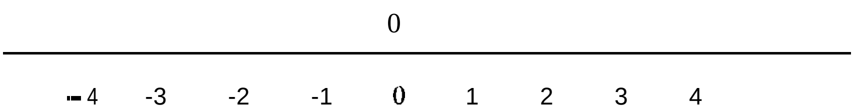
บทที่ 4
ระบบโคออร์ดิเนต
(Coordinate Systems)

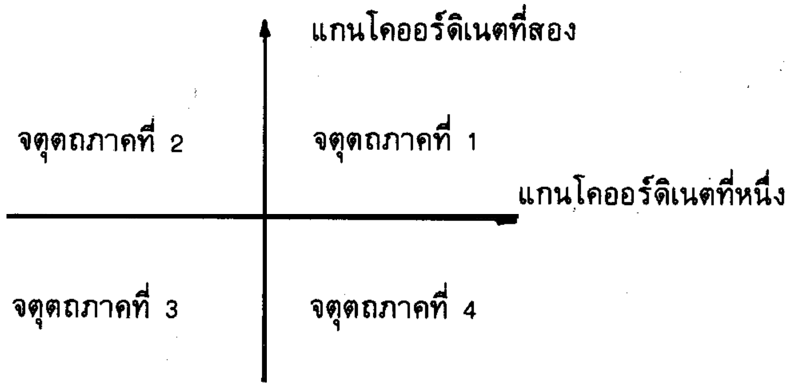
4.1 ระบบโคออร์ดิเนตตั้งฉาก (The Rectangular Coordinate System)

บนเส้นจำนวน เราเขียนแทนสมาชิกของจำนวนจริงด้วยจุดในเส้นตรง คือ เขียนแสดงการจับคู่ระหว่างจำนวนจริงกับจุดบนเส้นตรง ซึ่งทำโดยเลือกจุดจุดหนึ่ง เรียกว่า จุด O บนเส้นตรง ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกหน่วยความยาวเป็นเท่าไรก็ได้ แล้วเลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางขวาของ O ให้แทนจำนวน 1, 2, 3, ... โดยมีความยาวห่างจาก O ไปทางขวาเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย, ... ตามลำดับ และเลือกจุดบนเส้นตรงทางซ้ายของ O ให้แทน −1, −2, −3, ... โดยมีระยะห่างจาก O ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย ... ตามลำดับ ดังรูป 4.1.1



รูป 4.1.1

ถ้าเขียนเส้นจำนวนสองเส้นให้ตั้งฉากกันที่จุด O โดยให้เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน ดังนั้น อีกเส้นหนึ่งก็จะอยู่ในแนวตั้ง เราจะได้สิ่งที่ทางคณิตศาสตร์เรียกว่า แกนโคออร์ดิเนตอย่างตั้งฉาก (rectangular coordinate axis) เรียกเส้นจำนวนที่อยู่ในแนวนอนว่า แกนโคออร์ดิเนตที่หนึ่ง (first coordinate axis) และเรียกเส้นจำนวนที่อยู่ในแนวตั้งว่า แกนโคออร์ดิเนตที่สอง (second coordinate axis) เรียกจุดที่เส้นจำนวนทั้งสองตัดกันว่า จุดกำเนิด (origin) การที่แกนตั้งกับแกนนอนตัดกันนี้จะแบ่งพื้นราบออกเป็น 4 จตุตถภาค (quadrants) ดังรูป 4.1.2

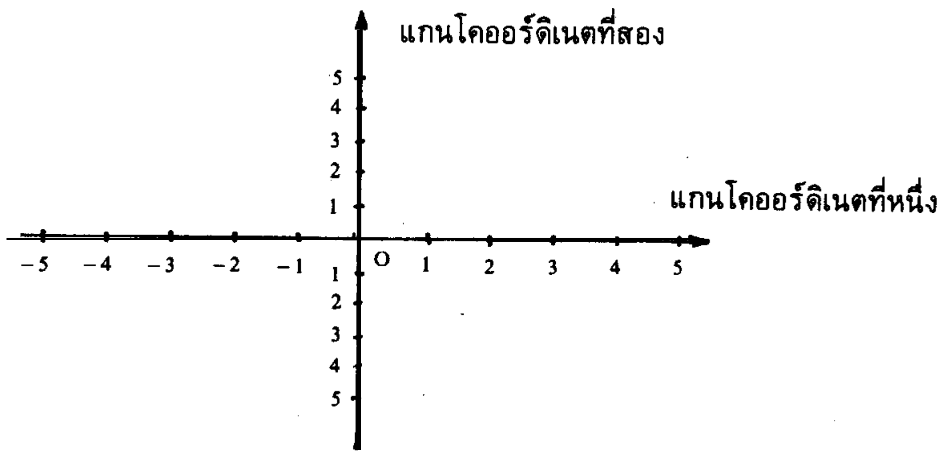


รูป 4.1.2

เกณฑ์การคิดเครื่องหมายบนแกนโคออร์ดิเนต

1. ในการวัดบนแกนโคออร์ดิเนตที่หนึ่ง (แกนนอน) ระยะที่วัดถ้าอยู่ทางขวามือของ O จะเป็นบวก ถ้าอยู่ทางซ้ายมือของ O จะเป็นลบ

2. ในการวัดบนแกนโคออร์ดิเนตที่สอง (แกนตั้ง) ระยะที่วัดถ้าอยู่ทางข้างบนของ O จะเป็นบวก ถ้าอยู่ทางข้างล่างของ O จะเป็นลบ ดังรูป 4.1.3



รูป 4.1.3

โดยอาศัยแกนโคออร์ดิเนตทั้งสองนี้ จะสามารถแทนคู่อันดับของจำนวนจริงด้วยจุดต่าง ๆ บนระนาบ ได้ดังนี้

1. ลากเส้นตั้งฉากกับแกนโคออร์ดิเนตที่หนึ่ง ตรงจุดซึ่งแทนอีลีเมนต์ที่หนึ่งของคู่อันดับที่กำหนดให้

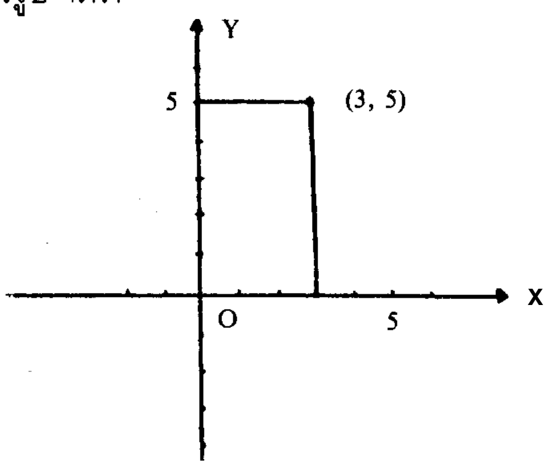
2. ลากเส้นตั้งฉากกับแกนโคออร์ดิเนตที่สอง ตรงจุดซึ่งแทนอีลีเมนต์ที่สองของคู่อันดับที่กำหนดให้

3. ใช้จุดซึ่งเส้นตั้งฉากในข้อ 1) และ 2) ตัดกันเป็นคู่อันดับที่กำหนดให้

หมายเหตุ โดยทั่ว ๆ ไป นิยมเขียนคู่อันดับด้วย (x, y) ดังนั้น เราจึงนิยมเรียกแกนโคออร์ดิเนตที่หนึ่งว่า แกนของ x หรือแกน X และเรียกแกนโคออร์ดิเนตที่สองว่าแกนของ y หรือแกน Y

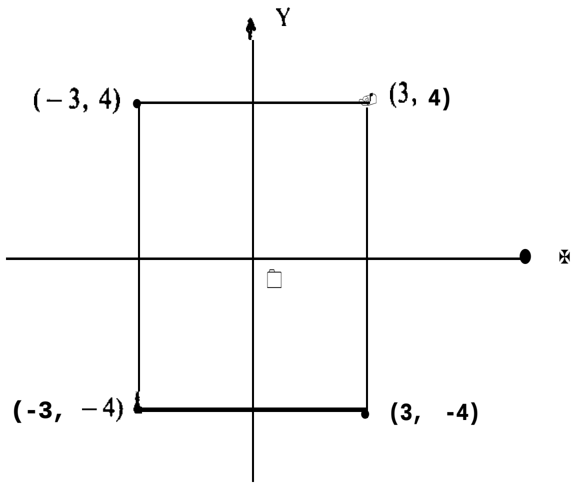
ดังนั้น คู่อันดับ (x, y) จะจับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน Y เท่ากับ x หน่วย และห่างจากแกน X เท่ากับ y หน่วย หรือมีค่าไปตามแกน X เป็น x หน่วย และมีค่าไปตามแกน Y เป็น y หน่วย

เช่น คู่อันดับ (3, 5) จะจับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวา 3 หน่วย และอยู่เหนือแกน X ขึ้นไปข้างบน 5 หน่วย หรือมีค่าไปตามแกน X 3 หน่วย และมีค่าไปตามแกน Y 5 หน่วย ดังรูป 4.1.4



รูป 4.1.4

จะได้ว่า รูปข้างบนเป็นการเขียนแทน (3, 5) ด้วยจุดในระนาบ หรือตัวอย่างจุดอื่น ๆ เช่นจุด (3, 4), (3, −4), (−3, 4), (−3, −4) ดังรูป 4.1.5



รูป **4.1.5**

โดยอาศัยวิธีการดังกล่าวนี้ จะได้ว่า $R \times R$ หรือ $R^{(2)}$ มีความหมายทางเรขาคณิตเป็นระนาบ ซึ่งคือ เซ็ตของจุดที่เรียงรายอยู่บนผิวราบ นั่นเอง

เราพบว่าเราอาจเขียนแสดงอีลีเมนต์ของ $R^{(3)}$ ด้วยจุดในสเปซ (หรือในอวกาศ) ได้ โดยใช้เส้นจำนวนสามเส้นมาตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งให้ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน ณ ที่จุดตัดนี้โดยเรียกจุดตัดว่าจุดกำเนิด (จุด O) และเรียกเส้นจำนวนทั้งสามว่าแกนโคออร์ดิเนต โดยการวางให้อยู่ในรูปนี้คือ

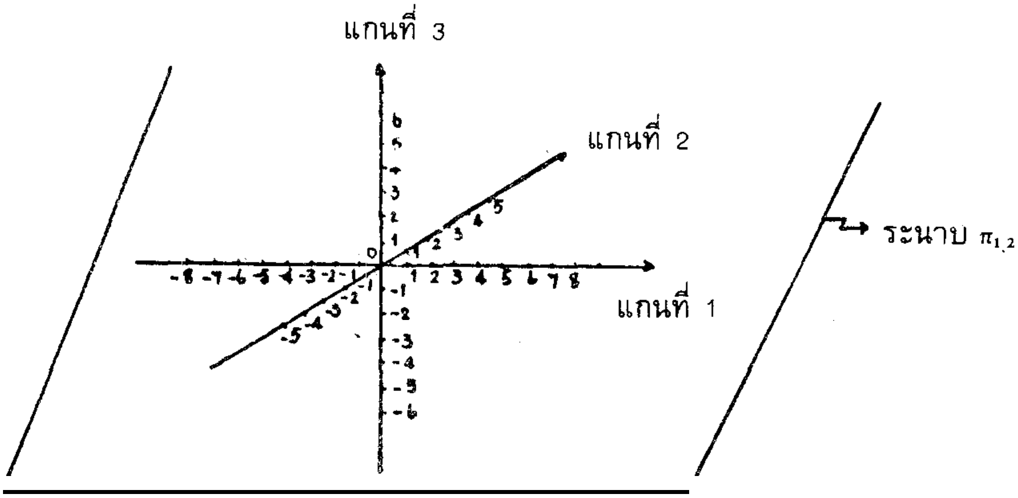
แกนที่ 1 ให้ชี้ไปทางทิศตะวันออก-ตะวันตก
แกนที่ 2 ให้ชี้ไปทางทิศเหนือ-ใต้
แกนที่ 3 ให้ชี้ไปทางข้างบน-ล่าง
และถือเป็นสากลนิยมว่า

ในแกนที่ 1 จุดที่อยู่ทางทิศตะวันออกของจุด O แทนจำนวนบวก
จุดที่อยู่ทางทิศตะวันตกของจุด O แทนจำนวนลบ

ในแกนที่ 2 จุดที่อยู่ทางทิศเหนือของจุด O แทนจำนวนบวก
จุดที่อยู่ทางทิศใต้ของจุด O แทนจำนวนลบ

ในแกนที่ 3 จุดที่อยู่เหนือจุด O (ข้างบน) เป็นจำนวนบวก
จุดที่อยู่ล่างจุด O (ข้างล่าง) เป็นจำนวนลบ

เราจะเรียกการวางแกนโคออร์ดิเนตแบบนี้ว่าเป็น**แบบที่หนึ่ง** เขียนแสดงได้ดังรูป 4.1.6



รูป 4.1.6

จะพบว่าเส้นจำนวนสองแกนใด ๆ ย่อมอยู่ในระนาบเดียวกัน คือ เส้นจำนวนแกนที่ 1 กับเส้นจำนวนแกนที่ 2 อยู่ในระนาบ $\pi_{1,2}$

เส้นจำนวนแกนที่ 1 กับแกนที่ 3 อยู่ในระนาบ $\pi_{1,3}$

เส้นจำนวนแกนที่ 2 กับแกนที่ 3 อยู่ในระนาบ $\pi_{2,3}$

หมายเหตุ การวางแกนโคออร์ดิเนตนี้มีการวางอีกแบบหนึ่ง คือ โดยการวางให้

แกนที่ 1 อยู่ในแนวทิศเหนือ - ใต้

แกนที่ 2 อยู่ในแนวทิศตะวันตก - ตะวันออก

แกนที่ 3 อยู่ในแนวขึ้นบน - ลงล่าง

และถือว่า

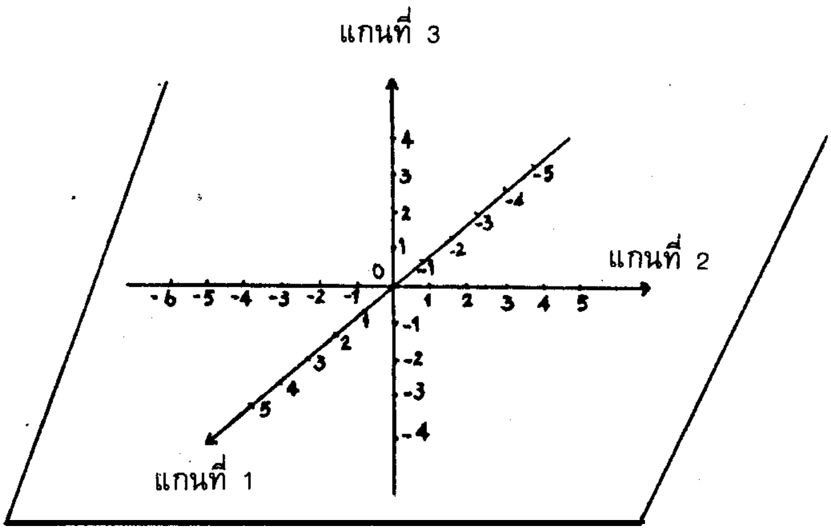
ในแกนที่ 1 จุดที่อยู่ทางทิศใต้ของจุด O แทนจำนวนบวก
จุดที่อยู่ทางทิศเหนือของจุด O แทนจำนวนลบ

ในแกนที่ 2 จุดที่อยู่ทางทิศตะวันออกของจุด O แทนจำนวนบวก
จุดที่อยู่ทางทิศตะวันตกของจุด O แทนจำนวนลบ

ในแกนที่ 3 จุดที่อยู่เหนือจุด O (ข้างบน) แทนจำนวนบวก
จุดที่อยู่ใต้จุด O (ข้างล่าง) แทนจำนวนลบ

เราจะเรียกการวางแกนโคออร์ดิเนตแบบนี้ว่าเป็น**แบบที่สอง** โดยปกติถ้าไม่ระบุเฉพาะเจาะจงให้ใช้แบบใดแล้ว จะใช้แบบใดก็ได้

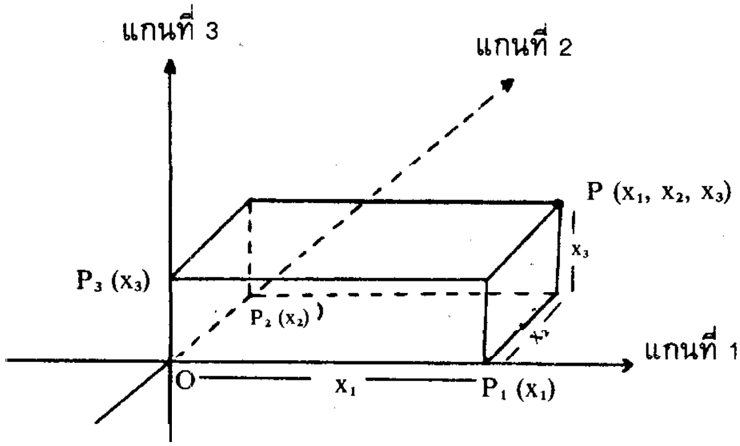
การวางแกนโคออร์ดิเนต ตามแบบที่ 2 นี้อาจเขียนแสดงได้ ดังรูป 4.1.7



รูป 4.1.7

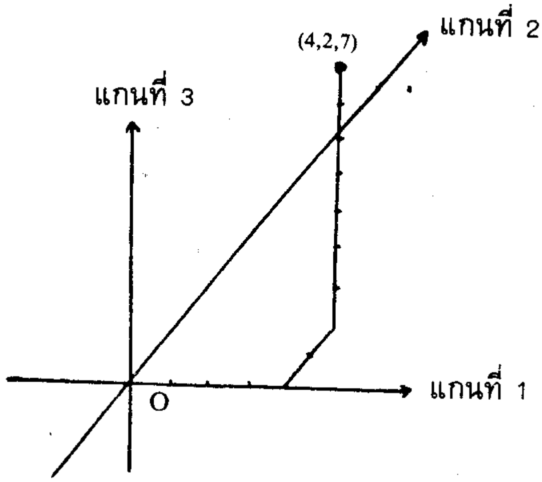
ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในสเปซ เราสามารถสร้างระนาบผ่าน P โดยให้ขนานกับระนาบ $\pi_{1,2}$ ขนานกับระนาบ $\pi_{1,3}$ และขนานกับระนาบ $\pi_{2,3}$ โดยระนาบเหล่านั้นตัดเส้นจำนวนแกนที่ 3 ที่จุด P_3 ตัดเส้นจำนวนแกนที่ 2 ที่จุด P_2 และตัดเส้นจำนวนแกนที่ 1 ที่จุด P_1 ตามลำดับ

สมมุติว่า จุด P_1 เป็นจุดซึ่งแทนจำนวน x_1 บนแกนที่ 1 จุด P_2 เป็นจุดซึ่งแทนจำนวน x_2 บนแกนที่ 2, และจุด P_3 เป็นจุดซึ่งแทนจำนวน x_3 บนแกนที่ 3 ตามลำดับ ถ้าให้ P เป็นจุดซึ่งแทน ordered 3 - tuple (x_1, x_2, x_3) ที่จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด O ไปตามแกนที่ 1 x_1 หน่วย, ไปตามแกนที่ 2 x_2 หน่วย, และไปตามแกนที่ 3 x_3 หน่วย ดังรูป 4.1.8



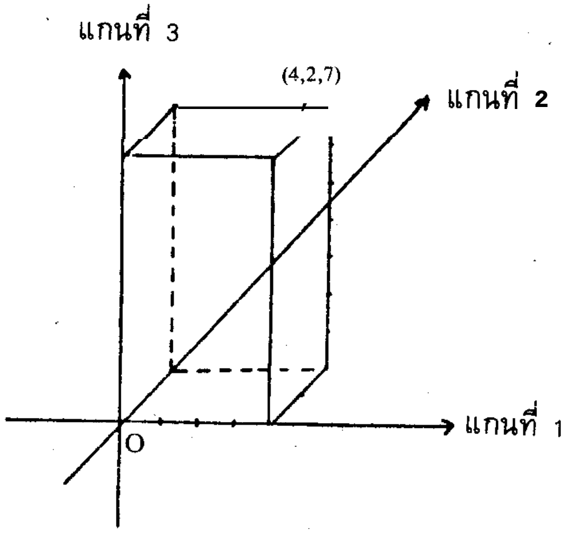
รูป 4.1.8

เช่น จุด (4, 2, 7) เราสามารถเขียนได้โดยเริ่มนับจากจุด 0 ไปตามแกนที่ 1 ทางขวา 4 หน่วย แล้วนับต่อไป โดยให้ขนานกับแกนที่ 2 ไปทางขวา 2 หน่วย จากนั้นก็นับต่อให้ขนานกับแกนที่ 3 ขึ้นไปข้างบน 7 หน่วย ณ จุดปลายก็คือ จุด (4, 2, 7) นั่นเอง ดังรูป 4.1.9



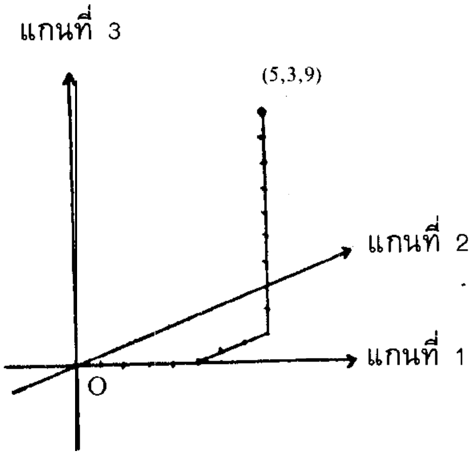
รูป 4.1.9

ซึ่งถ้าเขียนระนาบประกอบรูปจะได้ดังรูป 4.1.10

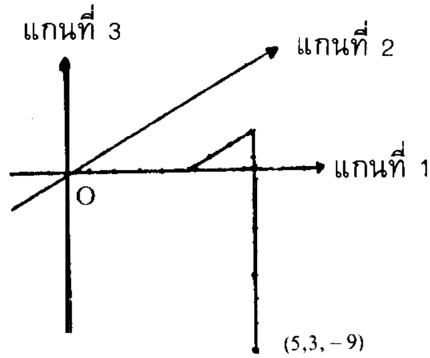


รูป 4.1.10

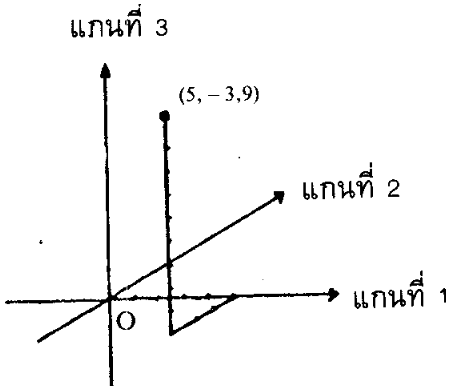
หรือตัวอย่างการเขียนแสดงจุดอื่น ๆ ดังรูปต่อไปนี้



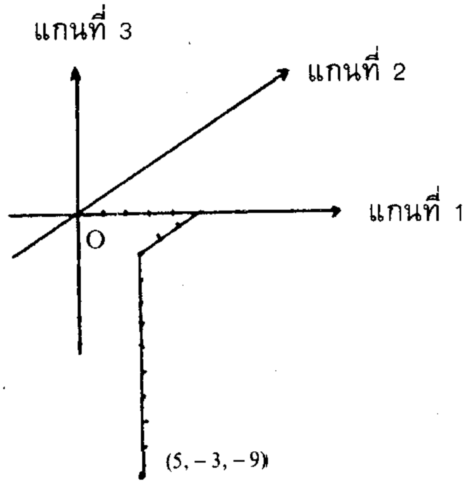
รูป (1)



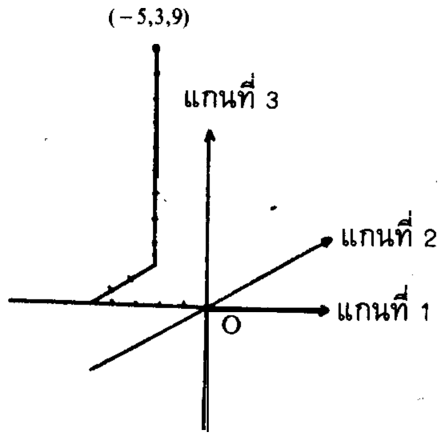
รูป (2)



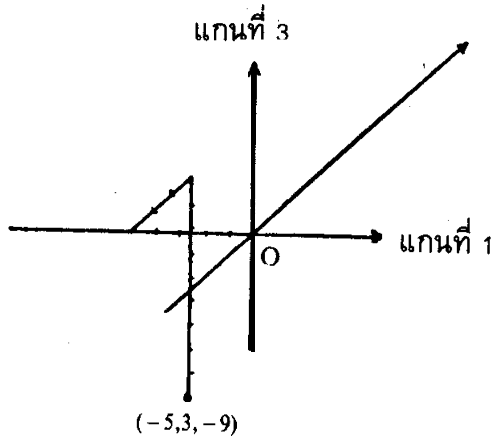
รูป (3)



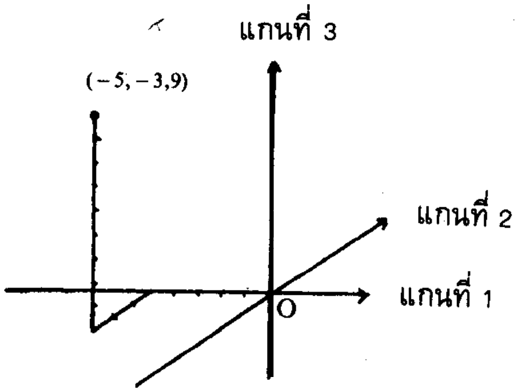
รูป (4)



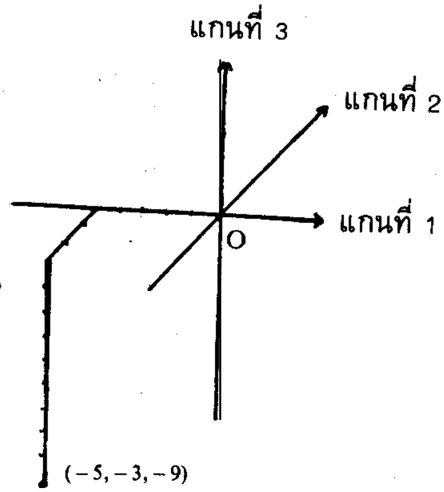
รูป (5)



รูป (6)



รูป (7)



รูป (8)

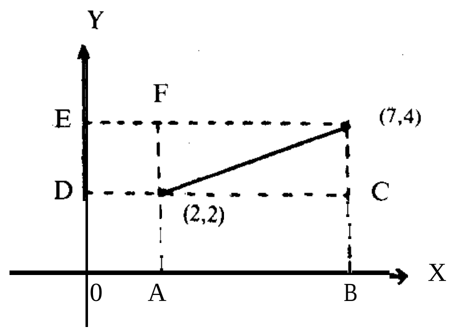
แบบฝึกหัดที่ 4.1

1. จงเขียนแสดงคู่ลำดับต่อไปนี้ด้วยจุดใน $R^{(2)}$

   1.1) (3, 0), (−3, 0), (0, 3), (0, −3)

   1.2) (3, 6), (-4, 2), (-3, −5), (4, -2)

2. จงหาคู่ลำดับที่แทนจุด A, B, C, D, E, F (หรือหาโคออร์ดิเนตของจุด A, B, C, D, E, F) จากรูป 4.2.9



รูป 4.2.9

3. จงเขียนแสดง ordered 3 - tuple ต่อไปนี้ด้วยจุดใน $R^{(3)}$ โดยวางแกนโคออร์ดิเนต **ตามแบบที่ 1**

   3.1) (3, 0, 0), (-3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, -3, 0), (0, 0, 3), (0, 0, -3)

   3.2) (2, 4, 0), (-2, 4, 0), (-3, 0, 5), (3, 0, −5), (0, 5, 6), (0, -5, -6)

   3.3) (4, 2, 8), (4, 2, −8), (4, -2, 8), (4, -2, −8), (-4, 2, 8), (-4, 2, −8), (-4, -2, 8), (-4, -2, -8)

4. จงเขียนแสดง ordered 3 - tuple ต่าง ๆ ในข้อ 3 ด้วยจุดใน $R^{(3)}$ โดยการวางแกนโคออร์ดิเนต **ตามแบบที่ 2**

4.2 ความยาวของส่วนของเส้นตรงหรือระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

4.2.1 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดบนเส้นจำนวน

ถ้า P_1 กับ P_2 เป็นจุดสองจุดใด ๆ บนเส้นจำนวนซึ่ง $OP_1 = x_1, OP_2 = x_2$ โดยที่ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว ความยาวของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 หรือขนาด (ความยาว) ของ P_1P_2 หรือระยะทางระหว่าง P_1 กับ P_2 เขียนแทนด้วย $|P_1P_2|$ มีค่าเท่ากับ $|x_2 - x_1|$ (ค่าสัมบูรณ์ของ $x_2 - x_1$)

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จากรูปต่อไปนี้ จงหาระยะทางระหว่าง P_1 กับ P_2

1) $0 \quad P_1 \quad P_2$ 2) $P_2 \quad P_1 \quad 0$ 3) $P_1 \quad 0 \quad P_2$

$0 \quad 1 \quad 3$ $-5 \quad -2 \quad 0$ $-3 \quad 0 \quad 2$

วิธีทำ

1) $OP_1 = 1, OP_2 = 3 \therefore |P_1P_2| = |3 - 1| = |2| = 2$

2) $OP_1 = -2, OP_2 = -5 \therefore |P_1P_2| = |-5 - (-2)| = |-5 + 2| = |-3|$

$= 3$

3) $OP_1 = -3, OP_2 = 2 \therefore |P_1P_2| = |2 - (-3)| = |2 + 3| = 5$

4.2.2 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด บนระนาบ

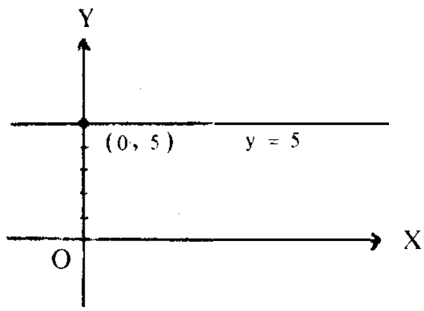
แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1) จาก OP เป็นส่วนของเส้นตรงที่โยงจากจุดกำเนิดไปยังจุด P ซึ่งอาจเขียนแทนด้วยจุด P ถ้า $P = (x_1, x_2)$ จะใช้สัญลักษณ์ $|P|$ เขียนแทนขนาด (magnitude) ของ OP หรือระยะทางระหว่างจุดกำเนิดกับจุด P โดย $|P| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ดังรูป 4.2.1

กรณีที่ 2) ถ้า $P = (x_1, x_2)$ และ $Q = (x_1', x_2')$ แล้ว ความยาวของ PQ คือ $|PQ|$ และใช้สัญลักษณ์ $d(P, Q)$ แทนระยะทางระหว่าง P กับ Q

นั่นคือ $d(P, Q) = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$ ดังรูป 4.2.2

ตัวอย่างที่ 4.4.2 สมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X ที่ผ่านจุด (0, 5) ก็คือ $y = 5$ หรือ $y - 5 = 0$ ดังรูป 4.4.2



รูป 4.4.2

4.4.2 สมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y

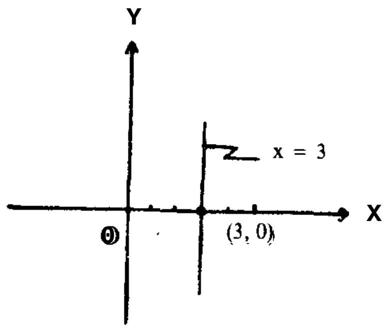
เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y ย่อมตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด (a, 0) (คือผ่านจุด (a, 0)) โดย

1) ถ้า a เป็นจำนวนบวกเส้นตรงจะอยู่ทางขวาของแกน Y
2) ถ้า a เป็นจำนวนลบเส้นตรงจะอยู่ทางซ้ายของแกน Y
3) ถ้า a เป็นศูนย์เส้นตรงเส้นนั้นคือแกน Y นั่นเอง

สมการของเส้นตรงชนิดนี้ คือ $x = a$

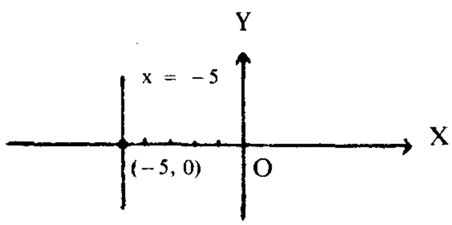
ดังนั้น เส้นแกน Y จะมี สมการว่า $x = 0$

ตัวอย่างที่ 4.4.3 สมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y ที่ผ่านจุด (3, 0) ก็คือ $x = 3$ หรือ $x - 3 = 0$ ดังรูป 4.4.3



รูป 4.4.3

ตัวอย่างที่ 4.4.4 สมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y ที่ผ่านจุด $(-5, 0)$ ก็คือ $x = -5$ หรือ $x + 5 = 0$ ดังรูป 4.4.4



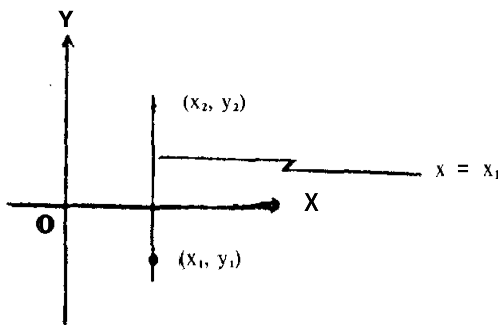
รูป 4.4.4

4.4.3 สมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดสองจุด คือ จุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) จะมีสมการเป็น

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ถ้า } x_1 \neq x_2$$

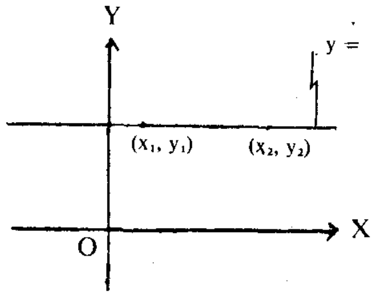
หมายเหตุ

1) ถ้า $x_1 = x_2$ แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) ก็คือ สมการ $x = x_1$ ซึ่งจะได้ว่าเป็นสมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y นั่นเอง ซึ่งมีรูปเป็นดังรูป 4.4.5



รูป 4.4.5

2) ถ้า $y_1 = y_2$ แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) ก็คือ สมการ $y = y_1$ จะได้ว่าเป็นสมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X นั่นเอง ซึ่งมีรูปเป็นดังรูป 4.4.6



รูป 4.4.6

ตัวอย่างที่ 4.4.5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 5) กับ (−3, 1)

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (2, 5)$ และ $(x_2, y_2) = (-3, 1)$ จะได้ว่า $x_1 \neq x_2$ และ $y_1 \neq y_2$

จะได้ว่าสมการของเส้นตรงที่ต้องการก็คือ

$$\frac{Y-5}{X-2} = \frac{1-5}{-3-2} \quad \left(\text{จากสูตร } \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{Y-5}{X-2} = \frac{-4}{-5}$$

$$-5y + 25 = -4x + 8$$

$$-5y = -4x + 8 - 25$$

$$= -4x - 17$$

หรือ $4x - 5y + 17 = 0$

ตัวอย่างที่ 4.4.6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 2) กับ (3, 5)

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (3, 2)$ และ (x_2, y_2) คือ $(3, 5)$

จะเห็นว่า $x_1 = x_2 = 3$ ดังนั้นสมการที่ต้องการคือ $x = 3$

ตัวอย่างที่ 4.4.7 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, 2) กับ (−1, 2)

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (4, 2)$ และ $(x_2, y_2) = (-1, 2)$

จะเห็นว่า $y_1 = y_2 = 2$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ต้องการก็คือ $y = 2$

หรืออาจทำได้โดย ใช้สูตร $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ก็ได้

คือ $\frac{x - 2}{x - 4} = \frac{2 - 2}{-1 - 4}$

$\frac{Y - 2}{x - 4} = 0$

$y - 2 = 0$ หรือ $y = 2$ นั่นเอง

4.4.4 สมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดหนึ่งจุดคือจุด (x_1, y_1) และมีความชัน (slope) **เท่ากับ** m (ความหมายของความชันจะกล่าวภายหลัง)

คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ตัวอย่างที่ 4.4.8 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, −4) และมีความชันเท่ากับ 2

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (3, -4)$ และ $m = 2$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงที่ต้องการคือ $y-(-4) = 2(x-3)$

$$y+4 = 2x-6$$

$$y = 2x-10$$

ตัวอย่างที่ 4.4.9 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ และผ่านจุด $(-2, 5)$

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (-2, 5)$, $m = -\frac{1}{3}$

ดังนั้นสมการคือ $y - 5 = -\frac{1}{3}(x-(-2))$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$3y - 15 = -x - 2$$

หรือ $3y + x - 13 = 0$

ตัวอย่างที่ 4.7.10 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 0)$ และมีความชัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (-2, 0)$, $m = \frac{1}{2}$

ดังนั้นสมการคือ $y - 0 = \frac{1}{2}(x-(-2))$

$$Y = \frac{1}{2}(x+2)$$

$$2y = x+2$$

$$2y - x - 2 = 0$$

4.4.5 **สมการเส้นตรงที่มี** X-intercept **ที่** (a, 0) **และ** Y-intercept **ที่** (0, b)

คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

(โดย $a \neq 0$ และ $b \neq 0$)

หมายเหตุ ระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน X เรียกว่า "X - intercept" และเรียกจุด (a, 0) ว่าเป็นจุดตัดแกน X

และระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y เรียกว่า "Y - intercept" และเรียกจุด (0, b) ว่าเป็นจุดตัดแกน Y

ตัวอย่างที่ 4.4.11 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งตัดแกน X ที่จุด $(-2, 0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0, 4)$

วิธีทำ

ให้ $(a, 0) = (-2, 0)$ และ $(0, b) = (0, 4)$

ดังนั้นสมการคือ $-\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

หรือ $-2x + y = 4$

ข้อสังเกต

จะเห็นว่าสมการเส้นตรงของเส้นตรงแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาทุกแบบนั้นสามารถหาได้จากสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$ ทั้งสิ้น ดังนั้นถ้าเราเข้าใจดีแล้วก็ไม่จำเป็นจะต้องไปจำแบบต่าง ๆ ของสมการเลย (m คือความชันและ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ซึ่งจะกล่าวต่อไป)

4.4.6 ความชัน (slope) ของเส้นตรง

อาจนิยามความชันของเส้นตรงได้ดังนี้

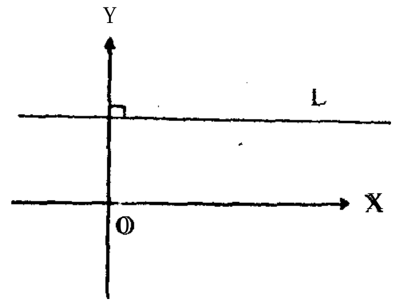
วิธีที่ 1 ถ้าให้ θ เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ไปยังเส้นตรง L ใด ๆ จะเรียกมุม θ ว่าเป็น "มุมเอียง (inclination) ของเส้นตรง L" และค่าความชันของเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ ก็คือ $\tan\theta$

ถ้าให้ m แทนความชันจะได้

$$m = \tan\theta$$

ซึ่งอาจจะพิจารณาค่าความชันในกรณีต่าง ๆ กันได้ คือ

1) ความชันของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้มุมเอียงเป็น 0 องศา ดังรูป 4.4.7



รูป 4.4.7

ดังนั้น $m = \tan 0$

นั่นคือความชันเป็น 0

2) ความชันของเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y จะมีมุมเอียงเป็น 90° ดังรูป 4.4.8

Y

L

X

0

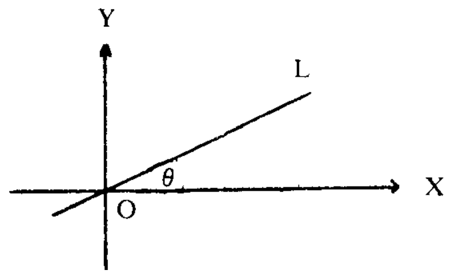
- t - l - - - -

รูป 4.4.8

ดังนั้น $m = \tan 90°$

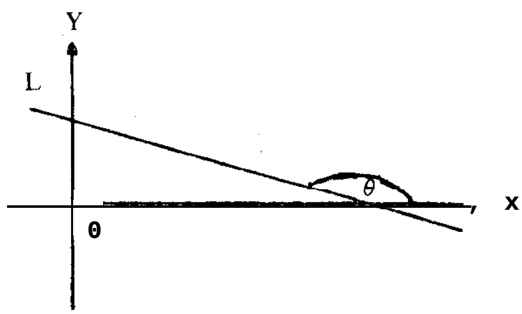
และจะกล่าวว่าเส้นตรงนี้ "ไม่มีความชัน" ($\because \tan 90° = \infty$ ซึ่งไม่มีค่าเป็นจำนวนจริง)

3) ความชันของเส้นตรงที่ทำมุมกับแกน X เป็นมุมแหลม ($\theta < 90°$) เส้นตรงนี้จะมีค่าความชันเป็นบวก ($\because \tan\theta$ เป็นบวกเมื่อ $\theta < 90°$) ดังรูป 4.4.9



รูป 4.4.9

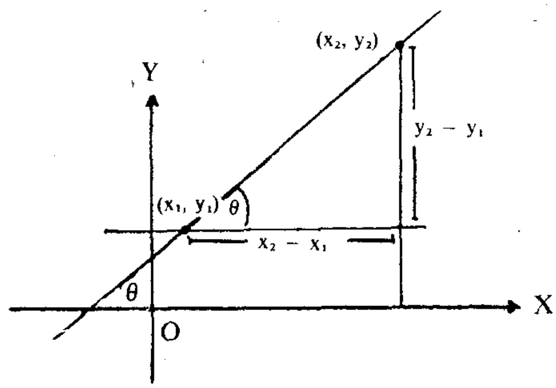
4) ความชันของเส้นตรงที่ทำมุมกับแกน X เป็นมุมป้าน ($90° < \theta < 180°$) เส้นตรงนี้จะมีค่าความชันเป็นลบเสมอ ($\because \tan\theta°$ เป็นลบเมื่อ $90° < \theta < 180°$) ดังรูป 4.4.10



รูป 4.4.10

วิธีที่ 2 ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ก็คือ

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ ดังรูป 4.4.11



รูป 4.4.11

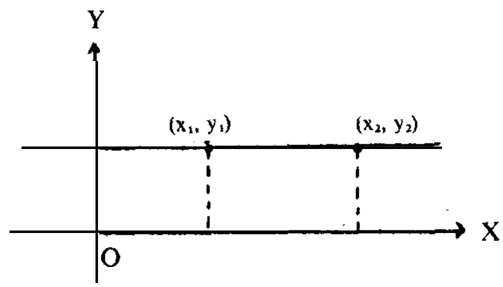
นั่นคือ $m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ซึ่งก็อาจกล่าวได้ในทำนองเดียวกันกับวิธีที่ 1 คือ

1) ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน X (คือ $y_1 = y_2$ ซึ่งทำให้ $y_2 - y_1 = 0$)

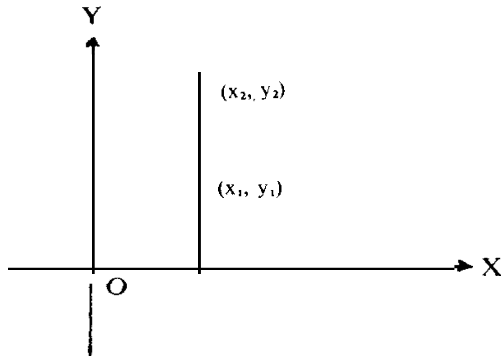
   ความชันของเส้นตรงนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ คือ $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$

   ดังรูป 4.4.12



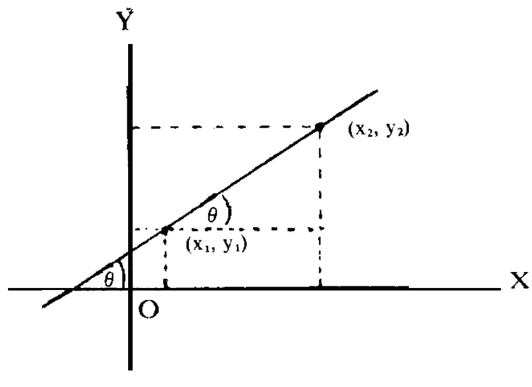
รูป 4.4.12

2) ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน Y (คือ $x_1 = x_2$ ซึ่งทำให้ $x_2 - x_1 = 0$) เราไม่อาจหาค่าความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ได้ $\because m = \frac{y_2 - y_1}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ (เพราะว่าการหารด้วยศูนย์ไม่มีความหมาย) เรากล่าวว่าเส้นตรงนี้ "ไม่มีความชัน" หรือ "ความชันหาค่าไม่ได้" ดังรูป 4.4.13



รูป 4.4.13

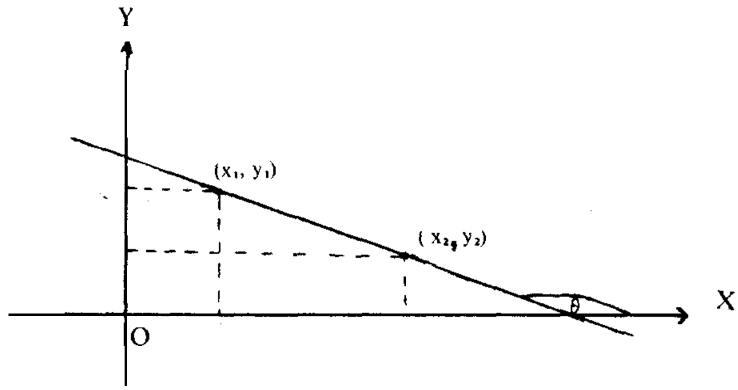
3) ถ้าเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X ในกรณีอย่างนี้จะเห็นว่า $x_2 > x_1$ และ $y_2 > y_1$ ดังรูป 4.4.14



รูป 4.4.14

จะได้ว่า $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$ มีค่าเป็นบวกเสมอ (เพราะว่า $y_2 - y_1 > 0$ และ $x_2 - x_1 > 0$)

4) ถ้าเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X ในกรณีอย่างนี้จะเห็นว่า $x_2 > x_1$ แต่ $y_2 < y_1$ ดังรูป 4.4.15



รูป 4.4.15

จะได้ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ มีค่าเป็นลบเสมอ (เพราะว่า $y_2 - y_1 < 0$ และ $x_2 - x_1 > 0$)

กล่าวโดยสรุปจะได้ว่า "ถ้า θ เป็นมุมแหลม ($\theta < 90°$) ความชันของเส้นตรง**เป็นบวก** ถ้า θ เป็นมุมป้าน ($\theta > 90°$) ความชันของเส้นตรง**เป็นลบ** ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน X ($\theta = 0°$) ความ**ชันเป็นศูนย์**, ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X ($\theta = 90°$) หาค่าความชันของเส้นตรงไม่ได้ ซึ่งเรียกว่า "**ไม่มีความชัน**" นั่นเอง

ข้อสังเกต

1) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ เสมอ

2) ความชันของเส้นตรงเดียวกันย่อมเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 4.4.12 จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (2, 5) กับ (−3, 1) และพิจารณาว่าเส้นตรงนี้ทำมุมกับแกน X เป็นมุมป้านหรือมุมแหลม

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (2, 5)$, และ $(x_2, y_2) = (-3, 1)$

ดังนั้น $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1 - 5}{-3 - 2} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore$ ความชันคือ $\dfrac{4}{5}$

เนื่องจากค่าความชันเป็นบวก จึงกล่าวได้ว่าเส้นตรงนี้ทำมุมแหลมกับแกน X

ตัวอย่างที่ 4.4.13 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, 2) กับ (1, 5) และพิจารณาว่าเส้นตรงนี้ทำมุมกับแกน X เป็นมุมแหลมหรือมุมป้าน

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (4, 2)$, $(x_2, y_2) = (1, 5)$

ดังนั้น $m = \dfrac{5 - 2}{1 - 4} = \dfrac{3}{-3} = -1$

ความชันคือ -1

เนื่องจากค่าความชันเป็นลบจึงกล่าวได้ว่าเส้นตรงนี้ทำมุมกับแกน X เป็นมุมป้าน

ตัวอย่างที่ 4.4.14 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4) กับ (5, 4)

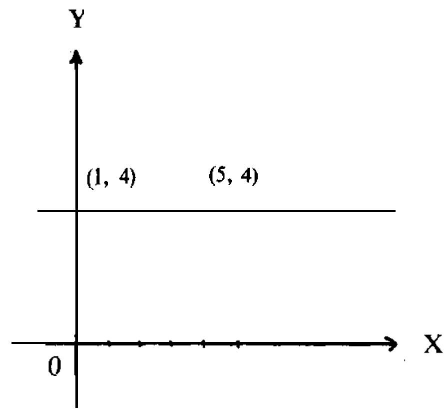
วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (1, 4)$ และ $(x_2, y_2) = (5, 4)$

เนื่องจาก $y_1 = y_2$ จึงทราบว่าเส้นตรงซึ่งผ่านจุดทั้งสองนี้จะขนานกับแกน Y

ดังนั้นความชันของเส้นตรงนี้คือศูนย์

หรือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 \quad x_1} = \dfrac{4-4}{5-1} = \dfrac{0}{4} = 0$ นั่นเอง ซึ่งมีรูปเป็นดังรูป 4.4.16



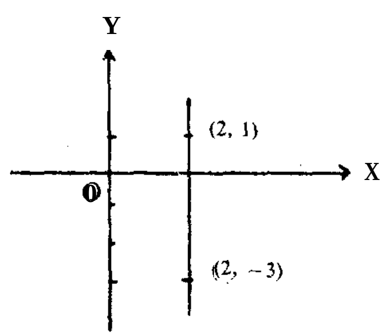
รูป 4.4.16

ตัวอย่างที่ 4.4.15 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1) กับ (2, −3)

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (2, 1)$ และ $(x_2, y_2) = (2, -3)$

เนื่องจาก $x_1 = x_2$ จึงทราบว่าเส้นตรงที่ผ่านจุดทั้งสองนี้จะขนานกับแกน Y หรือตั้งฉากกับแกน X นั่นเอง ดังนั้นเส้นตรงเส้นนี้ไม่มีความชัน ดังรูป 4.4.17



รูป 4.4.17

4.4.7 การหาความชันของเส้นตรงใด ๆ ที่กำหนดสมการมาให้

สามารถหาได้โดยพยายามจัดรูปสมการของเส้นตรงที่โจทย์กำหนดมาให้นั้นให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ โดย m และ c เป็นจำนวนจริง

แล้วจะได้ว่า เส้นตรงนั้นมีความชัน $= m$ (คือสัมประสิทธิ์ของ x)

ตัวอย่างที่ 4.4.16 จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2y - x - 2 = 0$

วิธีทำ

จาก $2y - x - 2 = 0$

$$2y = x + 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 4.4.17 จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $3y + 2x - 1 = 0$

วิธีทำ

จาก $3y + 2x - 1 = 0$

$$3y = -2x + 1$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $-\frac{2}{3}$

4.4.8 การหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และตัดแกน Y ของเส้นตรงที่กำหนดสมการมาให้

1) การหาจุดตัดแกน X (X - intercept)

   หาได้โดยแทนค่า $y = 0$ ลงในสมการที่กำหนดมาให้แล้วหาว่า x มีค่าเป็นเท่าไร? สมมุติให้ $x = a$

   ก็จะกล่าวได้ว่า จุดตัดแกน X คือ $(a, 0)$

2) การหาจุดตัดแกน Y (Y - intercept)

หาได้โดยแทนค่า $x = 0$ ลงในสมการที่กำหนดมาให้ แล้วหาค่า y ว่ามีค่าเท่าไร? สมมุติได้ $y = b$

ก็จะกล่าวได้ว่า จุดตัดแกน Y คือ $(0, b)$

หมายเหตุ ถ้าจะหาโดยพยายามจัดสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ ให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ก็ได้ แล้วก็จะได้ว่าเส้นตรงนั้นมีจุดตัดแกน X ที่ $(a, 0)$ และจุดตัดแกน Y ที่ $(0, b)$ ซึ่งวิธีนี้จะยุ่งยากกว่า จึงไม่ค่อยนิยมใช้

ตัวอย่างที่ 4.4.18 จงหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $2x + 3y = 6$

วิธีทำ

จากสมการ $2x + 3y = 6$ ....(1)

1) หาจุดตัดแกน x

แทน $y = 0$ ลงในสมการ (1)

$$2x + 3(0) = 6$$

$$\therefore \quad x = 3$$

นั่นคือจุดตัดแกน X ของเส้นตรงนี้ คือ $(3, 0)$

2) หาจุดตัดแกน Y

แทน $x = 0$ ลงในสมการ (1)

$$\therefore \quad 2(0) + 3y = 6$$

$$\therefore \quad y = 2$$

ดังนั้นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรงนี้ คือ $(0, 2)$

4.4.9 การเขียนกราฟของเส้นตรงที่กำหนดสมการมาให้

วิธีที่สะดวกที่จะเขียนกราฟของเส้นตรงนี้ทำได้โดยหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และแกน Y (ซึ่งจุดทั้งสองนี้หาได้โดยแทนค่า y และ x ด้วยศูนย์ ตามลำดับดังที่กล่าวมาแล้ว)

เมื่อได้จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ทั้งสองจุดมาแล้วก็ลากเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสองนั้น ก็จะได้เส้นตรงตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 4.4.19 จงเขียนกราฟของเส้นตรง $2x - 3y = 6$

วิธีทำ

หาจุดตัดแกน X ให้ $y = 0$

$$\begin{aligned} \therefore 2x - 3(0) &= 6 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

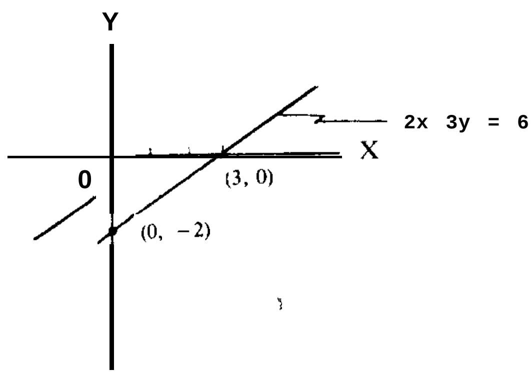
จุดตัดแกน X ของเส้นตรงนี้ คือ $(3, 0)$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x = 0$

$$\begin{aligned} \therefore 2(0) - 3y &= 6 \\ \therefore y &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรงนี้ คือ $(0, -2)$

ดังนั้น กราฟของเส้นตรงที่ต้องการมีกราฟดังรูป 4.4.18



รูป 4.4.18

4.4.10 สมการกำลังหนึ่งแบบทั่ว ๆ ไป

สมการเส้นตรงใด ๆ ซึ่งเป็นสมการที่ x และ y มีกำลังเป็นหนึ่งนั้น โดยทั่ว ๆ ไปมีแบบเป็น

$$Ax + By + C = 0$$

เราจะมาพิจารณาดูว่า สมการ $Ax + By + C = 0$ นี้จะเป็นสมการเส้นตรงเสมอไปหรือไม่ โดยพิจารณาแยกเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $B = 0$ และ $A \neq 0$

จะได้สมการ $Ax + 0(y) + C = 0$

$$\therefore x = -\frac{C}{A}$$

เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y หรือตั้งฉากกับแกน X ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ไม่อาจหาความชันได้ (หรือที่เรียกว่าไม่มีความชัน)

กรณีที่ 2 ถ้า $B \neq 0$ แต่ $A = 0$

จะได้สมการ $0(x) + By + C = 0$

$$\therefore y = -\frac{C}{B}$$

เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน X โดยมีความชันเป็น 0

กรณีที่ 3 ถ้า $B \neq 0$ และ $A \neq 0$

จะได้สมการ $Ax + By + C = 0$

$$\therefore y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการในรูป $y = mx + C$ จะได้ว่าเส้นตรงนี้มีความชัน $m = -\frac{A}{B}$ และตัดแกน Y ที่ $(0, -\frac{C}{B})$

กรณีที่ 4 ถ้า $A = 0$, และ $B = 0$

จะได้สมการ $0(x) + 0(y) + C = 0$

$$\therefore C = 0$$

สมการในกรณีนี้ คือ $0x + 0y + 0 = 0$

จะเห็นว่า ถ้าแทนจุด (x, y) ใด ๆ ก็ตามลงในสมการ

$0x + 0y + 0 = 0$ จะเป็นจริงเสมอ

ดังนั้นเซ็ตของจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการ $0x + 0y + 0 = 0$ ก็คือเซ็ตของจุดในระนาบนั่นเอง

กล่าวโดยสรุป จะได้ว่า สมการกำลังหนึ่งซึ่งมีรูปเป็น $Ax + By + C = 0$ จะเป็นสมการของเส้นตรงเสมอ ยกเว้นเมื่อ $A = B = 0$ เท่านั้น

ข้อสังเกต

ในการเขียนสมการเส้นตรงนั้นเราจะเขียนในรูป

$Ax + By + C = 0$ ....(1)

หรือ $Ax + By = -C$ ....(2)

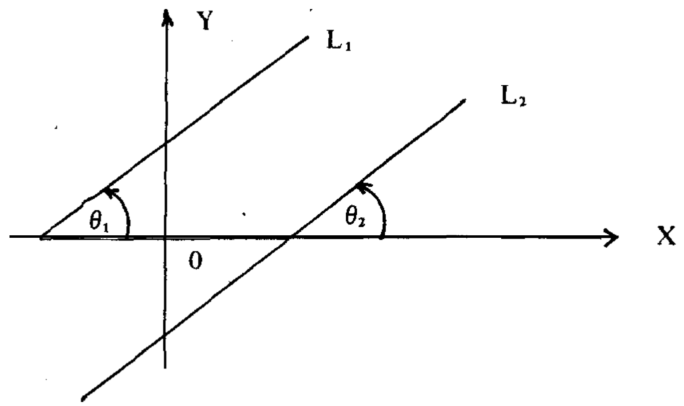
หรือ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ....(3)

ก็ได้ แต่มักนิยมเขียนให้อยู่ในแบบที่ (1) มากกว่า

4.4.11 สมบัติของเส้นตรงที่ควรทราบ

1. เส้นตรงที่ขนานกัน ความชันย่อมเท่ากัน

ให้ m_1, m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_1, L_2 ตามลำดับ พิจารณาเส้นตรง L_1, L_2 ซึ่ง L_1 ขนานกับ L_2 ดังรูป 4.4.19



รูป 4.4.19

เพราะว่า L_1 ขนานกับ L_2

$$\therefore \quad \theta_1 = \theta_2$$

จึงได้ว่า $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$

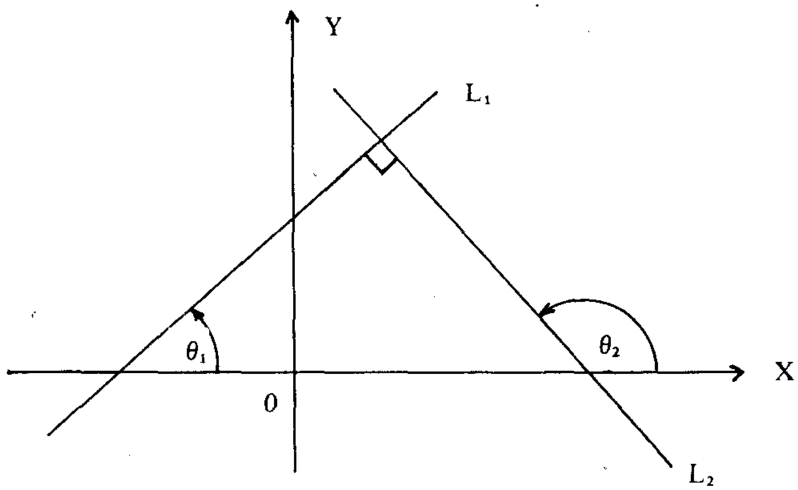
เพราะฉะนั้น $m_1 = m_2$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรงที่ขนานกันย่อมเท่ากัน

2. เส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกัน ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

ให้ m_1, m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_1, L_2 ตามลำดับ

พิจารณาเส้นตรง L_1, L_2 ซึ่ง L_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2 และ L_1, L_2 ทำมุมกับแกน X เป็นมุม θ_1, θ_2 ตามลำดับ ดังรูป 4.4.20



รูป 4.4.20

จากรูป 4.4.20 จะได้ว่า

$$\theta_2 = 90 + \theta_1$$

$$\tan \theta_2 = \tan (90 + \theta_1)$$

$$= -\cot \theta_1$$

$$= -\frac{1}{\tan \theta_1}$$

$$\therefore m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ดังนั้น $m_1 m_2 = -1$

นั่นคือ ความชันของเส้นที่ตั้งได้ฉากกัน คูณกันย่อมได้เท่ากับ -1

ตัวอย่าง 4.4.20 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(1, 2), B(2, 0) ขนานกับเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด C(1, 5), D(−1, 9)

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$\therefore m_1 = \frac{0 - 2}{2 - 1}$$

$$= -2$$

และให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง CD

$$m_2 = \frac{9 - 5}{-1 - 1}$$

$$= \frac{4}{-2}$$

$$= -2$$

จะได้ว่า $m_1 = m_2$

ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

ตัวอย่าง 4.4.21 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่าน $C(1, 5)$, $D(-1, 9)$ ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $E(3, 8)$, $F(1, 7)$

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง CD

$$m_1 = \frac{9-5}{-1-1}$$

$$= -2$$

และให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง EF

$$m_2 = \frac{7-8}{1-3}$$

$$= \frac{-1}{-2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $m_1m_2 = (-2)(i)$

1

เพราะฉะนั้น เส้นตรง CD ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง EF

ตัวอย่าง 4.4.22 ถ้าเส้นตรง L_1 มีความชัน $\frac{3}{8}$ และเส้นตรง L_2 ตั้งได้ฉากกับ L_1 จงหาความชันของเส้นตรง L_2

วิธีทำ

ให้ m_1, m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_1, L_2 ตามลำดับ

$$\because \quad m_1 = \frac{3}{8}$$

$$\because \quad m_1 \perp m_2$$

$$\therefore \quad \frac{3}{8} m_2 = -1$$

$$\therefore m_2 = -\frac{8}{3}$$

ดังนั้นจึงได้ว่าความชันของเส้นตรง L_2 คือ $-\frac{8}{3}$

ตัวอย่าง 4.4.23 จงแสดงว่า A(5, − 1), B(3, 0), C(− 1, 2) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน AB

$$m_1 = \frac{0-(-1)}{3-5}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน BC

$$\therefore m_2 = \frac{2-0}{-1-3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $m_1 = m_2$

แสดงว่า AB กับ BC ขนานกัน แต่เส้นตรงทั้งสองมีจุด B เป็นจุดร่วม ดังนั้น AB, BC จึงเป็นเส้นตรงเดียวกัน

แบบฝึกหัดที่ 4.4

1. จงหาสมการเส้นตรง ของเส้นตรงที่มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

   1.1) ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(0, \frac{1}{2})$

   1.2) ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(0, -6)$

   1.3) ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

   1.4) ขนานกับแกน Y และตัดแกน X ที่จุด $(3, 0)$

   1.5) ขนานกับแกน Y และตัดแกน X ที่จุด $(-\frac{3}{4}, 0)$

   1.6) ขนานกับแกน Y และตัดแกน X ที่จุด $(0, 0)$

   1.7) ขนานกับแกน Y และอยู่ห่างจากแกน X เป็นระยะทาง 3 หน่วย

   1.8) ขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากแกน Y เป็นระยะทาง -4 หน่วย

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้

   2.1) $(1, 1)$ กับ $(3, 3)$

   2.2) $(4, 3)$ กับ $(1, 4)$

   2.3) $(-4, 1)$ กับ $(-1, 4)$

   2.4) $(-1, -2)$ กับ $(2, 1)$

   2.5) $(-3, -2)$ กับ $(-4, -1)$

   2.6) $(4, 2)$ กับ $(4, -2)$

   2.7) $(-5, 3)$ กับ $(-5, -4)$

   2.8) $(1, 5)$ กับ $(10, 5)$

   2.9) $(-1, -2)$ กับ $(3, -2)$

   2.10) $(0, 0)$ กับ $(3, 2)$

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งและมีความชันที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

   3.1) ผ่านจุด $(4, 3)$ ความชัน -2

   3.2) ผ่านจุด $(2, -4)$ ความชัน $\frac{3}{4}$

   3.3) ผ่านจุด $(-1, -3)$ ความชัน $-\frac{1}{2}$

   3.4) ผ่านจุด $(4, 0)$ ความชัน 1

   3.5) ผ่านจุด $(1, -3)$ ความชัน 0

   3.6) ผ่านจุด $(0, -3)$ ความชัน 0

   3.7) ผ่านจุด $(-5, 0)$ ความชัน 0

   3.8) ผ่านจุด $(0, 0)$ ความชัน 0

   3.9) มี X - intercept เป็น $(3, 0)$, ความชัน 2

   3.10) มี Y - intercept เป็น $(0, 5)$, ความชัน 3

4. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ดังต่อไปนี้

4.1) จุดตัดแกน x (3, 0), จุดตัดแกน y (0, 4)

4.2) จุดตัดแกน x (3, 0), จุดตัดแกน Y (0, −4)

4.3) จุดตัดแกน x (−3, 0), จุดตัดแกน y (0, 4)

4.4) จุดตัดแกน x (− 3, 0), จุดตัดแกน y (0, − 4)

5. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้

5.1) (2, 1) กับ (3, 2)

5.2) (4, 1) กับ (-2, -1)

5.3) (0, 0) กับ (2, -2)

5.4) (3, 1) กับ (3, -4)

5.5) (4, −3) กับ (−3, −3)

5.6) (a + b, b) กับ (a − b, a)

5.7) (a − b, a + b) กับ (a + b, a − b)

6. จงหาความชัน, จุดที่เส้นตรงตัดแกน X และแกน Y, ลักษณะที่เส้นตรงทำมุมกับแกน X พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นตรงซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

6.1) $3x - 5y = 15$	6.5) $2(x - 5) = -3y + 2$
6.2) $3x + 4y - 12 = 0$	6.6) $x - y = 0$
6.3) $6x - 2y + 3 = 0$	6.7) $x + y = 3$
6.4) $x + 2y = 0$	6.8) $y = 4$
	6.9) $x = -2$

7. จงหาค่า k ซึ่งทำให้ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (k, 3) กับ (1, −5) เป็น 4

8. ถ้าเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $2kx + 3y + k - 3 = 0$ ผ่านจุด (1, −3) จงหาค่า k

9. ถ้าเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $5x - ky + 8 = 0$ มี slope เป็น $\frac{2}{3}$ จงหาค่า k

10. ถ้าเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $kx - y = 3k - 6$ มี X intercept (5, 0) จงหาค่า k

11. จงพิจารณาว่า จุด A, B, C, D ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ในกรณีที่เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานให้บอกด้วยว่าเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่

11.1) $A(2, 0)$ $B(3, -4)$ $C(1, -2)$ $D(0, 2)$

11.2) $A(3, 0)$ $B(-1, 2)$ $C(1, 7)$ $D(5, 5)$

11.3) $A(3, 1)$ $B(2, 2)$ $C(0, 1)$ $D(1, 0)$

11.4) $A(-2, 2)$ $B(1, 3)$ $C(2, 0)$ $D(-1, -1)$

11.5) $A(-1, 0)$ $B(0, -1)$ $C(2, 0)$ $D(3, 2)$

12 จงพิจารณาว่าจุด A, B, C ในข้อใดต่อไปนี้ ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

12.1) $A(1, -2)$ $B(6, -5)$ $C(-10, 2)$

12.2) $A(5, 1)$ $B(-1, -1)$ $C(8, 2)$

12.3) $A(-2, 1)$ $B(1, 3)$ $C(6, -7)$

12.4) $A(3, 1)$ $B(-1, 2)$ $C(5, 0)$

13. จงพิจารณาว่าจุด A, B, C ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

13.1) $A(-4, 2)$ $B(-1, -1)$ $C(1, 1)$

13.2) $A(4, 4)$ $B(1, 2)$ $C(2, 1)$

13.3) $A(0, -1)$ $B(4, 0)$ $C(3, 4)$

13.4) $A(1, 2)$ $B(6, -3)$ $C(9, 0)$

13.5) $A(2, -1)$ $B(4, 3)$ $C(-1, -7)$

14. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่าน $P(3, -2)$ และ $Q(4, k)$

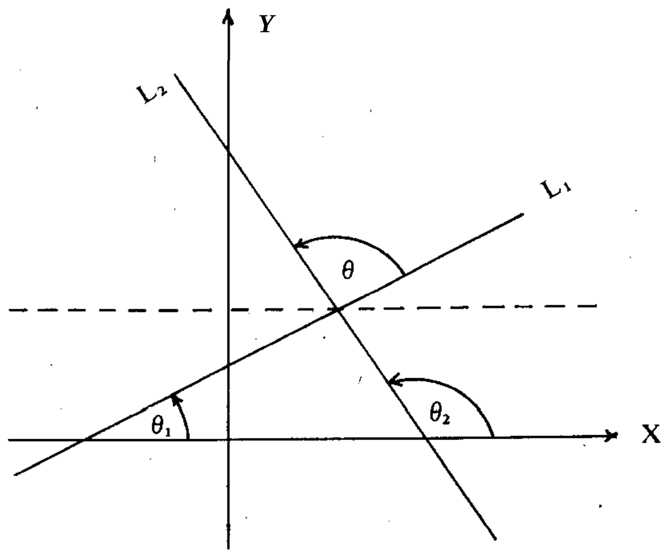
14.1) ขนานกับเส้นตรงที่มีความชัน -3

14.2) ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่มีความชัน -3

15. กำหนดให้ เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และ $P(x, y)$ มีความชัน 2 และเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 0)$ และ $P(x, y)$ มีความชัน 1 จงหาค่า x, y

16. เส้นตรง L ตัดแกน X เป็นระยะ $\sqrt{3}$ หน่วยทางขวามือและตัดแกน Y เหนือแกน X เป็นระยะ 1 หน่วย จงหามุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน X

17) ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2



รูป 4.5.1

พิจารณาจากรูป 4.5.1 ได้ว่า

θ_1 และ θ_2 เป็นมุมเอียงของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ และ θ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2

4.5 มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้น ที่ทำมุมกับแกน X เป็นมุม θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ และ θ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2 ดังรูป 4.5.1

ดังนั้น $\theta = \theta_2 - \theta_1$

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

เมื่อ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ

และ $m_1 m_2 \neq -1$

ข้อสังเกตุ ถ้า $m_1 m_2 = -1$ เราจะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองนี้ตั้งได้ฉากกัน

ตัวอย่างที่ 4.5.1 ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชันเป็น $-\frac{1}{3}$ และ 2 ตามลำดับ จงหามุมจาก L_1 ไปยัง L_2

วิธีทำ

ให้ m_1 และ m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ

และ θ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{3} \text{ และ } m_2 = -2$$

จาก $$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{-2 \quad (-\frac{1}{3})}{1 + (-\frac{1}{3})(-2)}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = -1$$

$$\theta = \tan^{-1} - 1$$

$$= 135^\circ$$

ดังนั้นมุมจากเส้นตรง L_1 ไปยัง L_2 เป็นมุม 135°

ตัวอย่าง 4.5.2 ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (3, 5) จงหาความชันของเส้นตรง L_2 ซึ่งมีมุมตัดกันระหว่าง L_1 กับ L_2 เป็น $45°$,

วิธีทำ

ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ

และ θ เป็นมุมตัดกันระหว่าง L_1 กับ L_2

ดังนั้น
$$m_1 = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

และ
$$\tan\theta = \tan 45° = 1$$

จาก
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{m_2 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}m_2}$$

$$1 + \frac{3}{2}m_2 = m_2 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}m_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore m_2 = -5$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง L_2 คือ -5

แบบฝึกหัดที่ 4.5

1. จงหา tangent ของมุมจากเส้น L_1 ซึ่งมีความชัน m_1 ไปยังเส้น L_2 ซึ่งมีความชัน m_2 ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1) $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{4}{5}$

   1.2) $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{4}{5}$

   1.3) $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{4}{5}$

   1.4) $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{4}{5}$

   1.5) $m_1 = 3$, $m_2 = 1$

   1.6) $m_1 = -3$, $m_2 = -1$

   1.7) $m_1 = -3$, $m_2 = 1$

   1.8) $m_1 = 3$, $m_2 = -1$

2. จงหาค่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดมุมเป็น A(3, 2), B(1, -1) และ C(0, 1)

3. ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (3, 5) จงหาความชันของเส้นตรง L_2 ซึ่งมีมุมตัดกันระหว่าง L_1 กับ L_2 เป็น 45°
