บทที่ 7
การกระจายแบบ ทวินาม, ตรีนาม และพหุนาม
(Binomial, Trinomial and Multinomial)

7.1 การกระจายแบบทวินาม (Binomial expansions)

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$$(x + y)^n = {}^nC_0x^{n-0}\,y^0 + {}^nC_1x^{n-1}\,y^1 + {}^nC_2x^{n-2}\,y^2 + {}^nC_3x^{n-3}\,y^3 + \dots$$
$$+ \dots + {}^nC_kx^{n-k}\,y^k + \dots + {}^nC_nx^{n-n}\,y^n$$

และจะเรียกการกระจายนี้ว่า "การกระจายแบบทวินาม"

ข้อควรจำ

$${}^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ข้อสังเกต

1) เมื่อกระจาย $(x + y)^n$ จะได้ทั้งหมด $n + 1$ เทอม

2) เทอมแรกที่เป็น ${}^nC_0x^{n-0}\,y^0$ อาจเขียนสั้น ๆ เป็น x^n และเทอมสุดท้าย ${}^nC_nx^{n-n}\,y^n$ อาจเขียนสั้น ๆ เป็น y^n

3) กำลังของ x จะเริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0 และกำลังของ y จะเริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 1 จนถึง n

4) ในแต่ละเทอมของการกระจายกำลังของ x และ y บวกกันย่อมได้เท่ากับ n เสมอ

5) การหาสูตรการกระจายของ $(x + y)^n$ ข้างต้นนั้น มาจาก $(x + y^n =$ $(x + y)(x + y) \ldots (x + y)$ คูณกัน n วงเล็บ โดยถ้าเรานำเอา x มาจากทุกวงเล็บมาคูณกัน (ทั้ง n วงเล็บ) และไม่นำ y มาเลย เทอมนี้จะเกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้นจะได้เทอม x^n

- ถ้าเรานำเอา y จาก 1 วงเล็บมาคูณกับ x จาก n − 1 วงเล็บที่เหลือจะได้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-1}y$ เทอมเช่นนี้เกิดได้ ${}^nC_1$ วิธี ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จากวงเล็บใดก็ได้ใน n วงเล็บนั้น จึงได้เทอมเป็น ${}^nC_1\, x^{n-1}\, y$

- ถ้านำเอา y จาก 2 วงเล็บมาคูณกับ x จาก n − 2 วงเล็บที่เหลือจะได้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-2}y^2$ เทอมเช่นนี้เกิดได้ ${}^nC_2$ วิธี ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จากสองวงเล็บใด ๆ ก็ได้ใน n วงเล็บ นั้น ดังนั้น จึงได้เทอมเป็น ${}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2$

---------------------------------- ฯลฯ ----------------------------------

- ถ้านำ y จาก k วงเล็บมาคูณกับ x จาก n − k วงเล็บที่เหลือจะได้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-k}y^k$ เทอม เทอมเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ ${}^nC_k$ วิธี ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จาก k วงเล็บใด ๆ ก็ได้ใน n วงเล็บนั้น
  ดังนั้นจึงได้เทอมเป็น ${}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k$

---------------------------------- ฯลฯ ----------------------------------

- ถ้านำเอา y จากทุกวงเล็บมาคูณกัน (ทั้ง n วงเล็บ) และไม่นำ x มาเลย จะได้เทอมที่มี y^n เทอมเช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว
  ดังนั้นจะได้เทอมเป็น y^n

เมื่อหาครบทุกเทอมที่อาจจะเป็นไปได้หมดแล้ว ก็นำเอาเทอมต่าง ๆ มาบวกกัน ผลที่ได้จึงกลายเป็นการกระจาย $(x + y)^n$

คือ $(x + y)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, y + {}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2 + {}^nC_3\, x^{n-3}\, y^3 + \ldots$
$\ldots + {}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k + \ldots + {}^nC_{n-1}\, x^{n-1}\, y + y^n$

6) เทอมทั่วไปของการกระจาย $(x + y)^n$ คือ ${}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k$ โดยเทอมนี้เป็นเทอมที่ k + 1 ดังนั้นเวลาจะหาเฉพาะเทอมใดเทอมหนึ่งของการกระจาย จึงได้ว่า

เทอมที่ k + 1 คือ ${}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k$

แล้วแทนค่า n และ k ก็จะได้เทอมที่ต้องการ

7) จากสูตรการกระจาย $(x + y)^n$ อาจเขียนสั้น ๆ ได้เป็น

$(x + y)^n$ = ผลบวกของเทอมในรูป ${}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k$

เมื่อ k มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, ..., n

ถ้าใช้สัญลักษณ์ $\sum_{k=0}^{n} a_k$ แทนผลบวกของ $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

ดังนั้น สูตรการกระจาย $(x + y)^n$ จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\boxed{(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, x^{n-k}\, y^k}$$

8) การหาสัมประสิทธิ์ของเทอม $x^{k_1}\, y^{k_2}$ ในการกระจาย $(x + y)^n$ ที่โจทย์กำหนดมาให้ จะได้เทอม

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2!}\, x^{k_1} y^{k_2} \quad \text{โดย } k_1 + k_2 = n$$

แล้วกระจายให้อยู่ในเทอมที่มี $x^{k_1}\, y^{k_2}$ ก็จะได้สัมประสิทธิ์ของ $x^{k_1}\, y^{k_2}$ ตามที่โจทย์ต้องการ โดย k_1, k_2, หาได้โดยการเทียบกับเทอมที่โจทย์กำหนดมาให้

ตัวอย่างที่ 7.1.1 จงกระจาย $(x + y)^6$

วิธีทำ

จาก Binomial expansions จึงได้ว่า

$$(x + y)^6 = {}^6C_0\, x^{6-0}\, y^0 + {}^6C_1\, x^{6-1}\, y + {}^6C_2\, x^{6-2}\, y^2 + {}^6C_3\, x^{6-3}\, y^3 + {}^6C_4\, x^{6-4}\, y^4 + {}^6C_5\, x^{6-5}\, y^5 + {}^6C_6\, x^{6-6}\, y^6$$

$$= \frac{6!}{0!\,6!}\, x^6 + \frac{6!}{1!\,5!}\, x^5y + \frac{6!}{2!\,4!}\, x^4y^2 + \frac{6!}{3!\,3!}\, x^3y^3 + \frac{6!}{4!\,2!}\, x^2y^4 + \frac{6!}{5!\,1!}\, xy^5\ \frac{6!}{6!\,0!}\, y^6$$

$$\therefore\ (x + y)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

ตัวอย่างที่ 7.1.2 จงกระจาย $(3a - 2b)^4$

วิธีทำ

จากสูตร $(x + y)^n = {}^nC_0 x^{n-0} y^0 + {}^nC_1 x^{n-1} y^1 + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots$

$\dots + {}^nC_n x^{n-n} y^n$

ในที่นี้ $x = 3a,\ y = -2b,\ n = 4$

$$\therefore (3a - 2b)^4 = {}^4C_0 (3a)^{4-0}(-2b)^0 + {}^4C_1(3a)^{4-1}(-2b) + {}^4C_2(3a)^{4-2}(-2b)^2$$
$$+ {}^4C_3(3a)^{4-3}(-2b)^3 + {}^4C_4(3a)^{4-4}(-2b)^4$$
$$= \frac{4!}{0!\,4!}(3a)^4 + \frac{4!}{1!\,3!}(3a)^3(-2b) + \frac{4!}{2!\,2!}(3a)^2(-2b)^2$$
$$+ \frac{4!}{3!\,1!}(3a)(-2b)^3 + \frac{4!}{4!\,0!}(-2b)^4$$
$$= (81a^4) + (4)(27a^3)(-2b) + (6)(9a^2)(4b^2)$$
$$+ 4(3a)(-8b^3) + (16b^4)$$

$$\therefore (3a - 2b)^4 = 81a^4 - 216a^3b + 216a^2b^2 \quad 96ab^3 + 16b^4$$

ตัวอย่างที่ 7.1.3 จงกระจาย $(2 - x)^4$

วิธีทำ

ในที่นี้ $x = 2,\ y = (-x),\ n = 4$

$$\therefore (2 - x)^4 = {}^4C_0 2^{4-0}(-x)^0 + {}^4C_1 2^{4-1}(-x)^1 + {}^4C_2 2^{4-2}(-x)^2$$
$$+ {}^4C_3 2^{4-3}(-x)^3 + {}^4C_4 2^{4-4}(-x)^4$$
$$= \frac{4!}{0!\,4!}(2)^4 + \frac{4!}{1!\,3!} 23(-x) + \frac{4!}{2!\,2!} 2^2(-x)^2$$
$$+ \frac{4!}{3!\,1!} 2(-x)3 + \frac{4!}{4!\,0!}(-x)^4$$
$$= 16 + (4)(8)(-x) + (6)(4)(x)^2 + (4)(2)(-x^3) + x^4$$
$$= 16 \quad 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$$

ตัวอย่างที่ 7.1.4 จงคำนวณหาค่าประมาณของ $(.99)^6$ โดยใช้ทศนิยมสามตำแหน่ง

วิธีทำ

ในที่นี้ให้ $x = 1, y = -.01, n = 6$

$$\therefore \text{ จึงได้ } (.99)^6 = (1 - .01)^6$$

$$= {}^6C_0(1)^{6-0}(-.01)^0 + {}^6C_1(1)^{6-1}(-.01)^1 + {}^6C_2(1)^{6-2}(-.01)^2 + \ldots$$

$$= \frac{6!}{0!\,6!}(1) + \frac{6!}{1!\,5!}(-.01) + \frac{6!}{2!\,4!}(-.01)^2 + \ldots$$

$$= 1 + (6)(-.01) + 15(.0001) + \ldots$$

$$= 1 - .06 + .0015 + \ldots$$

$$\therefore \quad (.99)^6 = 0.941 \text{ (ใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)}$$

ตัวอย่างที่ 7.1.5 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b ในการกระจายของ $(3a - 2b)^4$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของการกระจาย $(3a - 2b)^4$ คือ ${}^4C_k(3a)^{4-k}(-2b)^k$

ในที่นี้ k คือ กำลังของ b ซึ่งเทียบกับเทอมที่มี a^3b เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดให้ b มีกำลังเป็น 1 ดังนั้น $k = 1$

แทนค่าในเทอมทั่วไป จะได้ ${}^4C_1(3a)^{4-1}(-2b)^1$

$$= \frac{4!}{1!\,3!}(27a^3)(-2b)$$

$$= -216\,a^3b$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^3b คือ -216

ตัวอย่างที่ 7.1.6 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b^5 จากการกระจาย $(2a - b)^8$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของการกระจาย $(2a - b)^8$ คือ ${}^8C_k(2a)^{8-k}(-b)^k$

เทียบกับเทอมที่มี a^3b^5 เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดได้ว่า $k = 5$ (คือกำลังของ b)

แทนค่า k ในเทอมทั่วไปจึงได้เทอมที่มี a^3b^5 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$
\begin{aligned}
{}^8C_5(2a)^{8-5}(-b)^5 &= \frac{8!}{5!\,3!}(2a)^3(-b)^5 \\
&= (56)(8a^3)(-b^5) \\
&= -44\%\, a^3b^5
\end{aligned}
$$

สัมประสิทธิ์ของ a^3b^5 คือ - 4 4 8

ตัวอย่างที่ 7.1.7 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^4 จากการกระจาย $(a + 3)^6$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(a + 3)^6$ คือ ${}^6C_k a^{6-k} 3^k$ เทียบกับเทอมที่มี a^4 เป็นแฟคเตอร์ พิจารณาแต่ k เราจะได้ $6 - k = 4$ นั่นคือ $k = 2$

แทนค่า k ในเทอมทั่วไปจึงได้เทอมที่มี a^4 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$
\begin{aligned}
{}^6C_2(a)^{6-2}(3)^2 &= \frac{6!}{2!\,4!}(a)^4(3)^2 \\
&= (15)\,(a)^4\,(9) \\
&= 135\, a^4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ a^4 คือ 135

ตัวอย่างที่ 7.1.8 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^6y^6 จากการกระจาย $(x^2 + y^3)^5$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปคือ ${}^5C_k(x^2)^{5-k}(y^3)^k = {}^5C_k x^{10-2k}y^{3k}$

เทียบกับเทอมที่มี x^6y^6 เป็นแฟคเตอร์ (จากโจทย์)

จะได้ว่า $10 - 2k = 6$ และ $3k = 6$

นั่นคือ $k = 2$

แทนค่า k ในเทอมทั่วไป

$${}^5C_2 x^{10-4} y^6 = \frac{5!}{2!\,3!} x^6y^6 = 10x^6y^6$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ x^6y^6 คือ 10

7.2 การกระจายแบบตรีนาม (Trinomial expansion)

ในทำนองเดียวกันกับที่ได้พิจารณามาแล้วในเรื่องการกระจายแบบทวินาม ถ้าต้องการกระจาย $(x + y + z)^n$ เราทำได้โดยพิจารณาว่าเทอมใดจะปรากฏขึ้นในผลคูณ

$(x + y + z)^n = (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \ldots (x + y + z)$ คูณกัน n วงเล็บ

ในกรณีนี้จะได้เทอมต่าง ๆ ในรูป $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$ โดย $k_1 + k_2 + k_3 = n$ เทอมเหล่านี้ได้มาจากการคูณ x จาก k_1 วงเล็บ, คูณ y จาก k_2 วงเล็บ และคูณ z จาก k_3 วงเล็บ

ได้ $\binom{n}{k_1,\ k_2,\ k_3} = \dfrac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}$ วิธี

ดังนั้นจึงมีเทอม $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$ อยู่ $\binom{n}{k_1,\ k_2,\ k_3}$ เทอม

ดังนั้นเมื่อกระจาย $(x + y + z)^n$ ก็จะได้

$(x + y + z)^n =$ ผลบวกของเทอมในรูป $\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$

โดย k_1, k_2, k_3 เป็นจำนวนเต็ม $0, 1, 2, \ldots, n$

และ $k_1 + k_2 + k_3 = n$

หรืออาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$(x + y + z)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k,!\ k_2!\ k,!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

ตัวอย่างที่ 7.2.1 จงกระจาย $(x + y + z)^3$

วิธีทำ

$(x + y + z)^n =$ ผลบวกของเทอมในรูป $\frac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$

โดย k_1, k_2, k_3 อาจเป็น $0, 1, 2, 3$ และ $k_1 + k_2 + k_3 = 3$

เราอาจหาค่า k_1, k_2, k_3 ได้กรณีต่าง ๆ ดังนี้

(1) k_1	(2) k_2	(3) k_3	(4) $\frac{3}{k,!\ k,!\ k,!}$
a	0	3	1
0	1	2	3
0	2	1	3
0	3	0	1
1	0	2	3
1	1	1	6
1	2	0	3
2	0	1	3
2	1	0	3
3	0	0	

$$(x + y + z)^n = 1x^0y^0z^0 + 3x^0y^1z^2 + 3x^0y^2z^1 + 1x^0y^3z^0$$
$$+ 3x^1y^0z^2 + 6x^1y^1z^1 + 3x^1y^2z^0 + 3x^2y^0z^1$$
$$+ 3x^2y^1z^0 + 1x^3y^0z^0$$

$$\therefore \quad (x + y + z)^n = z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 + 3xz^2 + 6xyz + 3xy^2$$
$$+ 3x^2z + 3x^2 + x^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3$$
$$+ 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

ข้อสังเกต

1) ในการหาค่า k_1, k_2, k_3 ต่าง ๆ กันนั้นเราอาจยึดหลักโดยถ้า $n = 3$ และค่า k_1, k_2, k_3 ที่อาจเป็นไปได้คือ 0, 1, 2, 3

ช่องที่ 1 (k_1) เขียน 0 เรียงลงมา 4 ตัว
เขียน 1 เรียงลงมา 3 ตัว
เขียน 2 เรียงลงมา 2 ตัว
เขียน 3 เรียงลงมา 1 ตัว

ช่อง 2 (k_2) ในการเรียงชุดต่อไป เขียนเลข 0, 1, 2, 3 เรียงลงมาเรื่อย ๆ เป็นชุด ๆ โดยให้ตัดเอาตัวที่มีค่ามากที่สุดออกก่อนทุกครั้งจึงได้เป็น 0, 1, 2, 3 แล้วก็ตัด 3 ออกได้เป็น 0, 1, 2 ตัด 2 ออกเป็น 0, 1 ตัด 1 ออกได้เป็น 0

ช่อง 3 (k_3) เขียนเลขกลับกันเป็น 3, 2, 1, 0 เรียงลงมาเป็นชุด ๆ เรื่อย ๆ โดยในการเรียงชุดถัดไปและให้ตัดตัวที่มีค่ามากที่สุดออกก่อนทุกครั้ง จึงได้เป็น 3, 2, 1, 0 ตัด 3 ออกได้เป็น 2, 1, 0 ตัด 2 ออกได้เป็น 1, 0 ตัด 1 ออกได้เป็น 0

ช่อง 4 แทนค่า k_1, k_2, k_3 ในแต่ละกรณีลงใน $\dfrac{3!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$ แล้วกระจายค่าออกมา

ในกรณีที่ r มีค่ามากกว่า 3 ก็จะยึดถือการหาค่า k_1, k_2, k_3 ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด เช่นเดียวกับแบบที่กล่าวมาแล้ว เช่น ถ้ากระจาย $(x + y + z)^4$ ค่า k_1, k_2, k_3

ที่อาจเป็นไปได้ คือ k_1, k_2, k_3 ต้องเป็นเลข 0, 1, 2, 3 หรือ 4 และ $k_1 + k_2 + k_3 = 4$ คือ

k_1	k_2	k_3
0	0	4
0	1	3
0	2	2
0	3	1
0	4	0
1	0	3
1	1	2
1	2	1
1	3	0
2	0	2
2	1	1
2	2	0
3	0	1
3	1	0
4	0	0

2) เทอมทั่วไปของการกระจาย $(x + y + z)^n$

คือ $\dfrac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!}\ x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$

ซึ่งใช้สำหรับหาสัมประสิทธิ์ของเทอมใด ๆ

ตัวอย่างที่ 7.2.2 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2bc^3 จากการกระจาย $(2a - 3b + c)^6$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(2a - 3b + c)^6$ คือ

$$\frac{6!}{k_1!\, k_2!\, k_3!}(2a)^{k_1}(-3b)^{k_2}(c)^{k_3}$$

เทียบกับเทอมที่กำหนดซึ่งมี a^2bc^3 เป็นแฟคเตอร์ ซึ่งจะเห็นว่ากำลังของ a คือ 2, กำลังของ b คือ 1 และกำลังของ c คือ 3 จึงได้ว่า

$$k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 3$$

แทนค่า k_1, k_2, k_3 ที่ได้ ลงในเทอมทั่วไป

$$\frac{6!}{2!\ 1!\ 3!}(2a)^2(-3b)^1(c)^3 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 31}{2 \times 3!}(4a^2)(\quad 3b)(c^3)$$

$$= -360\ a^2bc^3$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2bc^3 ก็คือ -360

ตัวอย่างที่ 7.2.3 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2b^3 จากการกระจาย $(3 + 2a + b)^7$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(3 + 2a + b)^7$ คือ $\frac{7!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}(3^{k_1})(2a)^{k_2}(b)^{k_3}$

เทียบกำลังกับโจทย์จะได้ $k_2 = 2,\ k_3 = 3$

แต่ $k_1 + k_2 + k_3 = 7$ ดังนั้น $k_1 = 2$

แทนค่า k_1, k_2, k_3 ลงในเทอมทั่วไปจะได้

$$\frac{7!}{2!\ 2!\ 3!}(3)^2(2a)^2\ (b)^3 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 31}{2 \times 2 \times 31}(9)(4a^2)(b^3)$$

$$= 7560\ a^2b$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2b คือ 7560

ตัวอย่างที่ 7.2.4 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(1 + 2x + x^2)^3$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(1 + 2x + x^2)^3$ คือ $\frac{3!}{k,!\ k_2!\ k,!}(1)^{k_1}(2x)^{k_2}(x^2)^{k_3}$

$$= \frac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}(1)^{k_1}2^{k_2}x^{k_2+2k_3}$$

เทียบกับเทอมที่มี x^4 เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดมาให้

$\therefore$ จะได้ว่า $k_2 + 2k_3 = 4$

และ $k_1 + k_2 + k_3 = 3$

โดยที่ k_1, k_2, k_3 เป็น 0, 1, 2, 3

โดยการทดลองจะพบว่า เราได้

$$k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 2$$

และ $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 1$

ดังนั้นเทอมซึ่งมี x^4 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$\frac{3!}{1!\,0!\,2!}(1)^1(2x)^0(x^2)^2 + \frac{3!}{0!\,2!\,1!}(1)^0(2x)^2(x^2)^1$$

$$= 3x^4 + 3(4x^2)(x^2) = 15x^4$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ x^4 คือ 15

7.3 การกระจายแบบพหุนาม (Multinomial expansion)

ในทำนองเดียวกับการกระจายแบบทวินามและตรีนาม จึงอาจกล่าวได้ว่า

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้ากระจาย $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p)^n$ แล้วจะได้

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\ldots k_p!}(x_1)^{k_1}(x_2)^{k_2}\ldots(x_p)^{k_p}$$

เราเรียกสูตรข้างบนสำหรับ $p \geq 3$ ว่า "การกระจายแบบพหุนาม"

ตัวอย่างที่ 7.3.1 ในการกระจาย $(2a + b - c + 3d)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ $a^2b^3c^4d$

วิธีทำ

จากเทอมทั่วไปของ $(2a + b - c + 3d)^{10}$ คือ

$$\frac{10!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!}(2a)^{k_1}(b)^{k_2}(-c)^{k_3}(3d)^{k_4}$$

เทียบกับเทอมที่มี $a^2b^3c^4d$ เป็นแฟคเตอร์ตามที่โจทย์กำหนด

จะได้ว่า $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 4, k_4 = 1$

(โดย k_1 คือกำลังของ a, k_2 คือกำลังของ b, k_3 คือกำลังของ c, k_4 คือกำลังของ d)

แทนค่า k_1, k_2, k_3, k_4 ที่ได้ลงในเทอมทั่วไป จะได้

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 4!\ 1!}(2a)^2(b)^3(-c)^4(3d)^1 = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{2\times 3\times 2\times 4!}(4a)^2(b)^3(c)^4(3d)$$

$$= 151{,}200\ a^2b^3c^4d$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $a^2b^3c^4d$ คือ 151,200

ตัวอย่างที่ 7.3.2 จงหาสัมประสิทธิ์ของ abcde จากการกระจาย $(a+b+c+d+e)^5$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(a+b+c+d+e)^5$ คือ

$$\frac{5!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!\ k_5!}a^{k_1}b^{k_1}c^{k_3}d^{k_4}e^{k_5}$$

เทียบกับเทอมที่มี abcde เป็นแฟคเตอร์จากที่โจทย์กำหนดให้

ได้ $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 1, k_5 = 1$

$$\therefore \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!}a^1b^1c^1d^1e^1 = (5\times 4\times 3\times 2\times 1)\ abcde$$

$$= 120\ abcde$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ abcde คือ 120

ตัวอย่างที่ 7.3.3 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2bcde^3 จากการกระจาย

$(a + 2b + 3c + d - e + 6)^{10}$

วิธีทำ

เทอมทั่วไปของ $(a + 2b + 3c + d - e + 6)^{10}$

คือ $\dfrac{10!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!\ k_5!\ k_6!}(a)^{k_1}(2b)^{k_2}(3c)^{k_3}(d)^{k_4}(-e)^{k_5}(6)^{k_6}$

เทียบกับเทอมที่มี a^2bcde^3 เป็นแฟคเตอร์จะได้ว่า

$k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1,\ k_4 = 1,\ k_5 = 3$

และจะได้ว่า $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 10$ ดังนั้น $k_6 = 2$

แทนค่าในเทอมทั่วไป จะได้

$$\frac{10!}{2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 3!\ 2!}(a)^2(2b)^1(3c)^1(d)^1(-e)^3(6)^2$$

$$= -32{,}659{,}200\ a^2bcde^3$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2bcde^3 คือ $-32{,}659{,}200$

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงกระจาย

   1.1) $(3a + 2b)^4$
   1.2) $(\frac{a}{2} - b)^5$
   1.3) $(a^2 - 2)^4$
   1.4) $(a + \frac{2}{a})^3$

2. ในการกระจาย $(x - 3)^8$ เทอมที่ไม่มี x ร่วมอยู่ด้วยเลยมีค่าเท่ากับเท่าไร?

3. ในการกระจาย $(a - b)^9$ จงหาเทอมที่มี a^4b^5 อยู่ด้วย

4. จงคำนวณหาค่าของ $(1.02)^5$ (ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

5. ในการกระจาย $(x - 3y)^7$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4y^3

6. ในการกระจาย $(\frac{a}{2} - b)^5$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b^2

7. ในการกระจาย $(2 - b)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ b^7

8. ในการกระจาย $(2x^3 - 2y^2)^5$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^9y^4

9. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^6 จากการกระจาย $(x^3 - 2)^5$

10. ในการกระจาย $(2a - b + c + 3d)^6$ จงหา

    10.1) สัมประสิทธิ์ของ a^6
    10.2) สัมประสิทธิ์ของ a^2b^4
    10.3) สัมประสิทธิ์ของ ab^4c
    10.4) สัมประสิทธิ์ของ a^2bc^2d

11. ในการกระจาย $(3 - x + 2y - 3z)^8$ จงหา

    11.1) สัมประสิทธิ์ของ x^6y^2
    11.2) สัมประสิทธิ์ของ x^3y^2z
    11.3) เทอมที่ไม่มี x, y, z อยู่ด้วยเลย

12. ในการกระจาย $(a - 2b + 3c)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^5b^4c