บทที่ 8
การพิสูจน์โดยวิธีอุปมานทางคณิตศาสตร์
(Mathematical Induction)

การพิสูจน์โดยวิธีอุปมานทางคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการพิสูจน์ว่าความสัมพันธ์ P(n) ที่กำหนดมาให้นั้นเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก (จำนวนธรรมชาติ) ทุกจำนวน ถ้าสิ่งต่อไปนี้เป็นจริง คือ

1. P(1) เป็นจริง
2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริงด้วย

การพิสูจน์โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิสูจน์เพื่อที่จะแสดงว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้นั้นเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเปรียบเสมือนกับการขึ้นบันไดที่ทอดจากพื้นดินขึ้นสู่ท้องฟ้า เราจะขึ้นบันไดทีละขั้น คือ เริ่มจากขึ้นขั้นที่ 1 ก่อน ต่อไปก็ขึ้นขั้นที่ 2, 3, 4, ... เรื่อย ๆ ไป เราจะขึ้นบันไดถึงขั้นที่เราต้องการได้ถ้า

1. เราสามารถขึ้นขั้นที่หนึ่งได้
2. เราสามารถไต่จากขั้นหนึ่งไปอีกขั้นหนึ่งได้

ถ้าหากเราสามารถกระทำดังสองประการนี้ได้แล้ว เราก็สามารถไต่บันไดไปถึงขั้นที่เราต้องการได้

กระบวนการพิสูจน์ โดยอุปมานนั้น กระทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1. แสดงว่า ถ้า $n = 1$ แล้ว ข้อความ P(n) ที่กำหนดมาให้นั้นเป็นจริง

ขั้นที่ 2. ยอมรับว่า ถ้าข้อความ P(n) เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว พิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $k + 1$ ด้วย

ถ้าเป็นจริงทั้งสองประการนี้แล้ว เราก็สรุปได้ว่า "ข้อความ P(n) นั้นเป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก $(n \in N)$"

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติ มักจะตรวจสอบดูด้วยว่า เมื่อ $n = 2$ หรือ $n = 3$ ข้อความ P(n) นั้นยังเป็นจริงอยู่หรือเปล่า เพราะ P(n) บางข้อความ เมื่อ $n = 1$ เป็นจริง แต่ $n = 2$ หรือ $n = 3$ อาจไม่จริง ก็สรุปได้ว่าไม่เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก แต่ถ้า $n = 2, n = 3$ เป็นจริงก็จะดำเนินการพิสูจน์ในขั้นที่ 2 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 8.1

จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์

1. ให้ $n = 1$

$$\therefore \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

แสดงว่า P(n) เป็นจริงเมื่อ $n = 1$

2. ยอมรับว่า P(k) เป็นจริงแล้ว จะต้องพิสูจน์ว่า P(k + 1) เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า P(k) เป็นจริง จะได้ว่า

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

เอา (k + 1) บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned}
\therefore \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า P(k + 1) เป็นจริงด้วย

$$\therefore\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 8.2 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

พิสูจน์

1. ให้ $n = 1$

$$\frac{1}{((2 \times 1) - 1)((2 \times 1) + 1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

แสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงเมื่อ $n = 1$

2. ยอมรับว่า เมื่อ $P(k)$ เป็นจริงแล้ว จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

เอา $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

จะเห็นว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

ดังนั้น $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{n}{2n+1}$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 8.3 จงพิสูจน์ว่า $2^n > 1 + n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geqslant 2$

พิสูจน์

1. ให้ $n = 2$

   $\therefore\ 2^2 > 1 + 2$

   $\therefore\ 4 > 3$

   แสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2$

2. ยอมรับว่า $P(k)$ เป็นจริงแล้วจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

   จากการยอมรับว่า $P(k)$ เป็นจริง เราได้ว่า

   $2^k > 1 + k$

   เอา 2 คูณตลอด

   $2^k \cdot 2 > 2 + 2k$

   $\therefore\ 2^{k+1} > 2 + 2k$

   แต่ $2 + 2k > 2 + k$ ($\because$ k เป็นจำนวนเต็มบวก)

   $\therefore\ 2^{k+1} > 2 + k$

   นั่นคือ $2^{k+1} > 1 + (k+1)$

   จะเห็นได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

   $\therefore\ 2^n > 1 + n$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geqslant 2$

แบบฝึกหัดที่ 8.1

จงพิสูจน์ ข้อความต่อไปนี้ โดยวิธีอุปมานคณิตศาสตร์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

3) $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \frac{3n(n + 1)}{2}$

4) $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n + 1)$

5) $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n + 1)}{2}$

6) $6 + 12 + 18 + \cdots + 6n = 3n(n + 1)$

7) $5^n \geqslant 1 + 4n$

8) $3^n \geqslant 1 + 2n$
