เฉลยแบบฝึกหัด 4.5

ข้อ 1 ให้ θ เป็นมุมจากเส้นตรง L_1 ไปยังเส้นตรง L_2

1.1) $m_1 = \frac{1}{2},\ m_2 = \frac{4}{5}$

จาก $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$

$$= \frac{\frac{4}{5} - \frac{1}{2}}{1 + (\frac{1}{2})(\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{14}{10}}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{3}{14}$$

1.2) $m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = \frac{4}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5} - (-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{\frac{13}{10}}{\frac{6}{10}}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{13}{6}$$

1.3) $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{4}{5}$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{4}{5} - \frac{1}{2}}{1 + (\frac{1}{2})(-\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{-\frac{13}{10}}{\frac{6}{10}}$$

$$= -\frac{13}{6}$$

$$\therefore \tan\theta = -\frac{13}{6}$$

1.4) $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{-4}{5}$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{4}{5} - (-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2})(-\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{-\frac{3}{10}}{\frac{14}{10}}$$

$$= -\frac{3}{14}$$

1.5) $m_1 = 3$, $m_2 = 1$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1-3}{1+(3)(1)}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{2}$$

1.6) $m_1 = -3$, $m_2 = -1$

$$\tan\theta = \frac{-1-(-3)}{1+(-3)(-1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

1.7) $m_1 = -3$, $m_2 = 1$

$$\tan\theta = \frac{1-(-3)}{1+(-3)(1)}$$

$$= -2$$

1.8) $m_1 = 3$, $m_2 = -1$

$$\tan\theta = \frac{-1-3}{1+(3)(-1)}$$

$$= 2$$

ข้อ 2

จาก A(3, 2), B(−1, −1), C(1, 1)

ให้ θ_1 เป็นมุมระหว่าง AB กับ BC

ให้ m_1 เป็นความชันของ BC

$$\therefore \quad m_1 = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$$

และ m_2 เป็นความชันของ AB

$$\therefore \quad m_2 = \frac{-1-2}{-1-3} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = \frac{\frac{3}{4}-1}{1+(1)(\frac{3}{4})}$$

$$= -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1} -\frac{1}{7}$$

ให้ θ_2 เป็นมุมระหว่าง AC กับ BC

ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง AC

$$\therefore \quad m_1 = \frac{1-2}{0-3} = \frac{1}{3}$$

และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง BC

$$\therefore \quad m_2 = \frac{1-(-1)}{0-1} = -2$$

$$\therefore \tan\theta_2 = \frac{-2-\frac{1}{3}}{1+(\frac{1}{3})(-2)}$$

$$= -7$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}(-7)$$

ให้ θ_3 เป็นมุมระหว่าง AB กับ AC

ให้ m_1 เป็นความชันของ AB

$$\therefore \quad m_1 = \frac{-1-2}{1-3} = \frac{3}{2}$$

และ m_2 เป็นความชันของ AC

$$\therefore \quad m_2 = \frac{1-2}{0-3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\theta_3 = \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}{1+(\frac{1}{3})(\frac{3}{2})}$$

$$= -\frac{7}{9}$$

$$\therefore \quad \theta_3 = \tan^{-1} -\frac{7}{9}$$

ข้อ 3

ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง L_1

$$\therefore \quad m_1 = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_2

$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{m_2 - \frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}m_2}$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{m_2 - \frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}m_2}$$

$$1 + \frac{3}{2}m_2 = m_2 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}m_2 - m_2 = -\frac{3}{2} - 1$$

$$\therefore \quad m_2 = -\frac{5}{2}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง L_2 คือ $-\frac{5}{2}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5.1

ข้อ 1

1.1) เป็นเมตริกซ์ขนาด 1×5 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 5 อีลีเมนต์

1.2) เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×1 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 4 อีลีเมนต์

1.3) เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×5 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 10 อีลีเมนต์

1.4) เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×7 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 28 อีลีเมนต์

ข้อ 2

2.1) เมตริกซ์ A มีขนาด 3×5

2.2) เมตริกซ์ A มีอีลีเมนต์ทั้งหมด 15 อีลีเมนต์

2.3) $a_{13} = 1$ $\quad$ $a_{34} = 7$

$a_{15} = 3$ $\quad$ $a_{25} = 1$

$a_{22} = 3$ $\quad$ a_{43} ไม่มี

2.4) อีลีเมนต์ในแถวที่สาม คือ $-2, -3, 0, 7, 5$

2.5) อีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ห้า คือ 3, 1, 5

ข้อ 3

3.1) เป็นเมตริกซ์ศูนย์ และเป็นเมตริกซ์จัตุรัสด้วย (มีขนาด 1×1)

3.2) เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด 1×1

3.3) เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด 2×2

3.4) เป็นเมตริกซ์ ศูนย์

3.5) เป็นเมตริกซ์ ศูนย์ และเป็นเมตริกซ์ จัตุรัสด้วย

3.6) เป็นเมตริกซ์จัตุรัส

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5.2

ข้อ 1

มีเมตริกซ์ C กับ F เท่านั้นที่เท่ากัน

ข้อ 2

จากนิยามการเท่ากันของเมตริกซ์จะได้ว่า

$$x + 5 = -1$$
$$\therefore \quad x = -6$$
$$y - 2 = -6$$
$$\therefore \quad y = -4$$
$$3z = 2x$$
$$= 2(-6) = -12$$
$$\therefore \quad z = -4$$

ดังนั้น $x = -6, y = -4, z = -4$

ข้อ 3

จากการเท่ากันของเมตริกซ์ เราได้

$$y - 2 = x \qquad \text{..........(1)}$$
และ $$x = 3y \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$$\therefore \quad y - 2 = 3y$$
$$\therefore \quad y = -1$$

แทนค่า y ใน (2)

$$\therefore \quad x = -3$$

ดังนั้น $x = -3, y = -1$

ข้อ 4

จากการเท่ากันของเมตริกซ์ เราได้

$3x + 2y = 7$ ....(1)

$5x - y = 3$ ....(2)

$(2) \times 2$ จะได้ $10x - 2y = 6$ ....(3)

$(1) + (3)$ จะได้ $13x = 13$

$\therefore \quad x = 1$

แทนค่า x ใน (2)

$\therefore \quad y = 2$

ดังนั้น $x = 1, y = 2$

ข้อ 5

จาก $x^3 + x - 1 = 0$ จะได้ว่า

ถ้า $-x^3 - x = -1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 1 เท่ากัน

และ $x^3 = -x + 1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2 เท่ากัน

และ $x = -x^3 + 1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 เท่ากัน

และ $x^3 + x = 1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 2 เท่ากัน

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่าเมตริกซ์ที่สองเท่ากัน

ข้อ 6

6.1) $A + F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

6.2) $(A + B) + F = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.3) A + C บวกกันไม่ได้

6.4) CA $= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

6.5) AC คูณกันไม่ได้

6.6) AD $= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

6.) (AD) E $= \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6.8) $C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

6.9) $C^3 - C^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}$

6.10) DA $= \begin{bmatrix} -6 & 10 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6.11) 3A $= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

6.12) $-\frac{1}{2}D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

6.13) $2A - 3B = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -11 \\ -16 & 12 & -2 \end{bmatrix}$

6.14) $DE = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore H = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore h_{13} = 5,\ h_{22} = 6,\ h_{34} = 1$

6.15) $C - G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(C - G)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

$CG = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore C^2 - 2CG + G^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าในที่นี้ $(C - G)^2 = C^2 - 2CG + G^2$

6.16) จากข้อ 6.15) $C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ และ $G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore C^2 - G^2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $C + G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$C - G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (C+G)(C-G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าในที่นี้ $C^2 - G^2 = (C + G)(C - G)$

6.17) จากข้อ 6.9) จะได้ว่าเมตริกซ์ C^3 มีขนาด 2×2

6.18) จากข้อ 6.6) จะได้ว่า AD มีขนาด 2×2

6.19) จากข้อ 6.7) จะได้ว่า (AD) E มีขนาด 2×4

6.20) A + B มีขนาด 2×3

ข้อ 7

จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = [4]$

1) $AB = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$

2) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

3) $CA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

4) CB คูณกันไม่ได้

5) AC คูณกันไม่ได้

ข้อ 8

จาก AB = C จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3x + 5y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$\therefore 3x + 5y = 1$ ....(1)

$x + 2y = 0$ ....(2)

$(2) \times 3$ จะได้ $3x + 6y = 0$ ....(3)

(3) − (1) จะได้ $y = -1$

แทน y ใน (2) จะได้ $x = 2$

ดังนั้น $x = 2, y = -1$

ข้อ 9

จากโจทย์จะได้ว่า

โรงเรียนต้องการซื้อสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

สมุด (โหล)	ดินสอ (โหล)	ยางลบ (โหล)	ไม้บัดทัด (โหล)
20	12	30	15

เขียนรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 30 & 15 \end{bmatrix}$$

และจากตารางพ่อค้าทั้ง 4 คน เสนอราคาต่อโหล ของสมุด, ดินสอ, ยางลบ, ไม้บันทัด ตามลำดับนั้น เขียนรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 13 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมตริกซ์ของราคารวมของสิ่งของทั้งสี่รายการ ของพ่อค้าแต่ละคนเป็น

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 13 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 490 \\ 434 \\ 495 \\ 651 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ย่อมได้ว่า

นายดำ เสนอราคารวม 490 บาท

นายแดง เสนอราคารวม 434 บาท

นายเขียน เสนอราคารวม 495 บาท

นายขาว เสนอราคารวม 651 บาท

ดังนั้น โรงเรียนจะซื้อสิ่งของที่ต้องการจากนายแดงซึ่งเสนอราคาต่ำที่สุด

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5.3

ข้อ 1

จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B + A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \ A + B = B + A$

1.2) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A + B) + C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

และ $B + C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \ (A + B) + C = A + (B + C)$

1.3) $A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \; A + 0 = A$

1.4) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)\,C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

และ $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)\,C = A(BC)$

1.5) $(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (A + B)\,C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A + B)\,C = AC + BC$

1.6) $$C(A + B) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore CA + CB = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore C(A + B) = CA + CB$

ข้อ 2

จาก $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 + 3A + 2I_2 = 0$ คือ

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + 3a + 2 & 0 \\ ab + bc + 3b & c^2 + 3c + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

2.1) $a^2 + 3a + 2 = 0$

$\therefore (a+2)(a+1) = 0$

$a = -2, -1$

2.2) $ab + bc + 3b = 0$

$\therefore b(a+c+3) = 0$

$\therefore b = 0$

และ $a + c + 3 = 0$

จะเห็นว่าเมื่อ $a = -2$ จะได้ $c = -1$ และเมื่อ $a = -1$ จะได้ $c = -2$
ซึ่งค่า c ที่ได้นี้ก็สอดคล้องกับสมการ $c^2 + 3c + 2 = 0$
ดังนั้นเราจึงได้ว่า $a = -2, b = 0, c = -1$ และ $a = -1, b = 0, c = -2$

ข้อ 3

จาก $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ข้อ 4

จาก $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ซึ่งเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ ขนาด 3×2 ดังนั้น

4.1) เมตริกซ์ I ซึ่งทำให้ AI = A คือ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2) เมตริกซ์ I ซึ่งทำให้ IA = A คือ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ข้อ 5

จาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

คือ $AI_2 = A$

และ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

คือ $I_2A = A$

นั่นคือ $AI_2 = A = I_2A$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.4

ข้อ 1

จากสูตร ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

1.1) จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ซึ่งได้ว่า $a_{11} = 4, \quad a_{12} = 7, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 2$

และ $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12} = (4)(2) - (1)(7) = 8 - 7 = 1$

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

1.2) จาก $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

และ $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = -10 - (-4) = -6$

$\therefore B^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

1.3) จาก $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

และ $\underline{c_{11}c_{22}} - c_{21}c_{12} = (5)(0) - (6)(0) = 0$

เราจึงสรุปได้ว่าไม่มี C^{-1}

1.4) ไม่มี D^{-1}

1.5) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.6) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

1.7) จาก $H = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

เราพิจารณา $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 15 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$

หารตลอด แถวที่ (1) ด้วย 3 เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (2) ด้วย -4 เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย 5 เท่าของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

1.8) $$I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

1.9) $$J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.10) จาก $$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

เราพิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (3) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย 3 เท่าของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่ (3) ด้วย 6 เท่าของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (3) ด้วย -2 เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (3) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

บวกแถวที่ (1) ด้วยแถวที่ (3) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -6 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ข้อ 2

จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} -27 & -10 \\ -19 & -7 \end{bmatrix}$$

และ $(-27)(-7) - (-19)(-10)$

$$= 189 - 190 = -1$$

$$\therefore \quad (AB)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 19 & -27 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$

จาก $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

และ $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = 6 - 5 = 1$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

และ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 8 - 9 = -1$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (B^{-1})(A^{-1}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$

นั่นแสดงว่า $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$

ข้อ 3

3.1) จาก $4x + 7y = 3$

$x + 2y = 1$

เขียนในรูปเมตริกซ์ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

จากสมการเขียนได้ว่า

$$AU = C$$

$$\therefore \ (A^{-1}A)\,U = A^{-1}C$$

$$\therefore \ U = A^{-1}C$$

จากข้อ 1.1) เราได้ว่า

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ U = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x = -1, \ y = 1$

3.2) จาก $3x + 6y = 2$

$x + 2y = 3$

เขียนในรูปเมตริกซ์ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 1.4)

เราได้ว่าเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่มีอินเวอร์ส

ดังนั้น สมการชุดนี้ อาจจะไม่มีคำตอบ หรือถ้ามีคำตอบก็มีมากมายหลายคำตอบ

พิจารณาจากสมการที่กำหนดมาให้

$$3x + 6y = 2 \quad \text{------------------------------ (1)}$$

$$x + 2y = 3 \quad \text{------------------------------ (2)}$$

(2) $\times 3$ ได้ $3x + 6y = 9$ ------------------------------ (3)

(1) $-$ (3) ได้ $0 = -7$ ไม่จริง

แสดงว่าสมการนี้ไม่มีคำตอบ คือ ไม่มีค่า x, y ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ

3.3) $x = 2, \quad y = -3$

3.4) $x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$

3.5) $x = -3, \quad y = 3, \quad z = -1$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.5

ข้อ 1 หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(2)$
$= 4 - 6 = -2$

1.2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(1)$
$= 8 - 3 = 5$

1.3) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(4)$
$= -2 - 12 = -14$

1.4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (-3)(4)$
$= 2 + 12 = 14$

1.5) 10 1.6) 2 1.7) 0

1.8) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1) - 0 + 0 = 1$$

1.9 $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-0) + 1(0-0) - 3(6-(-1))$$

$$= -21$$

1.10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(2-1) - 2(3-1) + 3(3-2)$$

$$= 1 - 4 + 3 = 0$$

ข้อ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4-0) - 3(0-8) + 5(0-4)$$

$$= -4 + 24 - 20 = 0$$

ข้อ 3 แก้สมการโดยใช้ Cramer's rule

3.1) จาก $x + 2y = 3$

$3x + 4y = 10$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12-20}{4-6} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10-9}{4-6} = -\frac{1}{2}$$

นั่นคือ $x = 4, \ y = -\frac{1}{2}$

3.2) จาก $x + 4y = 2$

$2y - 3x = 5$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-20}{2-(-12)} = -\frac{8}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5-(-6)}{2-(-12)} = \frac{11}{14}$$

$$x = -\frac{8}{7},\ y = \frac{11}{14}$$

3.3) $2x - y - 3z = 1$

$3x - y = 2$

$x - 2y = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1(0-0) - (-1)(0-0) + (-3)(-4+5)}{2(0-0) - (-1)(0-0) + (-3)(-6+1)}$$

$$x = \frac{-3}{15} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2(0-0) - 1(0-0) - 3(15-2)}{15}$$

$$\therefore y = \frac{-39}{15} = \frac{-13}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2(-5+4) + 1(15-2) + 1(-6+1)}{15}$$

$$\therefore z = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

นั่นคือ $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{13}{5}$, $z = \frac{2}{5}$

ข้อ 4

หาค่า y โดยใช้ Cramer's rule

จาก

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= -2 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2(1-0) + 2(3-1) + 3(0-1)}{2(2-1) - 2(3-1) + 3(3-2)}$$

$$\therefore y = \frac{3}{1} = 3$$

ข้อ 5

จากสูตร ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

5.1) จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = (1)(4) - (3)(2) = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5.2 จาก $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |B| = (-1)(2) - (3)(4) = -14$$

$$\therefore B^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

5.3 จาก $C = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore |C| = (3)(6) - (10)(2) = -2$$

$$\therefore C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

5.4) จาก $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\because \quad |D| = -21$

$D_{11} = 0 \qquad D_{12} = 0 \qquad D_{13} = 7$

$D_{21} = -6 \qquad D_{22} = 3 \qquad D_{23} = -5$

$D_{31} = -3 \qquad D_{32} = -9 \qquad D_{33} = 1$

จาก $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad D^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

ข้อ 6

วิธีทำ

6.1) $\operatorname{adj} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2) $\operatorname{adj} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.3) $\operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ข้อ 7

7.1) ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7.2) ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -5 \\ -34 & 17 & 17 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} ไม่มี (เนื่องจาก $\det A = 0$)

7.3) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

7.4) ให้ $$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} bc^2 - b^2c & a^2c - ac^2 & ab^2 - a^2b \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c - b & a - c & b - a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A^{-1} = \frac{1}{(b - a)(c - a)(c - b)} \begin{bmatrix} bc^2 - b^2c & a^2c - ac^2 & ab^2 - a^2b \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c - b & a - c & b - a \end{bmatrix}$$

7.5) ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

7.6) ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ข้อ 8

$$\text{จาก} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

8.1) $\det A = 120 - 96 + 8 - 128 - 24 + 30$

$= -90$

8.2) $$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 16 & 22 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -28 & -16 & 30 \end{bmatrix}$$

8.3) $$\begin{bmatrix} 16 & 22 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -28 & -16 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -90 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $(\text{adj } A)(A) = (\det A)\, I_3$

8.4) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A = -\frac{1}{90} \begin{bmatrix} 16 & 22 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -28 & -16 & 30 \end{bmatrix}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.6

ข้อ 1

1.1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

1.2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)\,(2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

1.4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 12 & 15 \\ 16 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 12 & 15 \\ 16 & 12 & 20 \end{vmatrix}$

$$= (2)(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 16 & 12 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

1.5)

จะแสดงว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$$

พิสูจน์ :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$ (แถวที่สองได้จากลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง)

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$ (แถวที่สามได้จากลบแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง)

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix}$$ (แถวที่สามได้จากลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง)

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

1.6) จะแสดงว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

พิสูจน์

เอาแถวที่ 1, แถวที่ 2, แถวที่ 3 ไปบวกกับแถวที่ 4 จะได้

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

1.7) จะแสดงว่า

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

พิสูจน์

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & b \\ b-c & 1 & c \\ c-a & 1 & a \end{vmatrix}$$ (คอลัมน์ที่สามได้จากลบคอลัมน์ที่สามด้วยคอลัมน์ที่หนึ่ง)

$$= \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$ (คอลัมน์ที่หนึ่งได้จากบวกคอลัมน์ที่หนึ่งด้วยคอลัมน์ที่สาม)

ข้อ 2

2.1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24$$

2.2) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-8)((-1)(7) - (5)(0)) = 56$$

2.3) **ตอบ** -64

2.4) $$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1)(3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 15(16 - 8) = 120$$

2.5) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 - 0) = 1$$

2.6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 3 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

บวกแถวที่ (3) ด้วยแถวที่ (1) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ลบด้วยแถวที่ (4) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

ทรานสโพส (Transpose) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-5) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$+ (-3) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(-18 + 5) - 6(6 - 7) - 3(-5 + 21)$$

$$= 65 + 6 - 48 = 23$$