therefore \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 6$

ดังนั้น $n = 6$

ข้อ 3

จาก $\frac{(n+2)!}{n!} = 6$

$\therefore \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 6$

$n^2 + 3n + 2 = 6$

$n^2 + 3n - 4 = 0$

$(n+4)(n-1) = 0$

$\therefore n = 1, -4$

อนึ่ง จากนิยามนั้นให้ไว้เฉพาะ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น
ดังนั้น ค่า n ที่เป็นลบ จึงไม่ใช้
ดังนั้น จึงได้ว่า

$n = 1$

ข้อ 4

จาก $$\frac{n!}{(n-4)!} = 42\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 42\frac{n!}{n!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 42$$

$$n^2 - 5n + 6 = 42$$

$$n^2 - 5n - 36 = 0$$

$$(n-9)(n+4) = 0$$

$$n = 9, -4$$

ใช้เฉพาะค่าที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n = 9$

ข้อ 5

จาก $$2\frac{n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$\frac{2n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!}$$

$$2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n$$

$$2n^2 = 50$$

$$n^2 = 25$$

$$\therefore n = \pm 5$$

ดังนั้น $n = 5$

ข้อ 6

จาก $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

$$\therefore \quad n = 9, -8$$

ดังนั้น $n = 9$

ข้อ 7

7.1) $15 \times 14 \times 13 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 15!$

7.2) $10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$$= \frac{10!}{6!}$$

7.3) $10 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{10!\,6!}{7!\,3!}$

7.4) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$

$$= \frac{n!}{(n-4)!}$$

7.5) $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 6.3

ข้อ 1

1.1) $${}^{10}P_7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!}$$

$$= 604{,}800$$

1.2) $${}^{12}P_{10} = \frac{12!}{(12-10)!} = \frac{12!}{2!}$$

$$= \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!}$$

$$= 239{,}500{,}800$$

1.3) $${}^{100}P_2 = \frac{100!}{(100-2)!} = \frac{100 \times 99 \times 98!}{98!}$$

$$= 9900$$

1.4) $${}^{5}P_1 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

1.5) $${}^{5}P_0 = \frac{5!}{(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

1.6) $$\binom{6}{3,\ 2,\ 1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1 \times 1} = 60$$

1.7) $$\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= 2520$$

ข้อ 2

2.1) $n = 7,\ r = 3$

$$\therefore \quad {}^{7}P_{3} = \frac{7\,!}{(7-3)\,!} = \frac{7\,!}{4\,!} = 210$$

นั่นคือ จะมีวิธีจัดคน 3 คนเข้านั่งเก้าอี้ซึ่งมี 7 ตัวได้ 210 วิธีต่าง ๆ กัน

2.2) $n = 7,\ r = 5$

$$\therefore \quad {}^{7}P_{5} = \frac{7\,!}{(7-5)\,!} = \frac{7\,!}{2\,!} = 2520$$

นั่นคือ จะมีวิธีจัดคน 5 คน เข้านั่งเก้าอี้ซึ่งมี 7 ตัวได้ 2520 วิธีต่าง ๆ กัน

2.3) $n = 7,\ r = 7$

$$\therefore \quad {}^{7}P_{7} = \frac{7\,!}{(7-7)\,!} = \frac{7\,!}{0!} = 7\,! = 5040$$

นั่นคือจะมีวิธีจัดคน 7 คนเข้านั่งเก้าอี้ซึ่งมี 7 ตัวได้ 5040 วิธีต่าง ๆ กัน

ข้อ 3

จากคำว่า "EDUCATION" มีอักษรทั้งหมด 9 ตัว
เป็นสระ 5 ตัว กับพยัญชนะอีก 4 ตัว

3.1) $n = 5,\ r = 4$

$$\therefore \quad {}^{5}P_{4} = \frac{5\,!}{(5-4)\,!} = \frac{5\,!}{1\,!} = 120$$

นั่นคือ จะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัว ซึ่งเป็นสระล้วน ๆ ได้ 120 วิธี

3.2) สมมุติว่าอักษรทั้ง 4 ตัวคือ $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

เราต้องการให้ x_1 เป็นสระ

ดังนั้นจะมีวิธีเลือกสระจากสระ 5 ตัว มาแทน x_1 ได้

$$^5P_1 = \frac{5\,!}{(5-1)\,!} = 5 \text{ วิธี}$$

หลังจากนั้นจะเหลืออักษรอีก 8 ตัว ซึ่งเราจะเลือกมา 3 ตัว จะมีวิธีเลือก

$$^8P_3 = \frac{8\,!}{(8-3)\,!} = \frac{8\,!}{5\,!} = 336$$

นั่นคือจะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัว โดยอักษรตัวแรกต้องเป็นสระ ได้

$^5P_1 \quad {}^8P_3 = 5 \times 336 = 1680$ วิธี

3.3) ต้องขึ้นต้นด้วยอักษร D

แสดงว่า x_1 ต้องเป็น D และมีวิธีเลือก x_1 ได้ 1 วิธีเท่านั้น

หลังจากนั้นจะเหลืออักษรอีก 8 ตัว เราจะเลือกมา 3 ตัว จะมีวิธีเลือก

$$^8P_3 = 336 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ จะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัว โดยตัวแรกต้องเป็นตัว D ได้

$^1P_1 \cdot {}^8P_3 = 336$ วิธี

3.4) ลงท้ายด้วยอักษร E

ในทำนองคล้ายกันกับ 3.3) จะได้ว่า จะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัวโดยตัวท้ายต้องเป็น E ได้

$^8P_3 \quad {}^1P_1 = 336$ วิธี

3.5) จะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัวโดยขึ้นต้นด้วยตัว D และลงท้ายด้วย E ได้

$^1P_1 \cdot {}^7P_2 \cdot {}^1P_1 = 42$ วิธี

ข้อ 4

จากคำว่า "THAI" มีอักษร 4 ตัว

ดังนั้น $n = 4$, $r = 3$ จัดโดยใช้อักษรซ้ำกันได้

จะมีวิธีจัดได้ $4^3 = 64$ วิธี

ข้อ 5

จาก มีธงแดง 6 ธง, น้ำเงิน 4 ธง และเขียว 2 ธง แสดงว่ามีธงรวมทั้งหมด 12 ธง ซึ่งมี 3 สี มีจำนวนซ้ำกันดังกล่าว

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลำดับธงในแนวดิ่งได้

$$= \frac{12!}{6!4!2!} = 13,860 \text{ วิธี}$$

ข้อ 6

6.1) จากคำว่า "COMMITTEE" มีอักษรทั้งหมด 9 ตัว โดยเป็น

อักษร C จำนวน 1 ตัว

อักษร O " 1 ตัว

อักษร M " 2 ตัว

อักษร I " 1 ตัว

อักษร T " 2 ตัว

อักษร E " 2 ตัว

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลำดับทั้งหมด

$$\binom{9}{1, 1, 2, 1, 2, 2,} = \frac{9!}{1!1!2!1!2!2!} = 45,360 \text{ วิธี}$$

6.2) จากคำว่า "GARANTEE" มีอักษรทั้งหมด 8 ตัว โดยเป็น

อักษร G จำนวน 1 ตัว

อักษร A " 2 ตัว

อักษร R " 1 ตัว

อักษร N " 1 ตัว

อักษร T " 1 ตัว

อักษร E " 2 ตัว

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลำดับทั้งหมด

$$\binom{8}{1,2,1,1,1,2} = \frac{8!}{1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,2!} = 10,080 \text{ วิธี}$$

6.3) จากคำว่า "SORRY" มีอักษรทั้งหมด 5 ตัว โดยเป็น

อักษร S จำนวน 1 ตัว

อักษร O " 1 ตัว

อักษร R " 2 ตัว

อักษร Y " 1 ตัว

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลำดับทั้งหมด

$$\binom{5}{1,1,2,1} = \frac{5!}{1!\,1!\,2!\,1!} = 60 \text{ วิธี}$$

6.4) จากคำว่า "งง งวย" มีอักษรทั้งหมด 5 ตัว โดยเป็น

อักษร ง จำนวน 3 ตัว

อักษร ว " 1 ตัว

อักษร ย " 1 ตัว

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลำดับทั้งหมด

$$\binom{5}{3,1,1} = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20\%$$

ข้อ 7

หนังสือ 3 ประเภทนั้น รวมกันแล้วเป็น 12 เล่ม โดย

ประเภทที่ 1 มี 5 เล่ม

ประเภทที่ 2 มี 3 เล่ม

ประเภทที่ 3 มี 4 เล่ม

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด

$$\binom{12}{5,3,4,} = \frac{12!}{5!\,3!\,4!} = 27{,}720 \text{ วิธี}$$

ข้อ 8

จากข้อ 7 ถ้ากำหนดว่าหนังสือประเภทเดียวกันจะต้องอยู่ด้วยกันจะจัดได้ทั้งหมด

5! 3! 4! 3! วิธี

โดย 5! ได้จากการเรียงลำดับกันของหนังสือประเภทที่หนึ่ง

3! ได้จากการเรียงลำดับกันของหนังสือประเภทที่สอง

4! ได้จากการเรียงลำดับกันของหนังสือประเภทที่สาม

3! ได้จากการเรียงลำดับของหนังสือแต่ละประเภทซึ่งมี 3 ประเภท

ซึ่ง $5!\,3!\,4!\,3! = 103{,}680$

ดังนั้น เราจะมีวิธีจัดได้ 103,680 วิธี

ข้อ 9 $n = 5,\ r = 2$

$\therefore\ {}^{5}P_{2} = \frac{5\,!}{(5-2)\,!} = \frac{5\,!}{3\,!} = 20$

ดังนั้นจะมีวิธีจัดทีมซึ่งมี 2 คน จากนักแบดมินตัน 5 คน โดยจัดเป็นมือหนึ่งกับมือสองได้ 20 วิธี

ข้อ 10 $n = 5,\ r = 5$

$\therefore\ {}^{5}P_{5} = \frac{5\,!}{(5-5)\,!} = \frac{5\,!}{0\,!} = 5\,! = 120$

ดังนั้น จะมีวิธีที่นักวิ่งแข่งทั้ง 5 คนเข้าเส้นชัยโดยไม่พร้อมกันเลยได้ 120 วิธี

ข้อ 11 $n = 6,\ r = 6$

$\therefore\ {}^{6}P_{6} = 6! = 720$

ดังนั้น จะมีวิธีเรียงลำดับขั้นการทำสินค้าชนิดนั้นได้ทั้งหมด 720 วิธี

ข้อ 12

สมมุติเลขสามหลัก (หลักร้อย) นั้นเขียนเป็น $x_1\, x_2\, x_3$ เลขที่นำมาใช้เรียงคือ 0, 1, 2, 3

12.1) เรียงโดยใช้อักษรซ้ำกันไม่ได้

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 ได้ 3 วิธี (0 ใช้ไม่ได้)

และจะมีวิธีเลือกเลขที่เหลืออีก 3 ตัว มาแทน x_2 ได้ 3 วิธี

และจะมีวิธีเลือกเลขที่เหลืออีก 2 ตัว มาแทน x_2 ได้ 2 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเลขสามหลัก (หลักร้อย) จากเลข 0, 1, 2, 3 โดยไม่ใช้เลขซ้ำกันเลย

ได้ทั้งหมด $3 \times 3 \times 2$ (หรือเท่ากับ ${}^{3}P_{1}\, {}^{3}P_{2}$) $= 18$ วิธี

และจะพิจารณาต่อไปว่า ในจำนวนเหล่านี้มีจำนวนที่มากกว่า 200 อยู่กี่จำนวน

สมมุติว่า จำนวนที่มากกว่า 200 นั้น เขียนได้เป็น $x_1\, x_2\, x_3$

นั่นแสดงว่า x_1 ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 ได้ ${}^{2}P_{1} = 2$ วิธี

และจะมีวิธีเลือกเลขที่เหลือมาแทน $x_2\ x_3$ ได้ ${}^3P_2 = 6$ วิธี

ดังนั้นจะมีจำนวนที่มากกว่า 200 อยู่ 12 จำนวน

12.2) โดยใช้อักษรซ้ำกันได้

จะมีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 ได้ 3 วิธีเช่นกัน

และจะมีวิธีเลือกเลขมาแทน $x_2\ x_3$ ได้ 4^2 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเลขสามหลัก (หลักร้อย) จากเลข 0, 1, 2, 3 โดยใช้เลขซ้ำกันได้

ทั้งหมด $3 \times 4^2 = 48$ วิธี

และมีจำนวนที่มากกว่า 200 อยู่ $2 \times 4^2 = 32$ วิธี

ข้อ 13

จากจำนวน "323423" มีเลข 6 ตัว

โดยมีเลข 3 ซ้ำกัน 3 ตัว

มีเลข 2 ซ้ำกัน 2 ตัว

มีเลข 4 ซ้ำกัน 1 ตัว

ดังนั้นจะมีวิธีจัดลำดับเลขได้ทั้งหมดเป็น $\binom{6}{3,\ 2,\ 1} = \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!}$

$= 60$ วิธี

ข้อ 14

จากคนทั้งหมด 8 คน

จะจัดให้โดยสารรถไฟชั้นที่หนึ่ง 2 คน

จะจัดให้โดยสารรถไฟชั้นที่สอง 2 คน

จะจัดให้โดยสารรถไฟชั้นที่สาม 4 คน

ดังนั้นจะมีวิธีจัดได้

$\binom{8}{2,\ 2,\ 4} = \frac{8\,!}{2!\ 2!\ 4!} = 420$ วิธี

ข้อ 15

จะมีวิธีจัดทั้งหมด $\frac{300!}{60!\,60!\,45!\,45!\,30!\,30!\,30!}$ วิธี

ข้อ 16

ในที่นี้ $n = 9,\ m_1 = 4,\ m_2 = 2,\ m_3 = 3$

$$\therefore \binom{9}{4,2,3} = \frac{9!}{4!\,2!\,3!} = 1260$$

ดังนั้น จะมีวิธีทอดลูกเต๋า 9 ครั้ง แล้วได้แต้มสอง 4 ครั้ง แต้มสาม 2 ครั้ง, แต้มห้า 3 ครั้ง ได้ทั้งหมด 1260 วิธี

ข้อ 17

17.1) ข้อ 2. $^nP_2 = \mathbf{24}$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \mathbf{12}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 12$$

$$n - n - 12 = 0$$

$$(n-4)(n+3) = 0$$

$$\therefore n = 4, -3$$

เราใช้เฉพาะค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n = 4$

17.2) จาก $^nP_2 = \mathbf{72}$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 72$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

$$\therefore\ n = 9, -8$$

เราใช้เฉพาะค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n = 9$

17.3) จาก $42.\,{}^nP_2 = {}^nP_4$

$$\frac{42\,n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{42\,n!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-4)!}$$

$$42 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$\therefore\ n^2 \quad 5n \quad 36 = 0$$

$$(n-9)(n+4) = 0$$

$$\therefore\ n = 9, -5$$

เราใช้เฉพาะค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n = 9$

17.4) จาก ${}^{2n}P_2 = 2.\,{}^nP_2 + 50$

$$\frac{(2n)!}{(2n-2)!} = \frac{2n!}{(n-2)!} + 50$$

$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!} = \frac{2n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + 50$$

$$4n^2 - 2n = 2n^2 - 2n + 50$$

$$2n^2 = 50$$

$$n^2 = 25$$

$$\therefore\ n = \pm 5$$

ใช้เฉพาะค่า n ทีเป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $n = 5$

ข้อ 18

จะมีวิธีจัดคน 7 คนเข้านั่งประชุมโต๊ะกลมได้

$(7 - 1)! = 6! = 720$ วิธี

ข้อ 19

จะมีวิธีจัดเด็ก 8 คน เข้านั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมได้

$(8 - 1)! = 7! = 5040$ วิธี

ข้อ 20

มีคน 8 คน นำมาจัดแปรลำดับแบบวงกลมโดยให้นาย ก. กับนาย ข. อยู่ติดกันเสมอ จึงคิดเสียว่ามีคน 7 คน ซึ่งจัดได้ $(7 - 1)! = 6!$ แต่ทว่า นาย ก. กับนาย ข. คู่นี้ยังสามารถนั่งสลับกันได้อีก 2 วิธี

ดังนั้นมีคน 8 คน นำมาจัดแปรลำดับแบบวงกลมโดยให้นาย ก. กับนาย ข. อยู่ติดกันเสมอ ได้ทั้งหมด $2 \times 6! = 1440$ วิธี

เฉลยแบบฝึกหัด 6.4

ข้อ 1

1.1) $${}^{10}C_7 = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10}{7!\,3!} = 120$$

1.2) $${}^{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

1.3) $${}^{20}C_{18} = \frac{20}{18!\,2!} = 190$$

1.4) $${}^{10}C_{10} = \frac{10!}{10!\,(10-10)!} = \frac{10!}{10!\,0!} = 1$$

1.5) $${}^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

ข้อ 2 $n = 6,\ r = 2$

$$\therefore\ {}^{6}C_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

ดังนั้นจะมีวิธีจัดคน 6 คน ออกเป็นกลุ่ม ๆ กลุ่มละ 2 คนได้ 15 วิธีต่าง ๆ กัน

ข้อ 3

จะมีวิธีเลือกชาย 3 คน จากผู้ชายทั้งหมด 8 คนได้ ${}^{8}C_3$ วิธี
จะมีวิธีเลือกหญิง 2 คน จากผู้หญิงทั้งหมด 5 คนได้ ${}^{5}C_2$ วิธี
ดังนั้น จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยชาย 3 คน และหญิง 2 คน จากผู้ชายทั้งหมด 8 คน ผู้หญิงทั้งหมด 5 คนได้

$${}^{8}C_3\ {}^{5}C_2 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}\ \frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$

$$\frac{8!}{3!\,5!}\ \frac{5!}{2!\,3!} = 560 \text{ วิธี}$$

ข้อ 4

จะมีวิธีเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 6 คนได้ ${}^{6}C_3$ วิธี
จะมีวิธีเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียน 6 คนได้ ${}^{6}C_4$ วิธี
จะมีวิธีเลือกนักเรียน 5 คน จากนักเรียน 6 คนได้ ${}^{6}C_5$ วิธี
จะมีวิธีเลือกนักเรียน 6 คน จากนักเรียน 6 คนได้ ${}^{6}C_6$ วิธี
ดังนั้น จะมีวิธีเลือกนักเรียน 3 คน หรือมากกว่านั้น จากนักเรียนทั้งหมด 6 คนได้ ${}^{6}C_3 + {}^{6}C_4 + {}^{6}C_5 + {}^{6}C_6 = 20 + 15 + 6 + 1$
$= 42$ วิธี

ข้อ 5

5.1) จะมีวิธีเชิญเพื่อนมา 5 คน จากเพื่อนทั้งหมด 8 คนได้ ${}^{8}C_5$ และ

$${}^{8}C_5 = \frac{8!}{5!\,3!} = 56 \text{ วิธี}$$

5.2) มีคนที่แต่งงานแล้ว 2 คน และต้องเชิญมาด้วย จึงเหลือเชิญเพื่อนอื่น ๆ อีก 4 คน จากเพื่อนที่เหลือ 6 คน
ดังนั้นจะมีวิธีเชิญเพื่อนมา 6 คน จากเพื่อน 8 คน ซึ่งมีคนแต่งงานแล้ว 2 คน จะต้องเชิญมาด้วย จึงมีวิธีเชิญได้ ${}^{2}P_2 \cdot {}^{6}P_4 = 1 \times 15 = 15$ วิธี

ข้อ 6 มีข้อสอบ 10 ข้อ ให้เลือกทำ 5 ข้อ

6.1) จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบ 5 ข้อ จากข้อสอบ 10 ข้อได้ ${}^{10}C_5$ และ

$${}^{10}C_5 = \frac{10!}{5!\,5!} = 252 \text{ วิธี}$$

6.2) ถ้าต้องตอบ 2 ข้อแรก

จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมด $${}^{8}C_3 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \text{ วิธี}$$

6.3) ถ้าต้องตอบ 2 คำถามจาก 5 คำถามแรก (นั่นคือ จะต้องตอบอีก 3 คำถาม จาก 5 คำถามหลัง)

จะมีวิธีเลือกตอบได้ทั้งหมด $^5C_2 \cdot {}^5C_3 = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!}$

$= 100$ วิธี

6.4) จะต้องตอบอย่างน้อย 4 คำถาม จาก 5 คำถามแรก

จะมีวิธีตอบ 4 คำถามจาก 5 คำถามแรกได้ $^5C_4 \cdot {}^5C_1$

(คือต้องตอบอีก 1 คำถามจาก 5 คำถามหลัง)

$$= \frac{5!}{4!\,1!} \quad \frac{5!}{1!\,4!} = 25 \text{ วิธี}$$

และจะมีวิธีตอบ 5 คำถามจาก 5 คำถามแรก (คือไม่ตอบ 5 คำถามหลัง)

ได้ $^5C_5 \cdot {}^5C_0 = \frac{5!}{5!\,0!} \cdot \frac{5!}{0!\,5!} = 1$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีตอบอย่างน้อย 4 คำถาม จาก 5 คำถามแรกได้ทั้งหมด

$25 + 1 = 26$ วิธี

ข้อ 7

มีจุดทั้งหมด 6 จุด โดยไม่มีจุด 3 จุดใด ๆ อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

7.1) จะมีวิธีลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดได้ ${}^{6}C_{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$ เส้น

7.2) จะมีสามเหลี่ยมได้ทั้งหมด ${}^{6}C_{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$ รูป

7.3) จะมีสี่เหลี่ยมได้ทั้งหมด ${}^{6}C_{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ วิธี

ข้อ 8

จะมีวิธีเลือกซื้อเสื้อได้ทั้งหมด ${}^{6}C_{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ วิธี

ข้อ 9

จะมีวิธีจัดนักฟุตบอลลงแข่งขันได้ ${}^{15}C_{11} = \frac{15!}{11!\,4!} = 1365$ วิธี

ข้อ 10

ในกล่องมีบอลทั้งหมด 9 ลูก
เป็นสีแดง 4 ลูก, สีดำ 3 ลูก, สีขาว 2 ลูก
หยิบออกมาครั้งละ 2 ลูก

10.1) จะมีวิธีหยิบได้บอลสีแดงทั้ง 2 ลูกได้ ${}^{4}C_{2} \cdot {}^{3}C_{0} \cdot {}^{2}C_{0}$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{3!}{0!\,3!} \cdot \frac{2!}{0!\,2!}$$

$= 6$ วิธี

หมายเหตุ

${}^{4}C_{2}$ หมายถึง มีบอลแดง 4 ลูก หยิบมา 2 ลูก

${}^{3}C_{0}$ หมายถึง มีบอลดำ 3 ลูก หยิบมา 0 ลูก คือไม่หยิบมาเลย

${}^{2}C_{0}$ หมายถึง มีบอลขาว 2 ลูก ไม่หยิบมาเลย

10.2) จะมีวิธีหยิบได้บอลสีดำทั้ง 2 ลูกได้ ${}^4C_0 \cdot {}^3C_2 \cdot {}^2C_0$

$$= \frac{4!}{0!\,4!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{2!}{0!\,2!}$$

$= 1 \times 3 \times 1 = 3$ วิธี

10.3) จะมีวิธีหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก สีดำ 1 ลูกได้ ${}^4C_1 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^2C_0$

$= 4 \times 3 \times 1 = 12$ วิธี

10.4) จะมีวิธีหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก, สีขาว 1 ลูกได้ ${}^4C_1 \cdot {}^3C_0 \cdot {}^2C_1$

$= 4 \times 1 \times 2 = 8$ วิธี

10.5) จะมีวิธีหยิบได้บอลดำ 1 ลูก, ขาว 1 ลูกได้ ${}^4C_0 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^2C_1$

$= 1 \times 3 \times 2 = 6$ วิธี

10.6) หยิบได้บอลแดง 1 ลูก อาจแยกเป็น

หยิบได้บอลแดง 1 ลูกกับดำ 1 ลูก หรือ หยิบได้บอลแดง 1 ลูกกับขาว 1 ลูก

ดังนั้นวิธีที่จะหยิบได้บอลแดง 1 ลูกเป็น ${}^4C_1 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^2C_0 + {}^4C_1 \cdot {}^3C_0 \cdot {}^2C_1$

$= (4 \times 3 \times 1) + (4 \times 1 \times 2) = 20$ วิธี

10.7) ได้บอลแดงอย่างน้อย 1 ลูก คืออาจได้บอลแดง 1 ลูกเท่านั้น กับได้บอลแดงทั้ง 2 ลูก จากผลในข้อ 10.6) กับข้อ 10.1) จะได้ว่า

จะมีวิธีหยิบได้บอลแดงอย่างน้อย 1 ลูกได้ $20 + 6 = 26$ วิธี

ข้อ 11

จากเซ็ต A เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ 6 อีลีเมนต์

11.1) ดังนั้น สับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 1 อีลีเมนต์จะมี ${}^6C_1 = \frac{6!}{1!\,5!} = 6$ เซ็ต

11.2) ดังนั้นสับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 2 อีลีเมนต์จะมี ${}^6C_2 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$ เซ็ต

11.3) ดังนั้นสับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 4 อีลีเมนต์จะมี ${}^6C_4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ เซ็ต

11.4) ดังนั้นสับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 5 อีลีเมนต์จะมี ${}^6C_5 = \frac{6!}{5!\,1!} = 6$ เซ็ต

11.5) ดังนั้นสับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 6 อีลีเมนต์จะมี ${}^{6}C_6 = \frac{6!}{6!\,0!} = 1$ เซ็ต

ข้อ 12

12.1) จาก ${}^{n}C_4 = {}^{n}C_2$

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{4!\,n!}{2!\,n!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 12$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

$$\therefore n = 6, -1$$

นั่นคือ $n = 6$

12.2) $n = 12$

12.3) จาก ${}^{n+1}P_3 = {}^{n}P_4$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-4)!}$$

$$n^3 - n = n^4 \quad 6n^3 + 11n^2 - 6n$$

$$n^4 - 7n^3 + 11n^2 - 5n = 0$$

$$n(n^3 - 7n^2 + 11n - 5) = 0$$

$$n(n-1)(n^2 - 6n + 5) = 0$$

$$n(n-1)(n-5)(n-1) = 0$$

$\therefore\ n = 0, 1, 5$

จากสูตร ^nP_r , $r \leqslant n$

ดังนั้นค่า n ที่มากกว่า หรือ เท่ากับ r ก็คือ 5 ค่าเดียว

นั่นคือ $n = 5$

12.4) $n = 20$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7

ข้อ 1

1.1) $(3a+2b)^4 = {}^4C_0\,(3a)^{4-0}\,(2b)^0 + {}^4C_1\,(3a)^{4-1}\,(2b)$
$+ {}^4C_2\,(3a)^{4-2}\,(2b)^2 + {}^4C_3\,(3a)^{4-3}\,(2b)^3$
$+ {}^4C_4\,(3a)^{4-4}\,(2b)^4$
$= \frac{4!}{0!\,4!}\,(81a^4) + \frac{4!}{1!\,3!}\,(27a^3)\,(2b) + \frac{4!}{2!\,2!}$
$(9a^2)\,(4b^2) + \frac{4!}{3!\,1!}\,(3a)\,(8b^3) + \frac{4!}{4!\,0!}\,(16b^4)$

$\therefore (3a+2b)^4 = 81a^4 + 216a^3b + 216a^2b^2 + 96\,ab' + 16b^4$

1.2) $(\frac{a}{2} - b)'' = \frac{a^5}{32} - \frac{5a^4b}{16} + \frac{5}{4}a^3b^2 - \frac{5}{2}a^2b^3 + \frac{5}{2}ab^4 \quad b^5$

1.3) $(a^2-2)^4 = {}^4C_0\,(a^2)^{4-0}\,(-2)^0 + {}^4C_1\,(a^*)''\,(-2)^1 + {}^4C_2\,(a^2)^{4-2}$
$(-2)^2 + {}^4C_3\,(a^2)^{4-3}\,(-2)^3 + {}^4C_4\,(a^2)^{4-4}\,(-2)^4$
$= \frac{4!}{0!\,4!}\,(a^8) + \frac{4!}{1!\,3!}\,(a^6)\,(-2) + \frac{4!}{2!\,2!}\,(a^4)\,(4)$

$+ \frac{4!}{3!\,1!}\,(a^2)\,(-8) + \frac{4!}{4!\,0!}\,(16)$

$\therefore (a' - 2)^4 = a^* - 8a^6 + 24a^4 - 32a^2 + 16$

1.4) $(a + \frac{2}{a})^3 = {}^3C_0 (a)^{3-0} (\frac{2}{a})^0 + {}^3C_1 (a)^{3-1} (\frac{2}{a})$

$+ {}^3C_2 (a)^{3-2} (\frac{2}{a})^2 + {}^3C_3 (a)^{3-3} (\frac{2}{a})^3$

$= \frac{3!}{0!\,3!} (a^3) + \frac{3!}{1!\,2!} (a^2) (\frac{2}{a}) + \frac{3!}{2!\,1!} (a) (\frac{4}{a^2})$

$+ \frac{3!}{3!\,0!} (\frac{8}{a^3})$

$\therefore (a + \frac{2}{a})^3 = a^3 + 6a + \frac{12}{a} + \frac{8}{a^3}$

ข้อ 2

จาก $(x - 3)^8$

$\therefore$ เทอมที่ไม่มี x ร่วมอยู่เลยคือ ${}^8C_8 (x)^{8-8} (-3)^8 = \frac{8!}{8!\,0!} x^0 (-3)^8$

$= 6561$

ข้อ 3 จาก $(a - b)^9$

เทอมที่มี a^4b^5 อยู่ด้วยคือ ${}^9C_5 (a)^{9-5} (-b)^5$

$= \frac{9!}{5!\,4!} (a^4) (-b^5)$

$= -126\, a^4b^5$

ข้อ 4 จาก $(1.02)^5 = (1 + 0.02)^5$

$\therefore (1 + 0.02)^5 = {}^5C_0 (1)^{5-0} (0.02)^0 + {}^5C_1 (1)^{5-1} (0.02)$

$+ {}^5C_2 (1)^{5-2} (0.02)^2 + {}^5C_3 (1)^{5-3} (0.02)^3 + \ldots$

$= \frac{5!}{0!\,5!} + \frac{5!}{1!\,4!} (0.02) + \frac{5!}{2!\,3!} (0.0004)$

$= \frac{5!}{3!\,2!} (.000008) + \ldots$

$= 1 + 0.10 + 0.004 + 0.00002 + \ldots$

$\therefore (1.02)^5 = 1.10402$

ข้อ 5 จาก $(x - 3y)^7$

เทอมทั่วไปของการกระจาย $(x - 3y)^7$ คือ ${}^7C_k(x)^{7-k}(-3y)^k$

เทียบกับเทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์คือ x^4y^3

จะได้ว่า k คือกำลังของ y นั้นเท่ากับ 3

แทนค่าเทอมทั่วไปจะได้ ${}^7C_3\, x^{7-3}(-3y)^3$

$$= \frac{7!}{3!\,4!}(x)^4(-27\,y^3)$$

$$= -945\,x^4y^3$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^4y^3 คือ -945

ข้อ 6 จาก $(\frac{a}{2} - b)^5$

เทอมทั่วไปคือ ${}^5C_k\,(\frac{a}{2})^{5-k}(-b)^k$

เราต้องการหาสัมประสิทธิ์ของเทอม a^3b^2

ดังนั้น $k = 2$

$$\therefore\ {}^5C_2\,(2x^3)^{5-2}(-2y^2)^2 = \frac{5!}{2!\,3!}(2x^3)^3(-2y^2)^2$$

$$= (10)\,(8x^9)\,(4y^4)$$

$$= 320\,x^9y^4$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $x^9y^4 = 320$

ข้อ 7 สัมประสิทธิ์ของ b^7 คือ 960

ข้อ 8 สัมประสิทธิ์ของ x^9y^4 คือ 320

ข้อ 9 จาก $(x^3 - 2)^5$

เทอมทั่วไปคือ ${}^5C_k\,(x^3)^{5-k}(-2)^k = {}^5C_k\,x^{15-3k}(-2)^k$

เทียบกับเทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ x^6

ดังนั้น $15 - 3k = 6$

$$\therefore\ 3k = 9$$

$$\therefore\ k = 3$$

แทนค่า k ในเทอมทั่วไปได้

$^5C_3 (x^3)^{5-3} (-2)^3 \quad = \quad \frac{5!}{3!\,2!} x^6 (-8)$

$= \quad -80 \ x^6$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^6 คือ -80

ข้อ 10 จาก $(2a - b + c + 3d)^6$

เทอมทั่วไปคือ $\frac{6!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}, (2a)^{k_1} (-b)^{k_2} (c)^{k_3} (3d)^{k_4}$

10.1) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ a^6

ดังนั้น $k_1 = 6, k_2 = k_3 = k_4 = 0$

$\frac{6!}{6!\,0!\,0!\,0!} (2a)^6 (-b)^0 (c)^0 (3d)^0 = 64 \ a^6$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^6 คือ 64

10.2) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ a^2b^4

ดังนั้น $k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = k_4 = 0$

$\therefore \ \frac{6!}{2!\,4!\,0!\,0!} (2a)^2 (-b)^4 (c)^0 (3d)^0 \quad = \quad 15 (4a^2) (b^4)$

$= \quad 60 \ a^2b^4$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2b^4 คือ 60

10.3) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์คือ ab^4c

ดังนั้น $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1, k_4 = 0$

$\therefore \ \frac{6!}{1!\,4!\,1!\,0!} (2a) (-b)^4 (c) (3d)^0 \quad = \quad (30) (2a) (b^4) (c)$

$= \quad 60 \ ab^4c$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ ab^4c คือ 60

10.4) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์คือ a^2bc^2d

ดังนั้น $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 1$

$$\therefore \frac{6!}{2!\ 1!\ 2!\ 1!} (2a)^2 (-b) (c)^2 (3d) = (180)(4a^2)(-b)(c^2)(3d)$$

$$= -2160\, a^2bc^2d$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2bc^2d คือ -2160

ข้อ ii จาก $(3 \quad x + 2y - 3z)^8$

เทอมทั่วไปคือ $\dfrac{5!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!} (3)^{k_1} (-x)^{k_2} (2y)^{k_3} (-3z)^{k_4}$

11.1) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์คือ x^6y^2

ดังนั้น $k_1 = 0, k_2 = 6, k_3 = 2, k_4 = 0$

$$\therefore \frac{8!}{0!\ 6!\ 2!\ 0!} (3)^0 (-x)^6 (2y)^2 (-3z)^0 = (28)(x^6)(4y^2)$$

$$= 112\, x^6y^2$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^6y^2 คือ 112

11.2) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ x^3y^2z

ดังนั้น $k_2 = 3,\ k_3 = 2,\ k_4 = 1$

แต่ $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 8 \quad \therefore k_1 + 6 = 8$ จะได้ว่า $k_1 = 2$

$$\therefore \frac{8!}{2!\ 3!\ 2!\ 1!} (3)^1 (-x)^3 (2y)^2 (-3z) = (1680)(9)(-x^3)(4y^2)(-3z)$$

$$= 181{,}440\, x^3y^2z$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^3y^2z คือ 181,440

11.3) เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือเทอมที่ไม่มี x,y,z อยู่ด้วยเลย

ดังนั้น $k_1 = 8, k_2 = k_3 = k_4 = 0$

$$\therefore \frac{8!}{8!\ 0!\ 0!\ 0!} (3)^8 (-x)^0 (2y)^0 (-3z)^0 = 6561$$

ดังนั้น เทอมที่ไม่มี x,y,z อยู่ด้วยเลย คือ 6561

ข้อ 12

จาก $(a - 2b + 3c)^{10}$

เทอมทั่วไปคือ $\frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} a^{k_1} (-2b)^{k_2} (3c)^{k_3}$

เทอมที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ a^5b^4c

ดังนั้น $k_1 = 5,\ k_2 = 4,\ k_3 = 1$

$\therefore \frac{10!}{5!\,4!\,1!} (a)^5 (-2b)^4 (3c) = (1260)\ (a^5)\ (16b^4)\ (3c)$

$= 60{,}480\ a^5b^4c$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^5b^4c คือ 60,480

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 8

ข้อ 1 จาก $1 + 3 + 5 + \quad + (2n - 1) = n^2$

พิสูจน์

1) ให้ $n = 1$

$\therefore 2(1) - 1 = 1^2 = 1$

แสดงว่า $n = 1$ เป็นจริง

2) จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง แล้ว จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง จะได้ว่า

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

เอา $2(k + 1) - 1$ (คือ $2k + 1$) บวกเข้าทั้งสองข้าง

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$

$= (k + 1)^2$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

$\therefore$ $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 2 จาก $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

พิสูจน์

ให้ $n = 1$

$\therefore 2(1) = 2 = 1(1 + 1)$ จริง

ดังนั้น $n = 1$ เป็นจริง

ถ้าเรายอมรับว่า $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องแสดงให้ได้ว่า เมื่อ $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง จะได้ว่า

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1)$

เอา $2(k + 1)$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned}\therefore 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1)\\ &= (k + 1)(k + 2)\\ &= (k + 1)((k + 1) + 1)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

ดังนั้น $2 + 4 + 6 + \quad + 2n = n(n + 1)$

เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 3 จาก $3 + 6 + 9 + \quad + 3n = \dfrac{3n(n + 1)}{2}$

พิสูจน์

ให้ $n = 1$

$\therefore 3(1) = \dfrac{3(1)(1 + 1)}{2}$

$\therefore n = 1$ เป็นจริง

ถ้ายอมรับว่า $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องแสดงให้ได้ว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง

$\therefore 3 + 6 + 9 + \ldots + 3k = \dfrac{3k(k + 1)}{2}$

$\therefore$ เอา $3(k+1)$ บวกเข้าทั้ง 2 ข้าง

$$3+6+9+\ldots+3k+3(k+1) = \frac{3k(k+1)}{2}+3(k+1)$$

$$= \frac{3k(k+1)+6(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(3k+6)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(3)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{3(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

จะเห็นได้ว่า $n = k+1$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือ $3+6+9+\ldots+3n = \frac{3n(n+1)}{2}$

เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 4 จาก $4+8+12+\ldots+4n = 2n(n+1)$

พิสูจน์ ให้ $n = 1$

$\therefore 4(1) = 2(1)(1+1)$ จริง

$\therefore n = 1$ เป็นจริง

ถ้าเรายอมรับว่า $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องแสดงให้ได้ว่า $n = k+1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง เราได้

$4+8+12+\ldots+4k = 2k(k+1)$

เอา $4(k+1)$ บวกเข้าทั้ง 2 ข้าง

$$\therefore 4+8+12+\ldots+4k+4(k+1) = 2k(k+1)+4(k+1)$$

$$= 2(k+1)(k+2)$$

$$= 2(k+1)((k+1)+1)$$

จะเห็นได้ว่า $n = k+1$ เป็นจริงด้วย

ดังนั้น $4+8+12+\ldots+4n = 2n(n+1)$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 5 จาก $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$

พิสูจน์ ให้ $n = 1$

$\therefore 5(1) = \frac{5(1)(1+1)}{2}$ จริง

$\therefore n = 1$ เป็นจริง

ถ้าให้ $n = k$ เราได้

$5 + 10 + 15 + \quad + Sk = \frac{5k(k+1)}{2}$

เอา $5(k+1)$ บวกเข้าทั้ง 2 ข้าง

$$\therefore 5 + 10 + 15 + \dots + Sk + 5(k+1) = \frac{5k(k+1)}{2} + 5(k+1)$$

$$= \frac{5k(k+1) + 10(k+1)}{2}$$

$$= \frac{5(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{5(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริง

ดังนั้น $5 + 10 + 5 + + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 6 ให้นักศึกษาทดลองพิสูจน์เอง (พิสูจน์ข้อเดียวกับข้ออื่น ๆ)

ข้อ 7 จาก $5^n \geqslant 1 + 4n$

ให้ $n = 1$

$\therefore 5^1 \geqslant 1 + 4(1)$ จริง

$\therefore n = 1$ เป็นจริง

ถ้ายอมรับว่า $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องแสดงให้ได้ว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง

$\therefore 5^k \geqslant 1 + 4k$

เอา 5 คูณทั้ง 2 ข้าง

$\therefore 5^k.5 \geqslant (1 + 4k).5$

$5^{k+1} \geqslant 5 + 20k$

แต่ $5 + 20k \geqslant 5 + 4k$ แน่ ๆ ($\because$ k เป็นจำนวนเต็มบวก)

ดังนั้น $5^{k+1} \geqslant 5 + 4k$

นั่นคือ $5^{k+1} \geqslant 1 + 4(k + 1)$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

$\therefore 5^n \geqslant 1 + 4n$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อ 8 จาก $3^n \geqslant 1 + 2n$

ให้ $n = 1$

$\therefore 3^1 \geqslant 1 + 2(1)$ จริง

นั่นคือ $n = 1$ เป็นจริง

ให้ $n = k$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$3^k \geqslant 1 + 2k$

เอา 3 คูณทั้ง 2 ข้าง

$3^k.3 \geqslant (1 + 2k).3$

$3^{k+1} \geqslant 3 + 6k$

แต่ $3 + 6k \geqslant 3 + 2k$ แน่ ๆ

ดังนั้น $3^{k+1} \geqslant 3 + 2k$

นั่นคือ $3^{k+1} \geqslant 1 + 2(k + 1)$

จะเห็นได้ว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

ดังนั้น $3^n \geqslant 1 + 2n$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก