2) เลขบอกแถวและคอลัมน์ของ a_{12} คือ 1 กับ 2 รวมกันได้ $1 + 2 = 3$ ซึ่งเป็นเลขคี่ จะเห็นว่าเครื่องหมายหน้าเทอม $a_{12}|A_{12}|$ เป็นลบ

3) เลขบอกแถวและคอลัมน์ของ a_{13} คือ 1 กับ 3 รวมกันได้ $1 + 3 = 4$ ซึ่งเป็นเลขคู่ จะเห็นว่าเครื่องหมายหน้าเทอม $a_{13}|A_{13}|$ เป็นบวก

ดังนั้นเราจึงเขียน det (A) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}|A_{13}|$$

ตัวอย่างที่ 5.5.3 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ แล้วจงหา det (A)

วิธีทำ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4-0) - 3(0-4) + 5(0-2)$$

$$= -4 + 12 - 10 = -2$$

หรืออาจทำโดยหาไมเนอร์ที่ต้องการก่อนคือ

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(-4) - (0)(2) = -4-0 = -4$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (2)(2) = 0 - 4 = -4$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (1)(2) = 0 - 2 = -2$$

จาก $\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} |A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13} |A_{13}|$

แทนค่า (เมื่อ $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 5$)

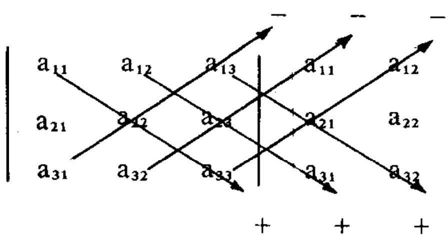
$$\therefore \det(A) = (1)(1)(-4) + (-1)(3)(-4) + (1)(5)(-2)$$

$$= -4 + 12 - 10 = -2$$

หมายเหตุ

เฉพาะ เมตริกซ์ A ใด ๆ ที่มีขนาด 3×3 นี้จะมีวิธีคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยเฉพาะอีกวิธีหนึ่ง คือ

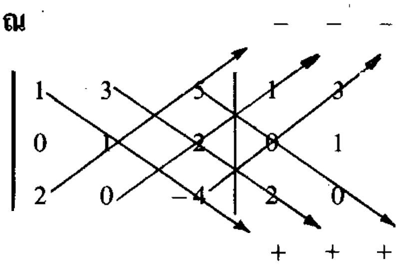
"ให้เขียนคอลัมน์ที่หนึ่งกับคอลัมน์ที่สองเพิ่มเข้าทางด้านขวาของดีเทอร์มิแนนท์ A ที่ต้องการแล้วคูณอีลีเมนต์เหล่านั้นเข้าด้วยกัน ตามด้านทะแยงตามแนวลูกศรที่กำหนด โดยถ้าลูกศรลงล่างเครื่องหมายเป็นบวก ลูกศรขึ้นบนมีเครื่องหมายเป็นลบ" ดังนี้



ตัวอย่างที่ 5.5.4

จงหา $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

วิธีคิดคำนวณ



$= (1)(1)(-4) + (3)(2)(2) + (5)(0)(0) - (2)(1)(5) - (0)(2)(1)$

$\quad - (-4)(0)(3)$

$= -4 + 12 + 0 - 10 - 0 - 0$

$= -2$

5.5.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยใช้โคแฟกเตอร์

การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 นั้น เราอาจทำได้ง่าย ๆ โดยใช้วิธีคูณทแยง อย่างไรก็ตาม การใช้วิธีคูณทแยงนี้ก็ไม่สามารถจะนำไปใช้กับเมตริกซ์ที่มีขนาดใหญ่กว่า 3×3 ได้ เราจึงจะมาศึกษาถึงวิธีการหาดีเทอร์มิแนนท์ที่ง่ายขึ้นและเป็นระบบที่แน่นอน ซึ่งวิธีนี้เราจะเรียกว่า "การกระจายโดยโคแฟกเตอร์" (cofactor expansion)

นิยาม 5.5.3 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $|Aij|$ เป็นไมเนอร์ของ a_{ij} แล้วจะเรียก $A_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ ว่า โคแฟเตอร์ของ a_{ij}

ตัวอย่าง 5.5.5

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$,

วิธีทำ

$\because \ |A_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10-6 = 4$

$\therefore A_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4$

$$\because |A_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34$$

$$\therefore A_{,,} = (-1)^{1+2}(-34) = 34$$

$$\because |A_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 35 = -31$$

$$\therefore A_{,,} = (-1)^{1+3}(-31) = -31$$

$$\because |A_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$$

$$\therefore A_{,,} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$\because |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8$$

$$\therefore A_{22} = (-1)^{2+2}(-8) - 8$$

$$\because |A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 7 = 10$$

$$\therefore A_{23} = (-1)^{2+3}(10) = -10$$

$$\because |A_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16$$

$$\therefore A_{31} = (-1)^{3+1}(-16) = -16$$

$$\because |A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10$$

$$\therefore A_{32} = (-1)^{3+2}(10) \quad -10$$

$$\because |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

$$\therefore A_{33} = (-1)^{3+3}(19) = 19$$

ทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(เมื่อกระจายตามแถวที่ i ของ A)

หรือ

$$\det A = a,\ A_{1j} + a_{2j}\ A,\ + \ . \ . \ . \ + \ a,\ A,$$

(เมื่อกระจายตามคอลัมน์ j ของ A)

ตัวอย่าง 5.5.6

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา det A. โดยกระจายตามแถวที่ 1, แถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2

วิธีทำ

จากตัวอย่าง 5.5.5 ได้ว่า

A,, = 4 A,, = 34 A,, = -31

A,, = 4 A_{22} = -8 A,, = -10

A,, = -16 A,, = -10 A,, = 19

1) โดยการกระจายตามแถวที่ 1 จะได้ว่า

det A. = $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

= $3(4) + (-1)(34) + 2(-31)$

= -84

2) โดยการกระจายตามแถวที่ 3 จะได้ว่า

det A. = $a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$

= $7(-16) + (1)(-10) + 2(19)$

= -84

3) โดยการกระจายตามคอลัมน์ที่ 1 จะได้ว่า

det A. = $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$ + a,, A_{31}

= $3(4) + 4(4) + 7(-16)$

= -84

4) โดยการกระจายตามคอลัมน์ที่ 2 จะได้ว่า

det. A. = a_{12} A,, + a_{22} A,, + a,, A_{32}

$$= -1\,(34) + 5\,(-8) + 1\,(-10)$$
$$= -84$$

ข้อสังเกตุ จากตัวอย่าง 5.5.6 จะพบว่า ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์โดยการกระจายโคแฟกเตอร์นี้ เราอาจเลือกกระจายตามแถว หรือคอลัมน์ใดก็ได้ผลลัพธ์เท่ากัน

5.5.5 การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์โดยใช้ค่าดีเทอร์มิแนนท์

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์โดยอาศัยค่าดีเทอร์มิแนนท์นี้ จะสามารถบอกให้เราทราบได้ว่าเมตริกซ์นั้น ๆ มีอินเวอร์สหรือไม่ ทำให้ไม่เสียเวลาไปคำนวณหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่ไม่มีอินเวอร์สการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์วิธีนี้ต้องอาศัย เมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix)

นิยาม 5.5.4 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ เมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) A ก็คือเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} หรือ A_{ij} เป็นสมาชิกในตำแหน่ง (j, i) และจะใช้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ adj A หรือ A^{adj}

จากนิยามจึงได้ว่า

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{..} \end{bmatrix}$$

$$\text{แล้ว adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nm} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.5.7

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา adj A

วิธีทำ

จากตัวอย่าง 5.5.5 ได้ว่า

A,, = 4	A,, = 34	A,, = -31
A,, = 4	A,, = -8	A,, = -10
A,, = -16	A,, = −10	A,, = 19

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 34 & -8 & -10 \\ -31 & -10 & 19 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 5.5.2 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว

$A \text{ (adj } A) = (\text{adj } A)\ A = (\det A)\ I,$

หรือ $A^{-1} = (\frac{1}{\det A})\ (\text{adj } A)$ เมื่อ $\det A \neq 0$

ข้อสังเกตุ จาก ท.บ.5.5.2 กล่าวต่อได้ว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่ $\det A = 0$ แล้ว A ย่อมไม่มีอินเวอร์ส

จาก ท.บ.5.5.2 จึงอาจเขียนเป็นสูตรสำหรับการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ขนาด 2×2 และขนาด 3×3 ได้ดังนี้

1) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $|A| \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

2) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ และ $|A| \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ถ้า $|A| = 0$ แล้ว A จะไม่มีอินเวอร์ส (คือไม่มี A^{-1})

ตัวอย่างที่ 5.5.8

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ จาก $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ โดย $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 2$ และ $a_{22} = 4$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3)\ (4) - (2)\ (5)$$

$$= 12 - 10 = 2$$

จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

แทนค่าในสูตร $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.5.9

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา A^{-1} โดยใช้เมตริกซ์ผูกพัน

วิธีทำ

จากตัวอย่าง 5.5.6 ได้ว่า det **A** = **-84**

และจากตัวอย่าง 5.5.7 ได้ว่า

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & \\ 34 & -8 & -10 \\ -31 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

และจาก ท.บ. 5.5.2 ได้ว่า

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) (\text{adj } A)$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{-84}\right) \begin{bmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 34 & -8 & -10 \\ -31 & -10 & 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{17}{42} & \frac{2}{21} & \frac{5}{42} \\ \frac{31}{84} & \frac{5}{42} & -\frac{19}{84} \end{vmatrix}$$

5.5.6 การแก้สมการเชิงเส้นโดยค่าดีเทอร์มิแนนท์ (Cramer's rule)

ลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ ---------- (1)

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$ ---------- (2)

(1) $\times a_{22}$ จะได้ $a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22}$ ---------- (3)

(2) $\times a_{12}$ จะได้ $a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = b_2a_{12}$ ---------- (4)

(3) $-$ (4) จะได้ $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

$$\therefore \quad x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

(ถ้า $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21} \neq 0$)

ในทำนองเดียวกัน $$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

หากใช้สัญลักษณ์ของดีเทอร์มิแนนท์จะเขียนค่าของ x และ y ได้ดังนี้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

เราสามารถเขียนเศษส่วนนี้ได้ง่าย ๆ โดย

ตัวส่วน ซึ่งเหมือนกันทั้งของ x และ y นั้นก็คือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของ x และ y (คือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า) ซึ่งเขียนแทนด้วย D

ตัวเศษของ X ก็คือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ซึ่งเกิดจากการแทนคอลัมน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ x ด้วยค่าคงที่ (โดยที่คอลัมน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ y คงเดิม) เขียนแทนด้วย D_1 หรือ D_x

ตัวเศษของ Y ก็คือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ซึ่งเกิดจากการแทนคอลัมน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ y ด้วยค่าคงที่ (โดยที่คอลัมน์เป็นสัมประสิทธิ์ของ x คงเดิม) เขียนแทนด้วย D_2 หรือ D_y

ตัวเศษนั้นถ้ากล่าวง่าย ๆ ก็คือ ถ้าจะหาค่าของตัวไม่ทราบค่าตัวใด ให้ยกเอาสัมประสิทธิ์ของมันออกแล้วเอาค่าคงที่ทางขวามือมาใส่แทน

หมายเหตุ

ถ้าค่า D คือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าเป็น 0 แล้ว จะกล่าวได้ว่าระบบสมการนั้นอาจจะไม่มีคำตอบหรือถ้ามีคำตอบก็มีได้หลายค่า

2) ถ้ากำหนดให้

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

เราจะได้ว่า

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

นั่นคือ

ตัวส่วน ของ x, y, z ก็คือ ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าทั้งหลาย (คือสัมประสิทธิ์ของ x, y, z นั่นเอง)

ตัวเศษ ก็คล้ายกับส่วน เพียงแต่เปลี่ยนคอลัมน์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าที่จะหาให้เป็นคอลัมน์ของค่าคงที่ (เช่น จะหาค่า x ก็ให้เอาคอลัมน์ของสัมประสิทธิ์ของ x คือคอลัมน์ที่ 1 ออกแล้วเอาค่าคงที่มาใส่แทนจะได้เป็น

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{เป็นต้น)}$$

สมมุติว่าเราเขียน x, y, z เสียใหม่ได้เป็น

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}$$

โดย $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

อนึ่ง เราเรียกการแก้สมการโดยใช้ค่าดีเทอร์มิแนนท์นี้ว่า "Cramer's rule" เพื่อเป็นเกียรติแก่ Gabriel Cramer นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส (ค.ศ. ที่ 18)

ตัวอย่างที่ 5.5.10 จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้ Cramer's rule

$$2x - 4y = 1$$
$$-x - 3y = 2$$

วิธีทำ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(-3) - (2)(-4)}{(2)(-3) - (-1)(-4)} = \frac{-3+8}{-6-4} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{4-(-1)}{-6-4} = \frac{5}{-10} = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5.5.11 จงใช้ Cramer's rule หาค่า x และ z ซึ่งสอดคล้องกับสมการชุดต่อไปนี้

$$x + 3y + 5z = 1$$
$$y + 2z = 1$$
$$2x - 42 = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$+ 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4-O) -2(-4+4) + 5(0+2)$$

$$= -4 + 0 + 10 = 6$$

$$\therefore x = \frac{6}{-2} = -3$$

และ

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2-0) - 3(0-2) + 1(0-2)$$

$$= -2 + 6 - 2$$

$$= 2$$

$$\therefore z = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

ดังนั้น $x = -3$ และ $z = -1$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

1.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 1.2) 23 4

1 4

1.3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 1.4) - 3 2 I

1.5) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 1.6) -3 -4 -1 -2 I

1.7) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ 1.8) 231 001 0

1.9) 231 -- 2 1 1 -3 0 0 1.10) 311 221 21 I

2. จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$

3. จงแก้สมการชุดต่าง ๆ ต่อไปนี้ โดยใช้ Cramer's rule

3.1) $x + 2y = 3$

$3x + 4y = 10$

3.2) $x + 4y = 2$

$2y - 3x = 5$

3.3) $2x - y - 32 = I$

$3x - y = 2$

$x - 2y = 5$

4. จงใช้ Cramer's rule หาค่าของ y จากสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
2x + 2y + 3z &= -2 \\
3x + 2y + z &= 1 \\
x + y + z &= 0
\end{aligned}
$$

5. จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ต่อไปนี้โดยใช้ค่าดีเทอร์มิแนนท์

5.1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 5.2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

5.3) $c = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ 5.4) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

6. จงหาเมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของเมตริกซ์ข้างล่างนี้

6.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 6.2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 6.3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. จงหาดีเทอร์มิแนนท์,เมตริกซ์ผูกพัน และอินเวอร์ส (ถ้ามี) ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

7.1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 7.2) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 7.3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

7.4) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ 7.5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 7.6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. ให้

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

8.1) จงหา det A

8.2) จงหา adj A

8.3) จงแสดงว่า $(\mathrm{adj}A)A = (\det A)I_3$

8.4) จงหาอินเวอร์สของ A

5.6 คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

ในการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ๆ นั้น จะมีความยุ่งยากมาก คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะช่วยทำให้การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ง่ายขึ้น

คุณสมบัติข้อที่ 1 การทรานสโพสเมตริกซ์ไม่ทำให้ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์เปลี่ยนไป นั่นคือ det. $A' =$ det. A

ตัวอย่างที่ 5.6.1

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

แล้ว $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det A &= (1)(1)(3) + (2)(2)(3) + (3)(4)(4) \\ &\quad - (3)(1)(3) - (4)(2)(1) - (3)(2)(4) \\ &= 3 + 12 + 48 - 9 - 8 - 24 \\ &= 22 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \det A' &= (1)(1)(3) + (4)(4)(3) + (3)(2)(2) - (3)(1)(3) \\ &\quad - (2)(4)(1) - (3)(4)(2) \\ &= 3 + 48 + 12 - 9 - 8 - 24 \\ &= 22 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า det. A = det. A'

คุณสมบัติข้อที่ 2 การสลับที่ระหว่าง 2 แถว (คอลัมน์) ใด ๆ ของเมตริกซ์ จะทำให้ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์นั้นเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายตรงกันข้าม

นั่นคือ ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการสลับที่ระหว่าง 2 แถว (คอลัมน์) ใด ๆ ของเมตริกซ์ A แล้ว det. $B = -$ det. A

ตัวอย่างที่ 5.6.2

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 5.6.1 ได้ว่า det.A = 22

สลับที่ระหว่างแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ของ A จะได้

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

และ $\det. B = (3)(1)(3) + (4)(2)(1) + (3)(4)(2) - (1)(1)(3)$

$- (2)(2)(3) - (3)(4)(4)$

$= 9 + 8 + 24 - 3 - 12 - 48$

$= - 22$

ดังนั้น det. B = − det. A

หรือ det. A = − det. B

คุณสมบัติข้อที่ 3 ถ้าสมาชิก 2 แถวใด ๆ หรือ 2 คอลัมน์ใด ๆ ของเมตริกซ์เหมือนกันแล้ว ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์นั้นเป็นศูนย์ (0)

ตัวอย่างที่ 5.6.3

a x $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าเมตริกซ์ A มีสมาชิกในแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เหมือนกัน จึงได้ว่า det. A = 0

ซึ่งจากการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A ก็จะได้ว่า

$\det. A = (1)(5)(3) + (2)(6)(1) + (3)(2)(4) - (1)(5)(3)$

$(2)(6)(1) - (3)(2)(4)$

$= 15 + 12 + 24 \quad 15 \quad 12 - 24$

$= 0$

คุณสมบัติข้อที่ 4 ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งของเมตริกซ์เป็นศูนย์ (0) ทั้งแถวหรือทั้งคอลัมน์แล้ว ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์เป็นศูนย์ (0)

ตัวอย่างที่ 5.6.4

ให้ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมตริกซ์ A มีสมาชิกในแถวที่ 3 เป็น 0 ทั้งแถว ดังนั้น det. A = 0 ซึ่งจากการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของ A ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{det. } A &= (1)(5)(0) + (2)(6)(0) + (3)(0)(4) - (0)(5)(3) \\ &\quad - (0)(6)(1) - (0)(2)(4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

คุณสมบัติข้อที่ 5 ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการคูณแถวแถวหนึ่งหรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c แล้ว det.B = c det.A เมื่อ $c \neq 0$

ตัวอย่างที่ 5.6.5

ให้ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

เอา 3 คูณแถวที่สองของ A ตลอดจะได้เป็น

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

โดย $$\begin{aligned} \text{det. } A &= (1)(1)(3) + (2)(2)(3) + (3)(4)(4) - (3)(1)(3) \\ &\quad - (4)(2)(1) - (3)(4)(2) \\ &= 22 \end{aligned}$$

และ $\det. B = (1)(3)(3) + (2)(6)(3) + (3)(4)(12) - (3)(3)(3)$

$$- (4)(6)(1) - (3)(2)(12)$$

$$= 9 + 36 + 144 \quad 27 - 24 - 72$$

$$= 66$$

จะเห็นว่า $\det. B = 3 \det. A$

ตัวอย่างที่ 5.6.6

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\det. A = 22$

จงหา $\det. B$ ถ้า $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \\ -15 & -20 & -15 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

จาก $B = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \\ -15 & -20 & -15 \end{vmatrix}$

$$\det. B = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \\ -15 & -20 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -15 & -20 & -15 \end{vmatrix}$$ (เอาตัวร่วม 3 ออกจากแถวที่ 1)

$$= (3)(-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$ (เอาตัวร่วม - 5 ออกจากแถวที่ 3)

$$= (3)(-5)(22)$$

$$= -330$$

คุณสมบัติข้อที่ 6 ค่าดีเทอร์มิแนนท์จะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าเอา e เท่าของแถว (คอลัมน์) ที่ r ไปบวกกับแถว (คอลัมน์) ที่ s ของเมตริกซ์นั้น ๆ

ตัวอย่างที่ 5.6.7

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ โดย det. A = 22

ถ้าลบแถวที่สองของ A ด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง จะได้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & 10 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

และ det. B $= (1)(-7)(3) + (2)(-10)(3) + (3)(4)(0) - 73)(-7)$

$(3) - (4)(-10)(1) - (3)(2)(0)$

$= -21 - 60 + 0 + 63 + 40 - 0$

$= 22$

$=$ det. A

ถ้าบวกแถวที่สามของ B ด้วย 2 เท่าของแถวที่สองจะได้

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \\ 3 & -10 & -17 \end{bmatrix}$$

และ det.C $= (1)(-7)(-17) + (2)(-10)(3) + (3)(-10)(0)$

$- (3)(-7)(3) - (-10)(-10)(1) - (-17)(2)(0)$

$= 119 - 60 + 0 + 63 - 100 - 0$

$= 22$

$=$ det. B $=$ det. A

คุณสมบัติข้อที่ 7 ถ้าแถวสองแถวหรือคอลัมน์สองคอลัมน์ใด ๆ ของเมตริกซ์เป็นสัดส่วนกันแล้ว ค่าดีเทอร์มิแนนท์เป็นศูนย์ (0)

ตัวอย่างที่ 5.6.8

ให้ $$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -9 & 12 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า แถวที่สามเท่ากับ 3 เท่าของแถวที่สอง

ดังนั้น det. A = 0

จากการคำนวณจะพบว่า

$$\begin{aligned} \text{det. } A &= (2)(1)(12) + (-3)(1)(6) + (4)(-9)(4) \\ &\quad - (6)(1)(4) - (-9)(1)(2) - (12)(-3)(4) \\ &= 24 - 18 - 144 - 24 + 18 + 144 \\ &= 0 \end{aligned}$$

คุณสมบัติข้อที่ 8 ถ้าเขียนสมาชิกแต่ละตัวของแถว (คอลัมน์) ใดแถว(คอลัมน์) หนึ่งของดีเทอร์มิแนนท์อยู่ในรูปผลบวกของเทอมสองเทอมหรือมากกว่าแล้วจะได้ค่าดีเทอร์มิแนนท์อยู่ในรูปผลบวกของดีเทอร์มิแนนท์สองดีเทอร์มิแนนท์หรือมากกว่า

ตัวอย่างที่ 5.6.9

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & -6+3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ & 4 \end{vmatrix}$$

$$20 - (-6) = 8 - (-12) + 12 \quad 6$$

$$26 = 26$$

ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 3×3

นิยาม 5.6.1 ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ โดย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & \cdots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

แล้วดีเทอร์มิแนนท์ของ A คือ

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} |A_{,,}| + (-1)^{1+2} a_{12} |A_{,,}| + (-1)^{1+3} a_{13} \; A_{,,}| + \ldots . +$$
$$(-1)^{1+n} a_{1n} |A_{1n}|$$

เช่น A เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×4 คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

ซึ่งถ้าจะหา $|A|$ โดยตรงก็คงต้องคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ขนาด 3×3 ถึง 4 เมตริกซ์จะสังเกตเห็นว่า ถ้าหากว่าบรรดาค่าอีลีเมนต์ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} เป็นศูนย์ (0) เสียบ้างก็คงจะทำให้การคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของ A ได้ง่ายขึ้น ซึ่งเราจะสามารถกระทำให้ a_{11}, a_{12}, a_{13} หรือ a_{14} เป็นศูนย์ไปบ้างได้โดยใช้คุณสมบัติบางอย่างของค่าดีเทอร์มิแนนท์ที่ได้กล่าวไว้แล้วในตอนต้นมาช่วยดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5.6.10

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 15 & 20 & 25 & 30 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{จงหา } A$$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 15 & 20 & 25 & 30 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 2 & 0 \\ 20 & 25 & 30 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 25 & 30 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(4) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 30 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(4)(2)(5)$$

$$= 240$$

ตัวอย่างที่ 5.6.11 จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 & -6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 & -6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

เอา 2 ซึ่งเป็นตัวคูณร่วมของแถวที่ (1) ออกจะได้

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 3 เท่าของแถวที่ (1) จะได้

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -13 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

บวกแถวที่ (4) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) จะได้

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -13 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

แล้ว ทรานสโพส (transpose) จะได้

$$2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & -13 & 1 & 9 \\ -3 & 14 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

กระจายดีเทอร์มิแนนท์จะได้

$$2\left((1)\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -13 & 1 & 9 \\ 14 & -1 & -4 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + (0)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 5 & -13 & 9 \\ -3 & 14 & -4 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 5 & -13 & 1 \\ -3 & 14 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (2)\ (1)\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -13 & 1 & 9 \\ 14 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-5\ (-4+9) - 2(52 - 126) + 4\ (13 - 14)\ )$$

$$= 2(-25 + 148 - 4)$$

$$= 138$$

แบบฝึกหัด 5.6

1. โดยการใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์จงแสดงว่า

1.1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

1.2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.4) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 12 & 15 \\ 16 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

1.5) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1.6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.7) $$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ a-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

2. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

2.1) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

2.2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

2.3) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

2.4) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

2.5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
