บทที่ 5
เมตริกซ์
(Matrix)

5.1 เมตริกซ์และความหมาย

ในชีวิตประจำวันเรามักพบว่า ถ้าจะบันทึกผลการสังเกตุหรือการทดลองบางอย่างบางครั้งก็มีการเขียนตัวเลขเรียงกันเป็นแถวหลาย ๆ แถว เช่น

ถ้านายดำ, นายแดง, นายขาว, นายเขียว ลงทะเบียนเรียนคนละ 8 วิชา สมมุติว่าบันทึกผลการสอบของเขาเหล่านั้นได้เป็น

	เกรด G	เกรด P	เกรด F
นายดำ	1	6	1
นายแดง	2	3	3
นายขาว	3	1	4
นายเขียว	5	2	1

จะอ่านได้ว่า นายแดงสอบได้เกรด G 2 วิชา, สอบได้เกรด P 3 วิชา สอบได้เกรด F 3 วิชา เป็นต้น

ถ้าตัดเอาชื่อคนและชื่อเกรดออกเสียแล้วใช้เครื่องหมายวงเล็บ [ ] หรือ ( ) เขียนล้อมรอบตัวเลขเหล่านี้ไว้ จะได้ตารางที่มีจำนวนเรียงกันเป็นแถวและคอลัมน์ซึ่งในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า "เมตริกซ์" (matrix) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ อาจกล่าวได้ว่า "**เมตริกซ์** ประกอบขึ้นด้วยจำนวนที่นำมาเรียงกันเป็นแถวและคอลัมน์" นั่นเองคือ

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{คอลัมน์} \\
\text{แถว} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

จำนวนแต่ละจำนวนในเมตริกซ์ เช่น จากตัวอย่าง คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 นั้น เรียกว่า "**อีลีเมนต์ของเมตริกซ์**" ตำแหน่งของอีลีเมนต์แต่ละตัวมีความสำคัญมาก เพราะถ้าสลับที่กันระหว่างอีลีเมนต์สองตัวใด ๆ ที่ไม่เท่ากัน จะได้เมตริกซ์ใหม่ที่ต่างกับเมตริกซ์เดิม เช่น

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ กับ } \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ จะต่างกัน}
$$

ดังนั้น เมื่อกล่าวถึงอีลีเมนต์ของเมตริกซ์จะต้องมีการระบุถึงตำแหน่งให้ถูกต้อง "วิธีบอกตำแหน่งของอีลีเมนต์ในเมตริกซ์บอกได้โดยระบุถึง**แถว**และ**คอลัมน์**" ว่า อีลีเมนต์ตัวนั้น ๆ อยู่ในแถวไหน? คอลัมน์ใด?

ตัวอย่างที่ 5.1.1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{คอลัมน์ที่ 1} & \text{คอลัมน์ที่ 2} & \text{คอลัมน์ที่ 3} & \text{คอลัมน์ที่ 4} & \text{คอลัมน์ที่ 5} \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{แถวที่ 1} \longrightarrow \\ \text{แถบที่ 2} \longrightarrow \\ \text{แถวที่ 3} \longrightarrow \\ \text{แถวที่ 4} \longrightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ -6 & -4 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 12 & 15 & 18 & 20 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ดังนั้น อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 1 คือ 0

อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2 คือ 2

อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 5 คือ −2

อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 3 คือ −1

อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 3 คอลัมน์ที่ 2 คือ −4

อีลีเมนต์ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 5 คอลัมน์ที่ 5 คือ 20

หรือจากเมตริกซ์ข้างบนเราอาจกล่าวได้ว่า

15 เป็นอีลีเมนต์ที่อยู่ในแถวที่ 4 คอลัมน์ที่ 3

7 เป็นอีลีเมนต์ที่อยู่ในแถวที่ 3 คอลัมน์ที่ 3

6 เป็นอีลีเมนต์ที่อยู่ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 5

หมายเหตุ การบอกตำแหน่งอีลีเมนต์ของเมตริกซ์นี้ต้องบอกแถวก่อนคอลัมน์เสมอ

ขนาดของเมตริกซ์ เราจะบอกขนาดของเมตริกซ์ใด ๆ ด้วยจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์ กล่าวคือ เมตริกซ์ที่มี m แถว n คอลัมน์เรียกว่าเมตริกซ์นั้นมีขนาด $m \times n$ (อ่านว่าเมตริกซ์ขนาด m by n หรือ m คูณ n)

เช่น 1) $[0]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 1×1

2) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2

3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×5

4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×3

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 1×4

6) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×1

โดยทั่ว ๆ ไปมักนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ... แทนชื่อเมตริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c, ... แทนอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ A, B, C, ... ตามลำดับ และจะเขียนแทนอีลีเมนต์ที่อยู่ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ A ด้วย "a_{ij}" โดย i เป็นตัวที่บอกตำแหน่งของอีลีเมนต์ว่าอยู่แถวใด และ j บอกว่าอยู่คอลัมน์ใด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×2 และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×4

a_{12} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ A ที่อยู่ในแถวที่ 1 คอลัมน์ 2

a_{31} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ A ที่อยู่ในแถวที่ 3 คอลัมน์ 1

b_{22} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ B ที่อยู่ในแถวที่ 2 คอลัมน์ 2

b_{24} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ B ที่อยู่ในแถวที่ 2 คอลัมน์ 4

b_{13} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ B ที่อยู่ในแถวที่ 1 คอลัมน์ 3

ถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{array}{l} a_{11} = 1, a_{12} = 2 \\ a_{21} = 3, a_{22} = 4 \\ a_{31} = 5, a_{32} = 6 \end{array}$

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ จะเขียนรูปเมตริกซ์ A โดยใช้ a_{ij} เป็นอีลีเมนต์ของเมตริกซ์ A ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนสั้น ๆ เป็น

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

ข้อสังเกต เมตริกที่มีขนาด $m \times n$ จะมีจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด $m \times n$ อีลีเมนต์

เมตริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

ถ้าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวกับจำนวนคอลัมน์เท่ากัน (คือ $m = n$) แล้ว จะเรียกเมตริกซ์ A นั้นว่า "เมตริกซ์จัตุรัส"

เมตริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

ถ้าอีลีเมนต์ทุกตัวของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์แล้วจะเรียกเมตริกซ์ A ว่า "เมตริกซ์ศูนย์" และใช้เขียนแทนด้วย 0

นั่นคือ

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ คำว่า "ขนาดของเมตริกซ์" ที่ใช้นั้น บางทีก็เรียกอย่างอื่นได้ เช่น มิติของเมตริกซ์, อันดับของเมตริกซ์ เป็นต้น

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงบอกขนาดและจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมดของเมตริกซ์ ต่อไปนี้

1.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

1.2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

1.4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

2.1) จงบอกขนาดของเมตริกซ์ A

2.2) จงบอกจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมดของ A

2.3) จงหา a_{13}, a_{15}, a_{22}, a_{34}, a_{43}, a_{25}

2.4) จงเขียนอีลีเมนต์ในแถวที่ 3

2.5) จงเขียนอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ 5

3. เมตริกซ์ต่อไปนี้ เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์ศูนย์ เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์จัตุรัส

3.1) $[0]$

3.2) $[1]$

3.3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.2 การเท่ากัน, การบวก และการคูณเมตริกซ์

การเท่ากันของเมตริกซ์

นิยาม 5.2.1 ให้ A กับ B เป็นเมตริกซ์สองเมตริกซ์ใด ๆ A = B ก็ต่อเมื่อ A กับ B มีขนาดเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุก ๆ ค่าของ i, j

นั่นคือ เมตริกซ์สองเมตริกซ์ใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเดียวกันและอีลีเมนต์ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

ตัวอย่าง 5.2.1

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

จะกล่าวว่า $A \neq B$ เพราะ A กับ B มีขนาดไม่เท่ากันคือ A มีขนาด 2 x 3 แต่ B มีขนาด 3 x 2

ตัวอย่างที่ 5.2.2

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

ก็จะได้ว่า $A \neq B$ เพราะ $a_{22} \neq b_{22}$ (คือ $4 \neq 0$) ถึงแม้ว่าจะมีขนาดเท่ากันก็ตาม

ตัวอย่างที่ 5.2.3

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{6}{3} & 2^2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A = B$ เพราะมีขนาดเดียวกัน คือ 2×2 ทั้งคู่ และ

$a_{11} = b_{11} = 2$, $b_{12} = b_{12} = 3$

$a_{21} = b_{21} = 2$, $a_{22} = b_{22} = 4$

ตัวอย่างที่ 5.2.4

กำหนดให้ เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y+2 & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

จงหาค่า x, y, z

วิธีทำ $\because$ (1) $x = -2$

(2) $y + 2 = 2$

$\therefore y = 2 - 2 = 0$

(3) $3z = 6$

$\therefore z = 2$

ดังนั้นค่า $x = -2$, $y = 0$, $z = 2$

ตัวอย่างที่ 5.2.5

ถ้า $\begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

จงหาค่า x และ y

วิธีทำ $\because$ เมตริกซ์ทั้งสองที่โจทย์กำหนดให้เท่ากัน

$\therefore \quad 2x + y = 9$ .... (1)

$3x - y = -4$ .... (2)

(1) + (2) จะได้ $5x = 5$

$\therefore x = 1$

แทน x ใน (1)

$\therefore y = 7$

ดังนั้น $x = 1, y = 7$

การบวกเมตริกซ์

นิยาม 5.2.2 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว ผลบวกของ A กับ B เขียนแทนด้วย A + B โดย

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

(หรือถ้าให้ $A + B = C$ จะได้ $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ โดย $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ทุกค่า i,j)

นั่นคือ การบวกเมตริกซ์นั้นจะได้ว่าเมตริกซ์สองเมตริกซ์ใด ๆ จะบวกกันได้ต้องมี**ขนาดเดียวกัน** และการบวกนั้นให้เอาอีลีเมนต์ตัวที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์ทั้งสองบวกกัน โดยเมตริกซ์ที่ได้ใหม่นั้นจะมีขนาดเดียวกับเมตริกซ์คู่เดิมด้วย

ตัวอย่างที่ 5.2.6

ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{จงหา } A + B$$

วิธีทำ $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 5 & 2 + (-6) \\ 3 + (-1) & 4 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.7

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ จงหา $A + B$

วิธีทำ

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-2) & -3 + 3 \\ -1 + 1 & 0 + 0 & 4 - 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.8

ให้ $a = \begin{bmatrix} & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $A + 0$

วิธีทำ

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 3+0 & 4+0 \\ 5+0 & 6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad = 4$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5.2.8 จะเห็นว่าเมตริกซ์ศูนย์ (0) มีคุณสมบัติคล้ายจำนวนศูนย์ (0) ในระบบจำนวนจริง คือไม่ว่าจะนำเอาเมตริกซ์ศูนย์ไปบวกกับเมตริกซ์ใดก็ตามที่มีขนาดเดียวกันแล้วผลลัพท์จะเป็นเมตริกซ์เดิมเสมอ

หมายเหตุ ถ้าเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดต่างกันจะไม่สามารถนำมาบวกกันได้ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A กับ B บวกกันไม่ได้

การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง

นิยาม 5.2.3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$cA = c\,[a_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [ca_{ij}]_{m \times n}$$

ดังนั้น

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \ldots ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \ldots ca_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{m3} \ldots ca_{mn} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ การคูณเมตริกซ์ A ใด ๆ ด้วยจำนวนจริง c ให้เอาจำนวนจริง c นั้นคูณกับอีลีเมนต์ของ A ทุกอีลีเมนต์ โดยขนาดของเมตริกซ์ A ยังคงเดิม

ตัวอย่างที่ 5.2.9

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \end{bmatrix}$ จงหา 2A

วิธีทำ

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-3) \\ 2 \times 0 & 2 \times \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

เมตริกซ์ (-1) B มักนิยมเขียนเป็น $-$B

ดังนั้น ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาดเดียวกันแล้ว ผลต่างของ A กับ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $A - B$ ก็คือ $A + (-B)$

นั่นคือ $\mathbf{A - B = A + (-B)}$

ตัวอย่างที่ 5.2.10

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $A - B$

วิธีทำ $\quad A - B = A + (-B)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+0 & 4+(-4) \\ -2+(-3) & 0+(-1) & (-1)+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

หรือกล่าวได้ว่าเมตริกซ์สองเมตริกซ์ใด ๆ จะลบกันได้ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสอง

จะต้องมีขนาดเดียวกันและการลบนั้นให้เอาอีลีเมนต์ตัวที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์ทั้งสองลบกัน

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 5.2.10

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & 4 - 4 \\ -2\,1 - -3\,2 & 0 - 3\text{-}0\ 1 & -1 \quad -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1\ 5 & -1\ 3 & -2\,0 \end{bmatrix}$$

นั่นเอง

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

นิยาม 5.2.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times r}$

แล้ว $A \times B = C = [c_{ij}]_{m \times r}$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i1} + b_{1j} + a_{i2} + b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$

$(i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n)$

นั่นคือ อาจกล่าวได้ว่า

"ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $\underline{m \times n}$ และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $\underline{n \times r}$ แล้ว $A \times B$ จะเป็นเมตริกซ์ขนาด $\underline{m \times r}$

สมมุติว่า $A \times B = C = [c_{ij}]_{m \times r}$ จะหา c_{ij} ได้ "จากการนำเอาอีลีเมนต์ในแถวที่ i ของเมตริกซ์ A ไปคูณกับอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ B เป็นคู่ ๆ ตามลำดับ แล้วบวกผลคูณเหล่านั้นเข้าด้วยกัน"

หมายเหตุ เราจะเขียนแทน $A \times B$ ด้วย AB

ตัวอย่างที่ 5.2.11

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

ถ้า $AB = C$ จงหา $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$

วิธีทำ

c_{11} ได้จากการนำเอาอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 ของ A ไปคูณกับอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ 1 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณนั้นมาบวกกัน

$$\therefore c_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = (0 \times 4) + (1 \times 6) = 0 + 6 = 6$$

c_{12} ได้จากการนำเอาอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 ของ A ไปคูณกับอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ 2 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณนั้นมาบวกกัน

$$\therefore c_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = (0 \times 5) + (1 \times 7) = 0 + 7 = 7$$

c_{21} ได้จากการนำเอาอีลีเมนต์ในแถวที่ 2 ของ A ไปคูณกับอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ 1 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณมาบวกกัน

$$\therefore c_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = (2 \times 4) + (3 \times 6)$$

$$= 8 + 18$$

$$= 26$$

c_{22} ได้จากการนำเอาอีลีเมนต์ในแถวที่ 2 ของ A ไปคูณกับอีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ 2 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณมาบวกกัน

$$\therefore c_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = (2 \times 5) + (3 \times 7)$$

$$= 10 + 21$$

$$= 31$$

นั่นคือ $C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$

หรือ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (0 \times 4) + (1 \times 6) & (0 \times 5) + (1 \times 7) \\ (2 \times 4) + (3 \times 6) & (2 \times 5) + (3 \times 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 6 & 0 + 7 \\ 8 + 18 & 10 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันถ้าเราหา BA จะได้

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 \times 0) + (5 \times 2) & (4 \times 1) + (5 \times 3) \\ (6 \times 0) + (7 \times 2) & (6 \times 1) + (7 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 10 & 4 + 15 \\ 0 + 14 & 6 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$$

จะสังเกตเห็นว่า $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 5.2.12

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา AB และ BA

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(1) & (1)(-4)+(2)(0) & (1)(-2)+(2)(2) \\ (3)(2)+(0)(1) & (3)(-4)+(0)(0) & (3)(-2)+(0)(2) \\ (0)(2)+(1)(1) & (0)(-4)+(1)(0) & (0)(-2)+(1)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & -4+0 & -2+4 \\ 6+0 & -12+0 & -6+0 \\ 0+1 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } BA = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(1)+(-4)(3)+(-2)(0) & (2)(2)+(-4)(0)+(-2)(1) \\ (1)(1)+(0)(3)+(2)(0) & (1)(2)+(0)(0)+(2)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-12-0 & 4-0-2 \\ 1+0+0 & 2+0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

จะสังเกตเห็นว่า $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 5.2.13

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา **AB และ BA**

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 6+1-1 & 4+0-1 & 2-2-1 \\ 0+2+1 & 0+0+1 & 0-4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

หา BA ไม่ได้ เพราะจำนวนคอลัมน์ของ B (คือ 3) ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A (คือ 2) คือ B มีขนาด 3×3 และ A มีขนาด 2×3

ดังนั้น BA คูณกันไม่ได้

ข้อเตือนใจ

อย่าลืมว่าเมตริกซ์ A กับ B จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ A ต้องมีขนาด $m \times n$ และ B ต้องมีขนาด $n \times r$ คือจำนวนคอลัมน์ของ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B เท่านั้น แล้วยังได้ว่าเมตริกซ์ผลคูณจะมีขนาด $m \times r$ ด้วย

หรือเขียนสั้น ๆ ว่า

$$A_{m\times n} B_{n\times r} = C_{m\times r}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่เมตริกซ์ A ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัสคูณตัวของมันเองจะใช้สัญลักษณ์แบบเลขยกกำลังแทน เช่น

$$\mathbf{AA} = A^2$$

$(\mathbf{A\,A})\,\mathbf{A} = A^3$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 5.2.14

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา A^2 และ A^3

วิธีทำ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงพิจารณาว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้เมตริกซ์ใดบ้างที่เท่ากัน

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

2. ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & x+3z \\ y-2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ & 2x \end{bmatrix}$ จงหา x, y, z

3. ถ้า $\begin{bmatrix} 3 & & 0 \\ 1 & y-2 \quad 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3y \end{bmatrix}$ จงหา x และ y

4. ถ้า $\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 5x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา x และ y

5. ถ้า $x^3 + x - 1 = 0$ จงพิจารณาว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่?

$$\begin{bmatrix} -1 & -x+1 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-x^3 & x^3 \\ -x^3+1 & x^3+x \end{bmatrix}$$

6. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

จงหา

6.1) $A + F$

6.2) $(A + B) + F$

6.3) $A + C$

6.4) CA

6.5) AC

6.6) AD

6.7) $(AD)E$

6.8) C^2

6.9) $C^3 - C^2$

6.10) DA

6.11) $3A$

6.12) $-\frac{1}{2}D$

6.13) $2A - 3B$

6.14) ถ้า $DE = H$ จงหา h,,, h_{22}, h_{34}

6.15) จงพิจารณาว่า

$(C - G)^2$ เท่ากับ $C^2 - 2CG + G^2$ หรือไม่

6.16) จงพิจารณาว่า

$C^2 - G^2$ เท่ากับ $(C + G)(C \quad G \quad)$ หรือไม่

6.17) จงหาขนาดของ C^3

6.18) จงหาขนาดของ (AD)

6.19) จงหาขนาดของ $(AD)E$

6.20) จงหาขนาดของ $A + B$

7. ถ้า

$$A = [1 \quad 0 \quad -2], \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [4]$$

จงหา

7.1) AB

7.2) **BA** 7.4) **CB**

7.3) **CA** 7.5) **AC**

8. ให้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า **AB = C** จงหา x, y

9. โรงเรียนแห่งหนึ่งต้องการซื้อสมุด 20 โหล, ดินสอ 12 โหล, ยางลบ 30 โหล ไม้บันทัด 15 โหล โดยมีพ่อค้าเสนอราคาต่าง ๆ กันทั้งสี่รายการดังนี้

	ราคาสมุด 1 โหล (หน่วย) บาท	ราคาดินสอ 1 โหล (หน่วย) บาท	ราคายางลบ 1 โหล (หน่วย) บาท	ราคาไม้บันทัด 1 โหล (หน่วย) บาท
นายดำ	8	10	2	10
นายแดง	10	7	1	8
นายเขียว	12	5	2	9
นายขาว	5	13	1	11

โรงเรียนจะซื้อสินค้าจากผู้ที่เสนอราคาต่ำสุด อยากทราบว่า นายดำ, นายแดง, นายเขียว, นายขาว เสนอสิ่งของสี่รายการนั้นคนละราคาเท่าใด? และโรงเรียนจะซื้อจากผู้ใด? (ทำโดยใช้เมตริกซ์)

5.3 กฎเกี่ยวกับการบวกและการคูณเมตริกซ์

การบวกและการคูณเมตริกซ์มีคุณสมบัติคล้ายคลึงกับการบวกและการคูณของจำนวนจริงเป็นส่วนใหญ่ แต่ก็มีคุณสมบัติที่แตกต่างจากกันออกไปบ้าง คุณสมบัติการบวกและการคูณของเมตริกซ์มีดังต่อไปนี้

1. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาดเดียวกันแล้ว

   $A + B = B + A$

2. ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาดเดียวกันแล้ว

   $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. สำหรับเมตริกซ์ A ใด ๆ จะมีเมตริกซ์ศูนย์ (0) ซึ่ง

   $A + 0 = A = 0 + A$

4. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$, B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times r$ และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด $r \times s$ แล้ว

   $(AB)C = A(BC)$

5. สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times r$ แล้ว

   5.1) $x(yA) = (xy)A = y(xA)$

   5.2) $A(yB) = y(AB)$

6. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times r$ แล้ว

   $(A + B)C = AC + BC$

7. ถ้า C เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$, A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times r$ แล้ว

   $C(A + B) = CA + CB$

คุณสมบัติที่นำมาใช้กับการคูณไม่ได้ ซึ่งต้องระมัดระวังในการคำนวณเกี่ยวกับเมตริกซ์ก็คือ

1) ใช้กฎการสลับที่เกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์ไม่ได้ เพราะ AB กับ BA ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากันเสมอ

   ดังเช่น ในตัวอย่างที่ 5.2.11, ตัวอย่างที่ 5.2.12, และตัวอย่างที่ 5.2.13 ในเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

2) ถ้า AB = 0 (เมตริกซ์ศูนย์) แล้ว ไม่จำเป็นที่เมตริกซ์ A หรือเมตริกซ์ B จะต้องเป็นเมตริกซ์ศูนย์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   จะเห็นว่า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ แต่ $AB = 0$

3) ถ้า AB = AC แล้ว ไม่จำเป็นที่เราจะต้องได้ว่า B = C เสมอไป เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   จะได้ $AB = AC = [11]$ แต่ $B \neq C$

4) ถ้า **A = B** แล้ว **AC = BC** และ **CA = CB** แต่ **CA** กับ **BC** ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

   เช่น

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AC = BC = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C\ A = C\ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $CA \neq BC$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Indentity matrix)

นิยาม 5.3.1 เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์เท่ากันคือมีขนาด $n \times n$ สมมุติ คือ เมตริกซ์ $[a_{ij}]$ จะเรียกว่าเป็น เมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad i = j \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad i \neq j \end{cases}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์ คือเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมี 1 อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมจากมุมซ้ายสุดของแถวแรกไปยังมุมขวาสุดของแถวสุดท้ายและมี 0 อยู่ในตำแหน่งอื่น ๆ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าถ้าเอาไปคูณเมตริกซ์ใดจะได้เมตริกซ์เดิมเสมอ และมักเรียกเมตริกซ์เอกลักษณ์ ดังกล่าวว่า "เมตริกซ์ I_n" เมื่อ n คือจำนวนแถวและคอลัมน์ดังนั้น

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

หมายเหตุ

1) ถ้า A และ B ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัสโดย A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $n \times r$ แล้ว

เราจะได้

$$AI_n = A \ (\neq I_n A \because \text{ คูณกันไม่ได้})$$

และ $$I_nB = B \ (\neq BI_n \because \text{ คูณกันไม่ได้})$$

2) ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสโดย A มีขนาด $n \times n$ แล้ว เราจะได้ว่า

$A I_n = A = I_nA$ เสมอ

แบบฝึกหัด 5.3

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า

1.1) $A + B = B + A$

1.2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

1.3) $A + O = A$

1.4) $(AB)C = A(BC)$

1.5) $(A + B)C = AC + BC$

1.6) $C(A + B) = CA + CB$

2. ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ a, b, c ที่ทำให้ $A^2 + 3A + 2I = 0$

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา AB และ BA

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาเมตริกซ์ I ซึ่ง $AI = A$ และ $IA = A$

5.

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $AI_2 = A = I_2A$

5.4 อินเวอร์สของเมตริกซ์ (Inverse of matrix)

นิยาม 5.4.1 ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้า B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่ง

$$AB = I_n = BA$$

แล้วเราจะเรียก B ว่าเป็นอินเวอร์สของ A (inverse of A) หรือส่วนกลับของ A เขียนแทนด้วย A^{-1} (อ่านว่า เอ-อินเวอร์ส) นั่นคือ $B = A^{-1}$ นั่นเอง (ในทำนองเดียวกัน เราอาจเรียก A ว่าเป็นอินเวอร์สของ B และเขียนแทนด้วย B^{-1} นั่นคือ $A = B^{-1}$ ก็ได้) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

เรากล่าวว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

หรือ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ก็ได้

หมายเหตุ ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ไม่จำเป็นเสมอไปว่าจะต้องมี A^{-1} บางที อาจจะไม่มี A^{-1} ก็ได้

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ขนาด 2×2

ในตอนนี้จะแสดงการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์โดยวิธีการแก้สมการ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่ทำให้ $AB = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

โดยนิยามการเท่ากันของเมตริกซ์ ได้สมการดังนี้

$a_{11}x + a_{12}y_1 = 1$ ....(1)

$a_{21}x_1 + a_{22}y_1 = 0$ ....(2)

$a_{11}x_2 + a_{12}y_2 = 0$ . . (3)

$a_{21}x_2 + a_{22}y_2 = 1$ .... (4)

โดยการแก้สมการได้ว่า

(1) x a_{22} (2) × a_{12} ได้ $(a_{,,}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21})\ x_1 =$ $a_{,,}$ .... (5)

(1) x a_{21} − (2) x a_{11} ได้ $(a_{12}\ a_{21} - a_{,,}\ a_{,,})\ y_1 =$ $a_{,,}$ .... (6)

(4) x a_{12} − (3) × a_{22} ได้ $(a_{12}\ a_{21} - a_{11}\ a_{,,})\ x_2 =$ a_{12} .... (7)

(4) × a_{11} − (3) × a_{21} ได้ $(a_{,,}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21})\ y_2 =$ $a_{,,}$ .... (8)

1) กรณี $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ จาก (5) ได้ $x_1 \quad \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$

จาก (6) ได้ $y_1 = \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, จาก (7) ได้ $x_2 = \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

และจาก (8) ได้ $y_2 = \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

จาก $$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ $$BA = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ได้ว่า $$A^{-1} = B = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

2) กรณี $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ จาก (5), (6), (7) และ (8) ได้ว่า $a_{22} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = 0$, และ $a_{11} = 0$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นี่แสดงว่าถ้ามีเมตริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = I$ แล้ว $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ต้องไม่เท่ากับ 0

ดังนั้นถ้า $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ แล้ว A ไม่มีอินเวอร์ส

หมายเหตุ เราสามารถใช้สูตร นี้หา A^{-1} ของเมตริกซ์ A ใด ๆ ที่มีขนาด 2×2 ได้เลย แต่ถ้าเมื่อไร $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ แล้ว จะกล่าวได้ว่าไม่มี A^{-1}

ตัวอย่างที่ 5.4.1

ถ้า $A = \begin{bmatrix} & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A-’

วิธีทำ ในที่นี้ $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{(3)\ (4) - (5)\ (2)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างอาจจะหา A^{-1} โดยตรงได้ด้วยการสมมุติ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

แล้วใช้คุณสมบัติ $AA^{-1} = I$

แล้วจัดรูปสมการ แก้สมการหาค่า x_1, y_1, x_2, y_2 ก็ได้

ข้อสังเกต

ไม่ว่าจะหา A^{-1} ด้วยวิธีใดก็ตามเพื่อความแน่นอนควรทดสอบดูว่า $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ ไหม?

จากตัวอย่างสามารถตรวจคำตอบได้ดังนี้

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}A$ =[;I-;][; $\left.\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

อนึ่ง วิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบใด ๆ อาจกระทำได้โดยวิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

(E – 1) คูณหรือหารตลอดสมการใดสมการหนึ่งด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่งที่ไม่ใช่ศูนย์

(E – 2) คูณตลอดสมการใดสมการหนึ่งด้วยจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวก (หรือลบ) อีกสมการหนึ่ง

(E – 3) สลับที่กันระหว่างสองสมการใด ๆ

จะนำเอาวิธีการเหล่านี้มาสร้างหลักเกณฑ์ในการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ได้

วิธีการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัส A **ใด ๆ** ให้ตั้งเมตริกซ์ในรูป

$$[\,A \mid I\,]$$

แล้วใช้การกระทำ (E – 1), (E – 2), (E – 3) กับแถวต่าง ๆ ของเมตริกซ์นี้เรื่อยไปจนกระทั่งได้ว่า

เมตริกซ์ทางซ้ายมือของเส้นดิ่งเป็นเมตริกซ์ I คือได้ผลลัพธ์ เป็น

$$[\,I \mid B\,]$$

เมื่อได้เช่นนี้จะสรุปได้ว่า

B ก็คืออินเวอร์สของเมตริกซ์ A ที่กำหนดมาให้นั่นเอง นั่นคือ $B = A^{-1}$

ตัวอย่างที่ 5.4.2

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ พิจารณา

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (1) ด้วย 3 ได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) ได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

คูณตลอดแถวที่ (2) ด้วย $\frac{3}{2}$ ได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย $\frac{5}{3}$ เท่าของแถวที่ (2) ได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

จึงสรุปได้ว่า

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ลองทดสอบดูจะได้ว่า $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

ตัวอย่างที่ 5.4.3

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ พิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (1) ด้วย 4 ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (3) ด้วย 3 เท่าของแถวที่ (1) ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (2) ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

จึงสรุปได้ว่าอินเวอร์สของ A คือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทดสอบ

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ A ที่มีขนาด 3×3 หรือมากกว่านั้นก็สามารถหาได้โดยวิธีสมมุติ A^{-1} แล้วใช้คุณสมบัติ $AA^{-1} = I$ แล้วแก้สมการหาค่าอีลีเมนต์ของ A^{-1} ที่สมมุติก็ได้ แต่จะมีความยุ่งยากในการแก้สมการมากขึ้น จึงมักนิยมหาอินเวอร์สด้วยวิธีหลังนี้

การแก้สมการโดยใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์

ให้ระบบสมการที่กล่าวถึงในที่นี้หมายถึงสมการเชิงเส้น (สมการกำลังหนึ่ง) และมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่า เช่น

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \text{ ---- (1)} \\ 5x + 6y &= 2 \text{ ---- (2)} \end{aligned}\right\}$$ เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสองสมการ และสองตัวไม่ทราบค่า (คือ x, y)

หรือ

$$\left.\begin{aligned} 4x + 8y - 3z &= 4 \text{ ---- (1)} \\ 2x + 5y \phantom{{}+z} &= 1 \text{ ---- (2)} \\ 3x + 6y + z &= 2 \text{ ---- (3)} \end{aligned}\right\}$$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีสามสมการ สามตัวไม่ทราบค่า (คือ x, y, z)

จากสมการชุดที่หนึ่ง สมมุติ คือ

$$4x + 8y - 32 = 4$$
$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 6y + z = 2$$

สามารถเขียนสมการชุดนี้ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 4x + 8y - 3z \\ 2x + 5y \\ 3x + 6y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

หรือแยกเมตริกซ์ทางซ้ายมือ ของสมการออกไป จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ จากสมการชุดใด ๆ ย่อมสามารถเขียนสมการชุดนั้นให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็นสามเมตริกซ์ คือ

1. เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าในที่นี้ได้แก่

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

2. เมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่าในที่นี้คือ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

3. เมตริกซ์ของค่าคงที่ ในที่นี้คือ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า

$U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า

$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่

ก็จะเขียนสมการที่กำหนดให้เป็นสมการของเมตริกซ์ได้เป็น

$$AU = C$$

กล่าวโดยทั่ว ๆ ไปได้ว่า การแก้สมการโดยใช้อินเวอร์ของเมตริกซ์นั้นทำได้โดยเปลี่ยนสมการชุดที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ โดย

เมตริกซ์ A แทนเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า

เมตริกซ์ U แทนเมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า

เมตริกซ์ C แทนเมตริกซ์ของค่าคงที่

ดังนั้นสมการชุดที่กำหนดให้ก็คือสมการของเมตริกซ์

$$AU = C \text{ --------------------- } (1)$$

จากนั้นก็หา A^{-1} (ตามวิธีที่ศึกษามาแล้ว)

เอา A^{-1} คูณ (1) ทั้งสองข้างจะได้

$$A^{-1}(AU) = A^{-1}C$$
$$(A^{-1}A)U = A^{-1}C$$
$$IU = A^{-1}C$$
$$U = A^{-1}C$$

ก็จะได้ค่าของตัวไม่ทราบค่าตามต้องการ

หมายเหตุ ถ้าหา A^{-1} แล้วปรากฏว่าไม่มี A^{-1} ก็สรุปว่าสมการนั้นไม่มีคำตอบหรืออาจมีคำตอบได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ

ตัวอย่าง 5.4.4 จงแก้สมการ

$$4x + 8y = 4$$
$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 6y + z = 2$$

วิธีทำ จากสมการให้ A เป็นเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า คือ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

U เป็นเมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า คือ

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

C เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ คือ

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการชุดที่กำหนดให้ คือสมการเมตริกซ์

$$AU = C \qquad \text{------------------- (2)}$$

จากตัวอย่างที่ 5.4.3 ได้ว่า

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ซึ่งทำให้ $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของ (2) ด้วย A^{-1} ก็จะได้

$$A^{-1}(AU) = A^{-1}C$$

$$(A^{-1}A)U = A^{-1}C$$

$$IU = A^{-1}C$$

$$\therefore U = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x = 3, y = -1, z = -1$ เป็นคำตอบที่ต้องการ

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ต่อไปนี้ โดย 1.1) ถึง 1.5) ให้หาโดยใช้สูตร

1.1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.2) $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

1.3) $c = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

1.4) $D = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.5) $E = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.6) $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

1.7) $H = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

k.8) $I = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

1.9) $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.10) $K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

2. ให้

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

3. จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์

3.1) $14x + 7y = 3$

$x + 2y = 1$

3.2) $3x + 6y = 2$

$x + 2y = 3$

3.3) $2x = 4$

$-2y = 6$

3.4) $2x - 4y = 1$

$-x - 3y = 2$

3.5) $x + 3y + 5z = 1$

$y + 2z = 1$

$2x - 42 = -2$

5.5 **ดีเทอร์มิแนนท์** (determinant)

ในเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) ใด ๆ แต่ละเมตริกซ์จะมีจำนวนจริงที่มีความสัมพันธ์กับเมตริกซ์นั้น ๆ อยู่จำนวนหนึ่ง ซึ่งจะเรียกจำนวนจริงนั้นว่าดีเทอร์มิแนนท์ (determinant)

5.5.1 ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ขนาด 2 × 2

นิยาม 5.5.1 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 โดย $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว

ดีเทอร์มิแนนท์ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย det (A) หรือ | A | หรือ

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ คือ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

นั่นคือ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ข้อสังเกต

1) ค่า $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ นั้นอาจจำง่าย ๆ ว่า คือค่าคูณไขว้ระหว่างอีลีเมนต์ โดยคูณลงมีเครื่องหมายเป็นบวก คูณขึ้นมีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนี้

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2) ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด 1 × 1 คือ $A = [a_{11}]$ แล้ว

$|A| = a_{11}$ เช่น $A = [5]$ ดังนั้น $|A| = 5$

ตัวอย่างที่ 5.5.1 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3) $c = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ 4) $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

5) $E = \begin{bmatrix} 8 & \\ 5 & 24 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1) จาก $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ |A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (2)(4) - (3)(1)$$

$$= 8 - 3 = 5$$

2) จาก

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |B| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(2) - (5)(3)$$

$$= 8 - 15 = -7$$

3) จาก

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |C| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$= (4)\ (5) - (10)\ (2)$

$= 20 - 20 = 0$

4) จาก

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |D| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$= (2)\ (-3) - (-2)\ (5)$

$= -6 + 10 = 4$

5) จาก

$$E = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |E| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (8)\ (3) - (5)\ (4)$

$= 24 - 20 = 4$

ข้อสังเกต

จะเห็นว่าเมตริกซ์สองเมตริกซ์ใด ๆ ที่ต่างกัน (คือไม่เท่ากัน) อาจมีค่าดีเทอร์มิแนนท์เท่ากันก็ได้ เช่น

ในตัวอย่าง 5.5.1

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

และ $|D| = |E| = 4$

5.5.2 **ค่าไมเนอร์** (Minor)

ในเมตริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ จะเรียกค่าดีเทอร์มิแนนท์ที่เหลือจากการตัดบรรดาอีลีเมนต์ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ A ออกว่า "ไมเนอร์ (minor) ของ a_{ij}" ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $|A_{ij}|$

เช่น $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ถ้าต้องการหาไมเนอร์ของ a_{11} (หรือ $|A_{11}|$) ก็ให้ลากเส้นตัดบรรดาอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ของ A ออกเสียดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของอีลีเมนต์ที่เหลือก็คือ $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

นั่นคือ $|A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

หรือถ้าต้องการหา $|A_{32}|$

ก็ให้ลากเส้นตัดอีลีเมนต์ในแถวที่ 3 และคอลัมน์ที่ 2 ของ A ออกเสียดังนี้

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของอีลีเมนต์ที่เหลือก็คือ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

ดังนั้น $|A_{32}| = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$

ตัวอย่างที่ *5.5.2* ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

จงหา $|A_{11}|$, $|A_{12}|$, $|A_{13}|$, $|A_{21}|$, $|A_{22}|$, $|A_{23}|$, $|A_{31}|$, $|A_{32}|$, $|A_{33}|$

วิธีทำ

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(-4) - (0)(2) = -4-0 = -4$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (0)(-4) - (4)(2) = 0 - 8 = 8$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (4)(1) = 0 - 4 = -4$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (3)(-4) - (0)(5) = -12 - 0 = -12$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (1)(-4) - (4)(5) = -4-20 = -24$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (4)(3) = 0 - 12 = -12$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (1)(5) = 6 - 5 = 1$$

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (0)(5) = 2 - 0 = 2$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) \quad (0)(3) = 1 \quad 0 = 1$$

5.5.3 ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ขนาด 3×3

นิยาม 5.5.2 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด 3 × 3 โดย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว}$$

det (A) หรือ | A | หรือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ข้อสังเกต

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ก็คือ $|A_{11}|$ (ไมเนอร์ของ a_{11})

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ ก็คือ $|A_{12}|$

และ $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ก็คือ $|A_{13}|$

ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| \text{ นั่นเอง}$$

อนึ่ง เราอาจจดจำเครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ เหล่านี้ได้โดยง่าย คือ

1) เลขบอกแถวและค่อลัมน์ของ a_{11} คือ 1 กับ 1 รวมกันได้ 1 + 1 = 2 ซึ่งเป็นเลขคู่ จะเห็นว่าเครื่องหมายหน้าเทอม $a_{11}\,|A_{11}|$ เป็นบวก