บทที่ 3
ระบบจำนวนจริง
(The Real Number System)

3.0 บทนำ

จำนวนที่มักใช้กันในทางคณิตศาสตร์ อาจจำแนกออกได้เป็นจำนวนจริง (real numbers) กับจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers) ซึ่งในที่นี้เราจะศึกษาและกล่าวถึงเฉพาะจำนวนจริงเท่านั้น (โดยจำนวนจริงนี้เป็นส่วนหนึ่งของจำนวนเชิงซ้อน)

ก่อนอื่น เราจะศึกษาถึงส่วนประกอบของจำนวนจริงเสียก่อนว่า มีลักษณะโครงสร้างเป็นอย่างไร **จำนวนจริง**ประกอบด้วยจำนวนที่สำคัญสองชนิดคือ

1. **จำนวนตรรกยะ** (Rational numbers) จำนวนตรรกยะประกอบด้วย

1.1 จำนวนเต็ม (Integers) ซึ่งแบ่งได้เป็นสามจำพวกคือ

ก) จำนวนเต็มบวก (positive integers)
ได้แก่ 1, 2, 3, ...

ข) จำนวนเต็มลบ (negative integers)
ได้แก่ -1, -2, -3, ...

ค) ศูนย์ (0)

1.2 เศษส่วน (Fraction) ได้แก่ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $\frac{p}{q}$ โดย p และ q เป็นจำนวนเต็มและ $q \neq 0$ (ถ้า $q = 1$ ก็จะได้ $\frac{p}{1} = p$ ดังนั้นจำนวนเต็ม p ทุก ๆ จำนวนก็เป็นเศษส่วนด้วย โดยมีส่วนเป็น 1)

นอกจากนี้จำนวนตรรกยะยังมีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ จำนวนตรรกยะนั้นสามารถเขียนได้ในรูปทศนิยมรู้จบ หรือ ทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ เช่น

$$4.1 = \frac{41}{10};\ 0.333\ldots = \frac{1}{3}$$ เป็นต้น

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational numbers) ก็คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ซึ่งอาจเขียนได้ในรูปทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ เช่น

$$\sqrt{2} = 1.732\ldots.\quad \pi = 3.14159\ldots$$

ต่อไปนี้ เราจะศึกษาในรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนต่าง ๆ

3.1 คุณสมบัติเบื้องต้นของจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริงเป็นระบบคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย

1. เซ็ต เซ็ตหนึ่งคือเซ็ต R และเรียกอีลีเมนต์แต่ละตัวของเซ็ต R นี้ว่า "จำนวนจริง" (real number)

2. ความสัมพันธ์หนึ่งอย่าง คือ ความสัมพันธ์ "$<$" (อ่านว่าน้อยกว่า) โดยสำหรับ x กับ y ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า x กับ y มีความสัมพันธ์ "$<$" ต่อกันคือ "$x < y$" แล้วอ่านว่า "x น้อยกว่า y"

3. ไบนารีโอเปอร์เรชัน 2 อย่าง คือ " + " (บวก) กับ " $\times$ " (คูณ) โดยถ้า x กับ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว เราเรียก $x + y$ ว่าเป็นผลบวกของ x กับ y ซึ่งก็เป็นจำนวนจริงด้วย และเรียก $x \times y$ ว่าเป็นผลคูณของ x กับ y (มักเขียนเป็น xy) ซึ่งก็เป็นจำนวนจริงด้วย เช่นกัน

ในระบบจำนวนจริงนี้มีคุณสมบัติเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

1) สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ $x + y$ เป็นจำนวนจริง เรียกคุณสมบัตินี้ว่า "คุณสมบัติปิดของการบวก" นั่นคือ ถ้า $x \in R$ และ $y \in R$ แล้ว $x + y \in R$

2) สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

$$x + y = y + x$$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการสลับที่การบวก" คือกล่าวได้ว่า "ในการบวกจำนวนจริงสองจำนวน เมื่อสลับที่กันระหว่างจำนวนทั้งสองนั้นแล้ว ผลบวกก็ยังคงเท่าเดิม" เช่น $2 + 3 = 3 + 2$

3) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการจัดหมู่ของการบวก" คือกล่าวได้ว่า "ในการบวกจำนวนสามจำนวน จะบวกสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อนก็ได้ ผลบวกจะเท่าเดิม" หรือถ้ามีจำนวนจริงตั้งแต่สี่จำนวนขึ้นไป เมื่อนำมาบวกกันจะแบ่งพวกการบวกอย่างไรก็ได้ ผลลัพธ์เหมือนกัน

เช่น $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$

4) ในเซ็ต R มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง

$x + 0 = x = 0 + x$ ทุก ๆ จำนวนจริง x

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "เอกลักษณ์การบวก" คือมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริง มี 0 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เอาไปบวกกับจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามผลลัพธ์ก็ยังคงเป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นเสมอ" เช่น $2 + 0 = 2 = 0 + 2$

5) สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะมีจำนวนจริง $-x$ ซึ่ง

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "อินเวอร์ส (inverse) การบวก" ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งซึ่งเมื่อนำไปบวกกับจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่งแล้วได้เอกลักษณ์การบวก" จะเรียกจำนวนจริงนี้ว่า อินเวอร์สของจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่ง เช่น $2 + (-2) = 0 = (-2) + 2$

เรียก -2 ว่าเป็น อินเวอร์สของ 2 หรืออาจเรียกว่า 2 ก็เป็นอินเวอร์สของ -2

6) สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ xy เป็นจำนวนจริง เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติปิดของการคูณ" นั่นคือ ถ้า $x, y \in R$ แล้ว $xy \in R$

7) สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

$xy = yx$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่าในการคูณจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ เมื่อสลับที่กันระหว่างจำนวนทั้งสองนั้นแล้วผลคูณก็ยังคงเดิม เช่น $2 \times 4 = 4 \times 2$

8) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$(xy)z = x(yz)$

เรียกว่า "คุณสมบัติการจัดหมู่การคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่าในการคูณจำนวนจริงสามจำนวนใด ๆ จะคูณสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อน แล้วนำไปคูณกับจำนวนที่สามก็ได้ผลคูณเท่าเดิม เช่น $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3} \times \frac{1}{4})$

9) ในเซ็ต R มีจำนวนจริง $1 (\neq 0)$ ซึ่ง

$x.1 = x = 1.x$

เรียก 1 ว่า "เอกลักษณ์ของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่า "1 เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่คูณกับจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามผลลัพธ์จะเป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นเสมอ" เช่น $5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$

10) สำหรับจำนวน x ใด ๆ ซึ่ง $x \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{x}$ ซึ่ง

$$x(\frac{1}{x}) = 1 = \frac{1}{x}(x)$$

เรียกว่า "คุณสมบัติอินเวอร์สของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งซึ่งเมื่อนำไปคูณกับจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่งแล้วได้เอกลักษณ์ของการคูณ" (คือ 1) จะเรียกจำนวนจริงนั้นว่า อินเวอร์สของจำนวนจริงจำนวนนั้น เช่น $2(\frac{1}{2}) = 1 = \frac{1}{2}(2)$

เรียก $\frac{1}{2}$ ว่าเป็น อินเวอร์สของ 2 หรือเรียก 2 ว่าเป็นอินเวอร์สของ $\frac{1}{2}$ ก็ได้

11) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$x(y + z) = xy + xz$

เรียกคุณสมบัตินี้ว่า "คุณสมบัติการกระจาย" ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีคุณสมบัติการกระจายของการคูณเทียบกับการบวกคือการคูณจำนวนจริงกับผลบวกของจำนวนจริงอีกสองจำนวน ถ้าคูณทีละจำนวนแล้วบวกกันผลคูณที่ได้ก็จะเท่ากัน" เช่น $2(1 + 3) = (2 \times 1) + (2 \times 3)$

11) ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราจะต้องได้ว่า

$x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

13) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

กล่าวคือ จำนวนจริงสามจำนวน ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สองและจำนวนที่สองน้อยกว่าจำนวนที่สามแล้ว ย่อมได้ว่าจำนวนแรกย่อมน้อยกว่าจำนวนที่สามด้วย เช่น $1 < 4$ และ $4 < 6$ ดังนั้น $1 < 6$

14) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

เป็นการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน กล่าวคือ จากจำนวนจริงสามจำนวน x, y, z ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สองแล้ว เมื่อนำเอาจำนวนที่สามมาบวกเข้าทั้งสองข้าง ผลบวกของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามก็ยังคงน้อยกว่าผลบวกของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม เช่น ถ้า $2 < 5$ แล้ว เอา 3 บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้

$2 + 3 < 5 + 3$

15) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

เป็นการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน กล่าวคือจากจำนวนจริงสามจำนวน x, y, z ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สอง เมื่อนำเอาจำนวนที่สามซึ่ง**มากกว่าศูนย์**มาคูณเข้าทั้งสองข้าง ผลคูณของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามก็ยังคงน้อยกว่าผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม เช่น $2 < 5$ และ $0 < 3$ แล้วเอา 3 คูณเข้าทั้งสองข้าง

ดังนั้น $2 \times 3 < 5 \times 3$

16) ถ้า $S \subset R$ และ $S \neq \varnothing$ ($\varnothing$ คือเซ็ตเปล่า) และ S มีขอบเขตข้างบนแล้ว S ย่อมมีขอบเขตข้างบนต่ำสุด (จะกล่าวในหัวข้อ 3.4)

คุณสมบัติเบื้องต้นทั้ง 16 ข้อนี้ถือว่าเป็นสัจจพจน์เกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ซึ่งไม่ต้องพิสูจน์

3.2 คุณสมบัติของจำนวนจริง

นอกจากคุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 แล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีคุณสมบัติอื่น ๆ อีกมากมาย ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยอาศัยคุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 ทั้งสิ้น ซึ่งจะนำมากล่าวไว้ในรูปทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 มีจำนวนจริง 0 อยู่เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + 0 = x$ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

ทฤษฎีบทที่ 3.2.2 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมมีจำนวนจริง $-x$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + (-x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.3 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$x0 = 0 = 0x$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.4 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$(x + y)z = xz + yz$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.5 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$(-x)(-y) = xy$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.6 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$-(-x) = x$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.7 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว ย่อมได้ว่า $y = z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.8 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

ถ้า $x \neq 0$ และ $xy = xz$ แล้ว $y = z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.9 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด

ถ้า $xy = 0$ แล้ว ย่อมได้ว่า $x = 0$ หรือ $y = 0$

บทแทรก

ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว เราย่อมได้ว่า $y = 0$

นิยามการลบ ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$x - y = x + (-y)$ อ่าน $x - y$ ว่า x ลบด้วย y

นิยามการหาร ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{y} = x(\frac{1}{y})$

อ่าน $\frac{x}{y}$ ว่า x ส่วน y หรือ x หารด้วย y

ทฤษฎีบทที่ 3.2.10 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ย่อมได้

$x - (y - z) = (x - y) + z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.11 **สำหรับจำนวนจริง** x ใด ๆ

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{x} = 1$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.12 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.13 สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.14 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด

ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x + y}{z}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.15 สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

นิยาม ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

(1) $x > y$ หมายความว่า $y < x$ ($x > y$ อ่านว่า x มากกว่า y)

(2) $x > 0$ เราเรียกว่า x เป็นจำนวนบวก

(3) $x \leqslant y$ หมายความว่า $x < y$ หรือ $x = y$ (อ่าน $x \leqslant y$ ว่า x น้อยกว่าหรือเท่ากับ y)

ทฤษฎีบทที่ 3.2.18 $1 > 0$ (1 เป็นจำนวนบวก)

ทฤษฎีบทที่ 3.2.19 ถ้า x และ y เป็นจำนวนบวกใด ๆ ย่อมได้ว่า $x + y$ เป็นจำนวนบวก

หมายเหตุ

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบท ตั้งแต่ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 ถึงทฤษฎีบทที่ 3.2.19 นี้ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้คุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 และทฤษฎีบทที่ผ่านมาแล้ว ในที่นี้จะยกตัวอย่างการพิสูจน์ให้ดูเพียงทฤษฎีเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่ 3.2.3 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า $x0 = 0 = 0x$

พิสูจน์

$x0$	$=$	$x0 + 0$	โดยคุณสมบัติข้อ	3
	$=$	$x0 + (x + (-x))$	"	4
	$=$	$(x0 + x) + (-x)$	"	2
	$=$	$(x0 + x1) + (-x)$	"	7
	$=$	$x(0 + 1) + (-x)$	"	9
	$=$	$x1 + (-x)$	"	3
	$=$	$x + (-x)$	"	7
	$=$	0	"	4
และ $0x$	$=$	$x0 = 0$	"	5
$\therefore x0$	$=$	$0 = 0x$		

แบบฝึกหัดที่ 3.2

ให้ x, y, z, t เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้า $xy = xz$ แล้ว $y = z$ เมื่อใด?
2. ถ้า $xy = 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว x จะมีค่าเป็นอะไร?
3. ถ้า $xy = 0$ และ $x = 0$ แล้ว y จะมีค่าอย่างไร?
4. $-(x + y)$ เท่ากับ อะไร?
5. $(x + y)(z - t)$ เท่ากับ อะไร?
6. $x - (y - z)$ เท่ากับ อะไร?
7. $x - (y + z)$ เท่ากับ อะไร?
8. $(\frac{x}{y})(\frac{y}{x})$ เท่ากับ อะไร เมื่อ $x \neq 0, y \neq 0$
9. $(\frac{x}{y})(\frac{z}{t}) = \frac{xz}{yt}$ เมื่อใด?
10. $(x + 3)(y + 2)$ เท่ากับเท่าไร?
11. $\frac{xy}{z} + \frac{t}{z}$ เท่ากับอะไร เมื่อ $z \neq 0$
12. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ เท่ากับ อะไร?
13. $(\frac{xy + xz}{x})$ เท่ากับ อะไร เมื่อ $x \neq 0$
14. $\frac{(x + y)(y + z)}{(x + y)} = y + z$ เมื่อใด?
15. $(x \quad y)(z - t)$ เท่ากับ อะไร?
16. $(z - y)((x + z) - (z - t))$ เท่ากับ อะไร?
17. $\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{yz}$ เมื่อใด?

18. $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \dfrac{xt}{yz}$ เมื่อใด?

19. ถ้า $-x < y$ แล้ว $-y$ น้อยกว่าอะไร?

20. ถ้า $-y < -x$ แล้ว x น้อยกว่าอะไร?

21. ถ้า $z < 0$ แล้ว เอา z คูณ $x < y$ ตลอดแล้วได้อะไร?

22. ถ้า $z > 0$ แล้ว เอา z คูณ $x < y$ ตลอดแล้วได้อะไร?

23. ถ้า $x < y < 0$ แล้ว จงเปรียบเทียบระหว่าง $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ และ 0

24. ถ้า $x > y \wedge z > t$ แล้ว จงเปรียบเทียบ $x - t$ กับ $y - z$

25. จงเขียนเศษส่วนที่มีส่วนเป็น yz และมีค่าเท่ากับ $\frac{x}{y}$

26. จงเขียนเศษส่วนที่มีส่วนเป็น $xz + yz$ และมีค่าเท่ากับ $\frac{t}{z}$

27. จงหาค่าของ x ถ้า $4x - 9 < 15$

28. จงหาค่า x ถ้า $7 < 2x - 3$

29. จงหาค่า x ถ้า $5x + 2 < 4x - 3$

30. จงหาค่า x ถ้า $3x - 3 < 5x + 11$

3.3 จำนวนนับ, จำนวนเต็ม, จำนวนตรรกยะ

จำนวนนับ (Counting numbers) หรือ **จำนวนธรรมชาติ** (natural numbers) หรือจำนวนเต็มบวก (positive integers)

การเริ่มเรียนรู้เกี่ยวกับจำนวนนั้น เราเริ่มเรียนรู้เกี่ยวกับการนับเป็นอันดับแรก ดังนั้นจำนวนแรกที่เรารู้จักก็คือ "หนึ่ง" และจำนวนต่อมาก็คงต้องเป็น "สอง" ดังนั้น ตัวเลขที่ค้นพบหรือคิดขึ้นในตอนแรกก็คงเป็นตัวเลขที่แทน หนึ่ง, สอง นั่นเอง เชื่อกันว่า มนุษย์บางเผ่าในสมัยโบราณรู้จักแต่ "หนึ่ง" "สอง" และ "มาก" เท่านั้น แต่อย่างไร ก็ตามมนุษย์เราก็สามารถสร้างระบบจำนวนนับขึ้นใช้จนกระทั่งปัจจุบันเราเรียกจำนวน ดังกล่าวว่า **จำนวนธรรมชาติ** คือ 1, 2, 3, 4, ... จำนวน 2, 3, 4, ... เหล่านี้เราอาจเขียน เป็นผลบวกของ 1 ได้ จึงเรียกจำนวนเหล่านี้อีกชื่อว่า "จำนวนนับ" หรือ บางทีก็เรียก ว่า "จำนวนเต็มบวก" และจะใช้สัญลักษณ์ "N" เขียนแทนเซ็ตของจำนวนนับ หรือจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

จะพบว่าระบบซึ่งประกอบด้วยเซ็ต N ไบนารีโอเปอร์เรชัน + กับ × และมี ความสัมพันธ์ < ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง เราเรียกว่า **ระบบจำนวนนับ** (Natural number system) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังนี้

ถ้าให้ x, y, z เป็นจำนวนนับใด ๆ แล้ว

1) $x + y \in N$

2) $x + y = y + x$

3) $(x + y) + z = x + (y + z)$

4) $xy \in N$

5) $xy = yx$

6) $(xy)z = x(yz)$

7) มี I EN ซึ่ง $x.1 = x = 1.x$

8) $x(y + z) = xy + xz$

9) x, y เป็นจำนวนนับแล้วจะต้องได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

10) ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

11) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

12) ถ้า $x < y$ แล้ว $xz < yz$

จำนวนเต็ม (integers)

ให้ x เป็นจำนวนใด ๆ จะเรียก x ว่า "เป็นจำนวนเต็ม" (integers) ถ้า

1) x เป็นจำนวนนับ คือ จำนวนเต็มบวก ได้แก่ $1, 2, 3, \ldots$
2) $-x$ เป็นจำนวนนับ คือ จำนวนเต็มลบนั่นเอง ได้แก่ $-1, -2, -3, \ldots$
3) x เป็น 0

และมักจะใช้สัญลักษณ์ "I" เขียนแทนเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย ดังนั้น

$$I = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

จะพบว่าระบบที่ประกอบด้วยเซ็ต I ไบนารีโอเปอร์เรชัน $+$ กับ $\times$ และมีความสัมพันธ์ $<$ ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง เราเรียกว่า **ระบบจำนวนเต็ม** ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1) $x + y \in I$

2) $x + y = y + x$

3) $(x + y) + z = x + (y + z)$

4) มี $0 \in I$ ซึ่ง $x + 0 = x = 0 + x$

5) สำหรับทุก ๆ $x \in I$ จะมี $-x \in I$ ซึ่ง $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

6) $xy \in I$

7) $xy = yx$

8) $(xy)z = x(yz)$

9) มี $1 \in I$ ซึ่ง $x.1 = x = 1.x$

10) $x(y + z) = xy + xz$

11) สำหรับ x, y ใด ๆ เราจะได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

12) ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

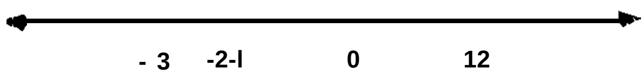
13) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

14) ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเต็มเป็นดังนี้ คือ

$$\cdots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$$

ซึ่งอาจเขียนแทนจำนวนเต็มต่าง ๆ ลงบนเส้นตรงได้เป็น



รูป 2.3.1

การเขียนแสดงจำนวนเต็มด้วยจุดต่าง ๆ ลงบนเส้นตรงนี้ทำโดยเลือกจุดจุดหนึ่งเรียกว่าจุด 0 บนเส้นตรง ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกหน่วยความยาวเป็นเท่าไรก็ได้ แล้วเลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่**ทางขวา**ของ 0 ให้แทนจำนวน 1, 2, 3, ... โดยมีความยาวห่างจาก 0 ไปทางขวาเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย, ... ตามลำดับและเลือกจุดบนเส้นตรง**ทางซ้าย**ของ 0 ใช้แทน $-1, -2, -3, \ldots$ โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย, ... ตามลำดับดังรูป 2.3.1

จะได้ว่า ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว "ถ้า $x < y$ แล้ว จุด x ย่อมอยู่ทางซ้ายของ y และในทางกลับกัน ถ้า x อยู่ทางซ้ายของ y แล้ว จะได้ว่า $x < y$"

จำนวนตรรกยะ (Rational numbers)

"จำนวนตรรกยะ" หมายถึง จำนวนจริงที่สามารถเขียนได้เป็นเศษส่วนของ

จำนวนเต็ม โดยส่วนไม่เท่ากับ 0 หรืออาจกล่าวได้ว่า จำนวนตรรกยะได้แก่จำนวนต่อไปนี้ คือ

1. จำนวนเต็ม ได้แก่ ..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ เพราะสามารถเขียนแทนจำนวนเต็มแต่ละจำนวนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้โดยมีส่วนเป็น 1 เสมอ (ยกเว้นจำนวนเต็มศูนย์) เช่น $2 = \frac{2}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{5} = \frac{0}{9}$ เป็นต้น

2. จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของเศษส่วนของจำนวนเต็มโดยตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์และไม่เท่ากับ 1 เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{4}$ เป็นต้น

3. จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ (คือทศนิยมรู้จบหรือทศนิยมไม่รู้จบชนิดซ้ำกันนั่นเอง) เช่น 1.4, -3.2, 0.131313...

เราใช้สัญลักษณ์ "Q" แทนเซ็ตของจำนวนตรรกยะทั้งหลาย

จะพบว่าระบบที่ประกอบด้วยเซ็ต Q ไบนารีโอเปอเรชัน $+$ กับ $\times$ และมีความสัมพันธ์ $<$ ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์อีกระบบหนึ่ง เราเรียกว่า**ระบบจำนวนตรรกยะ** (Rational number system) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังนี้

ให้ x, y, z เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ จะได้ว่า

1) $x + y \in Q$

2) $x + y = y + x$

3) $(x + y) + z = x + (y + z)$

4) มี $0 \in Q$ ซึ่ง $x + 0 = x = 0 + x$

5) สำหรับทุก ๆ $x \in Q$ จะมี $-x \in Q$ ซึ่ง
$x + (-x) = 0 = (-x) + x$

6) $xy \in Q$

7) $xy = yx$

8) $(xy)z = x(yz)$

9) มี $1 \in Q$ ซึ่ง $1.x = x = x.1$

10) สำหรับทุก ๆ $x \in Q$ ถ้า $x \neq 0$ จะมี $\frac{1}{x} \in Q$

ซึ่ง $x(\frac{1}{x}) = 1 = (\frac{1}{x})x$

11) $x(y + z) = xy + xz$

12) สำหรับ x, y ใด ๆ เราจะได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

13) ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

14) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

15) ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

นอกจากนั้นระบบจำนวนตรรกยะยังมีคุณสมบัติที่สำคัญสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.2.20 อีกคือ

ทฤษฎีบทที่ 3.2.20 ถ้า x, y เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ และ $x < y$ แล้วย่อมมีจำนวนตรรกยะ z ซึ่ง $x < z < y$

จากทฤษฎีนี้ทำให้ทราบว่าในการเขียนแสดงจำนวนตรรกยะ ด้วยจุดในเส้นตรงนั้นมีจุดที่แทนจำนวนตรรกยะอยู่หนาแน่น แต่มีข้อเตือนใจไว้อย่างหนึ่งว่าจุดบนเส้นตรงนี้ไม่ใช่ทุกจุดจะแทนได้ด้วยจำนวนตรรกยะ ยังมีจุดที่ไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะ แต่แทนด้วยจำนวนอื่นคือจำนวนอตรรกยะ ซึ่งจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 3.6

3.4 จำนวนอตรรกยะ

จากการศึกษาเรื่องระบบจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็มและระบบจำนวนตรรกยะ ซึ่งระบบต่าง ๆ เหล่านี้ ต่างก็เป็นส่วนหนึ่งของระบบจำนวนจริง จะเห็นความสัมพันธ์ $<$ ช่วยจัดจำนวนต่าง ๆ เข้าเป็นลำดับกันและคุณสมบัติข้อที่ 16 ก็กล่าวถึงคุณสมบัติของความสัมพันธ์อันนี้ อนึ่งเพื่อเราจะได้ทำความเข้าใจกับคุณสมบัติข้อที่ 16 ได้

อย่างสมบูรณ์จึงต้องมาทำความเข้าใจกับสิ่งต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ก่อน

3.4.1 ขอบเขตของเซ็ต

นิยาม 3.4.1 ขอบเขตข้างบน (upper bound) **ของเซ็ต**

"ให้ $S \subseteq R$ ถ้า U เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

สำหรับทุก ๆ x ถ้า $x \in S$ แล้ว $x \leqslant U$

จะเรียก U ว่าเป็นขอบเขตข้างบนหรือเซ็ต S"

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ อีลีเมนต์ในเซ็ต S จะน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง U เสมอ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า บรรดาจำนวนจริง U ย่อมมากกว่าหรือเท่ากับอีลีเมนต์ในเซ็ต S ทุกตัว แล้วจะเรียกบรรดาจำนวนจริง U เหล่านี้ว่าขอบเขตข้างบนของเซ็ต S

ตัวอย่าง เช่น ให้ $S = \{ x \mid x \in R \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5 \}$

จะเห็นว่า เซ็ต S มีค่าอยู่ระหว่างตั้งแต่ 3 ถึง 5 เท่านั้น

ดังนั้น ขอบเขตข้างบนของเซ็ต S ก็คือจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ- 5 หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่าขอบเขตข้างบนของ S คือ $\{ x \mid x \in R \wedge x \geqslant 5 \}$

นิยาม 3.4.2 ขอบเขตข้างบนต่ำสุด (least upper bound) **ของเซ็ต**

ให้ U′ เป็นขอบเขตข้างบนของเซ็ต S และ

สำหรับทุก ๆ U ถ้า U เป็นขอบเขตข้างบนของ S แล้ว $U' \leqslant U$

จะเรียก U′ ว่าเป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S เขียนแทน U′ ด้วยสัญลักษณ์ "l.u.b.S"

นั่นคือ สำหรับบรรดาจำนวนจริง U ทั้งหลายที่เป็นขอบเขตข้างบนของเซ็ต S นั้นจะมีอยู่อีลีเมนต์หนึ่งซึ่งมีค่าน้อยที่สุด สมมุติเป็น U′ ซึ่งจะเรียก U′ ว่าเป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S (l.u.b.S)

เช่น จาก $S = \{ x \mid x \in R \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5)$

เราทราบว่าเซ็ตของขอบเขตข้างบนของ S คือ $\{ x \mid x \in R \wedge x \geqslant 5 \}$ ดังนั้น ขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S หรือ l.u.b.S ก็คือ 5

นิยาม 3.4.3 ขอบเขตข้างล่าง (lower bound) ของเซ็ต

"ให้ $S \subseteq R$ ถ้า L เป็นจำนวนจริงซึ่ง

สำหรับทุก ๆ x ถ้า $x \in S$ แล้ว $x \geqslant L$

จะเรียก L ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S"

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ อีลีเมนต์ในเซ็ต S ย่อมมากกว่าหรือเท่ากับ L เสมอ หรือกล่าวคือบรรดาจำนวนจริง L นี้ย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับอีลีเมนต์ในเซ็ต S ทุกตัว

และจะเรียกบรรดาจำนวนจริง L เหล่านี้ว่าขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S

เช่น $S = \{ x \mid x \in R \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5 \}$

ซึ่งเซ็ต S มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 5

ดังนั้นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S ก็คือจำนวนจริงใด ๆ ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่า เซ็ตของขอบเขตข้างล่างของ S ก็คือ $\{ x \mid x \in R \wedge x \leqslant 3 \}$

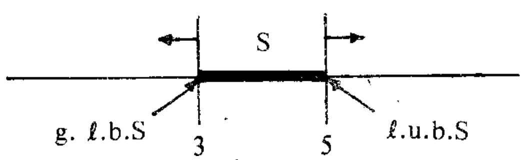
นิยาม 3.4.4 ขอบเขตข้างล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของเซ็ต

"ให้ L′ เป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S และสำหรับทุก ๆ L ถ้า L เป็นขอบเขตข้างล่างของ S แล้ว $L \leqslant L'$ เราจะเรียก L′ ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของเซ็ต S เขียนแทน L′ ด้วยสัญลักษณ์ "g.l.b.S"

นั่นคือสำหรับบรรดาจำนวนจริง L ทั้งหลายที่เป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S นั้น จะมีอยู่อีลีเมนต์หนึ่งซึ่งมีค่ามากที่สุด สมมุติว่าเป็น L′ ซึ่งเราจะเรียก L′ ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของเซ็ต S (g.l.b.S)

เช่น จาก $S = \{x | x \in R \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5\}$

เราทราบว่าเซ็ตของขอบเขตข้างล่างของ S คือ $\{ x \mid x \in R \wedge x \leqslant 3 \}$ ดังนั้น ขอบเขตข้างล่างสูงสุดของ S หรือ g.l.b.S ก็คือ 3 อาจเขียนรูปประกอบได้ดังรูป 3.4.1



รูป 3.4.1

3.4.2 จำนวนอตรรกยะ

ในระบบจำนวนตรรกยะ จะหาค่ารากของสมการ $x^2 = 2$ ไม่ได้ เพราะเราไม่ สามารถเขียน $\sqrt{2}$ ออกมาเป็นจำนวนในรูปของเศษส่วนที่ทั้งเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มโดยส่วนไม่เท่ากับศูนย์ได้ คือไม่มีจำนวนในรูป $\frac{a}{b}$ จำนวนใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2 พอดี ($a \in I$, $b \in I$ และ $b \neq 0$)

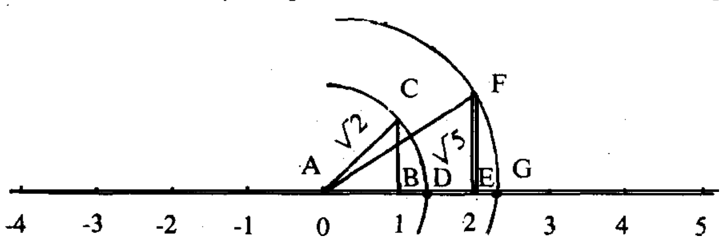
จึงกล่าวว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ (ซึ่งจะแสดงในภายหลัง)

และจะเรียกจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่า **จำนวนอตรรกยะ** (irrational numbers)

นอกจากนี้ยังมีจำนวนอตรรกยะอีกมากมายเช่น $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, ..., $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ..., $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, ..., $1 \pm \sqrt{2}$, ., e, ¶ เป็นต้น

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าเราสามารถเขียนแสดงจำนวนตรรกยะด้วยจุดต่าง ๆ บนเส้นตรงได้อย่างหนาแน่นมากมายก็จริง แต่ก็ยังมีช่องว่างระหว่างจุดเหล่านั้น กล่าวคือ "จุดที่แทนจำนวนตรรกยะมิได้เรียงกันอยู่อย่างต่อเนื่องนั่นเอง" ในบรรดาช่องโหว่นั้นก็คือจุดซึ่งเขียนแสดงด้วยจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

เช่น จะแสดงถึงจุดที่อยู่ของ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ บนเส้นจำนวนได้ดังรูป 3.4.2



รูป 3.4.2

จากรูปให้ AB, CB, EF ยาวหนึ่งหน่วย AE ยาว 2 หน่วย

$\therefore$ จาก (ความยาว AC)^2 $= AB^2 + BC^2$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore$ ความยาว AC $= \sqrt{2}$

แล้วเขียนส่วนโค้งให้มีรัศมีเท่ากับ AC มาตัดเส้นตรงที่ D ดังนั้น AD ยาว $\sqrt{2}$ ด้วย, ในทำนองเดียวกัน (ความยาว AF)^2 $= AE^2 + EF^2$

$= 2^2 + 1^2 = 5$

$\therefore$ ความยาว AF $= \sqrt{5}$

แล้วเขียนส่วนโค้งให้รัศมีเท่ากับ AF มาตัดเส้นตรงที่ G ดังนั้น AG ยาว $\sqrt{5}$ นั่นเอง

หมายเหตุ

1) จาก N คือเซ็ตของจำนวนนับ, I เป็นเซ็ตของจำนวนเต็ม, Q เป็นเซ็ตของจำนวนตรรกยะ เราจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตทั้งสามได้เป็น $N \subseteq I \subseteq Q$
2) ผลรวม (union) ของเซ็ตของจำนวนตรรกยะกับเซ็ตของจำนวนอตรรกยะ เรียกว่า "เซ็ตของจำนวนจริง (คือเซ็ต R)"
3) ส่วนร่วม (intersection) ของเซ็ตจำนวนตรรกยะกับเซ็ตอตรรกยะจะเป็นเซ็ตเปล่า (empty set) นั่นแสดงว่าไม่มีจำนวนจริงจำนวนใดเลยที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ
4) เซ็ตของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะต่างก็เป็นสับเซ็ตของเซ็ตจำนวนจริง
5) นอกจากนี้ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่ง เช่น $\sqrt{-1}$ ซึ่งได้จากการแก้สมการ $x^2 + 1 = 0$ เราไม่สามารถหาค่าจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับ $x^2 + 1 = 0$ ได้เลย เพราะกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ นั่นคือ ไม่สามารถบอกได้ว่า $\sqrt{-1}$ เป็นเท่าไร? จำนวนพวกนี้ไม่ใช่จำนวนจริง เราเรียก "จำนวนจินตภาพ" (imaginary number) ซึ่งอยู่นอกเหนือเนื้อหาในบทนี้จึงไม่กล่าวถึง

ต่อไปจะแสดงว่าไม่มีจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ ที่ $x^2 = 2$ (คือ $x = \sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ)

สมมุติว่า x เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งสามารถเขียนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้เป็น $\frac{a}{b}$ (คือ a กับ b ไม่มีตัวประกอบร่วมนอกจาก 1 และ −1 นั่นคือ a หาร b ไม่ลงตัว และ b หาร a ก็ไม่ลงตัวด้วย)

ให้ $x = \frac{a}{b} = \sqrt{2} > 0$

$\therefore (\frac{a}{b})^2 = 2$ หรือ $\frac{a^2}{b^2} = 2$

$\therefore a^2 = 2b^2$ ....(1)

เนื่องจากทางด้านซ้ายมือ (คือ a^2) หารลงตัวด้วย a

ดังนั้น a จะต้องหารจำนวนทางขวามือ (คือ $2b^2$) ลงตัวด้วย

แต่ a หาร b ไม่ลงตัว

$\therefore$ a ต้องหาร 2 ลงตัว

$\therefore a = 1$ หรือ $a = 2$

กรณีที่ 1 ถ้า $a = 1$, จาก (1) เราได้ว่า

$1^2 = 2b^2$

แต่ $2b^2$ จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ($2b^2 \geqslant 2$)

$\therefore 1^2 \geqslant 2$

เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $a = 2$ จาก (1) เราได้

$2^2 = 2b^2$

ดังนั้น $2 = b^2$

แต่ $b^2 = 1$ หรือ $b^2 \geqslant 4$ เสมอ

$\therefore 2 = 1$ หรือ $2 \geqslant 4$

เป็นไปไม่ได้

จะเห็นว่าทั้งกรณีที่ (1) และ (2) ให้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) ทั้งสองกรณีนั่นคือ $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ (ซึ่งเรียกว่าจำนวนอตรรกยะ)

3.4.3 ค่ารากและกำลังของจำนวนจริง

นิยาม 3.4.5 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a = b^n$ จะเรียก b ว่า "รากที่ n ของ a" (n^{th} root of a) และนิยมเขียนแทน b ด้วย สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$ (คือ $b = \sqrt[n]{a}$) โดยนิยมเขียนแทน $\sqrt[1]{a}$ ว่า a และนิยมเขียนแทน $\sqrt[2]{a}$ ด้วย $\sqrt{a}$

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง, และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเขียนได้ว่า

1) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

นิยาม 3.4.6 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว "กำลังที่ n ของ a" หรือ "a กำลัง n" ได้แก่ $a^n = a.a.\dots a$ (n แฟคเตอร์)

คุณสมบัติเกี่ยวกับกำลังของจำนวนจริง

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

1) $a^m \; a = a^{m+1}$
2) $a^m \; a^n = a^{m+n}$
3) $(a^m)^n = a^{mn}$
4) $(a.b)^m = a^m.b^m$
5) $(\frac{a}{b})^m = (\frac{a^m}{b^m})$
6) ถ้า $m \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$
7) ถ้า $a \neq 0$ แล้ว

(1) $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{ถ้า } m > n \\ 1 & \text{ถ้า } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{ถ้า } m < n \end{cases}$$

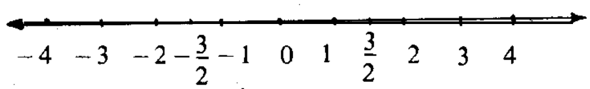
(2) $a^0 = 1$

หมายเหตุ คุณสมบัติที่กล่าวมาทั้ง 7 ข้อนี้ ถึงแม้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ยังเป็นจริงเสมอ อนึ่งเซ็ตของจำนวนจริงนั้นสามารถแสดงได้ดังแผนผังต่อไปนี้

- จำนวนจริง
  - จำนวนอตรรกยะ
  - จำนวนตรรกยะ
    - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม (เศษส่วนแท้ ๆ)
    - จำนวนเต็ม
      - จำนวนเต็มลบ
      - ศูนย์
      - จำนวนเต็มบวก

3.4.4 เส้นจำนวน (number line)

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งยาวเท่าไรก็ได้และเรียกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงว่าจุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางขวาของ 0 ให้แทน 1, 2, 3, ... โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางขวา (เลือกหน่วยความยาวมีหน่วยเป็นอะไรก็ได้) เป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, ... ตามลำดับ แล้วเลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางซ้ายของ 0 ให้แทน -1, -2, -3, ... โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, ... ตามลำดับ ดังรูป 3.4.3



รูป 3.4.3

ถ้ากำหนดจำนวนจริงใด ๆ มาให้แล้วจะมีจุดบนเส้นตรงนี้เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่แทนจำนวนนั้น ๆ เช่น $-\frac{3}{2}$ จะแทนด้วยจุดทางซ้ายของ 0 ซึ่งอยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง $\frac{3}{2}$ หน่วย เป็นต้น กล่าวคือ จุดทุกจุดบนเส้นตรงนี้ย่อมแทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเสมอ นั่นคือ จะได้เส้นตรงซึ่งจุดแต่ละจุดบนเส้นตรงนี้ถูกใช้แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งได้และเรียกเส้นตรงนี้ว่าเส้นจำนวน (number line)

3.4.5 การเขียนแสดงเซ็ตของจำนวนจริงด้วยภาพบนเส้นจำนวนและช่วง

ช่วง (interval) คือ เซ็ตใด ๆ ของจำนวนจริง ซึ่งอีลิเมนต์ของมันเรียงรายกันอยู่อย่างต่อเนื่อง เช่น เซ็ต $S = \{ x \mid x \in R \wedge 2 \leqslant x < 6 \}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนช่วง S นี้คือ [2, 6)

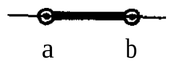
ในขณะเดียวกันจะสามารถแสดงเซ็ต $S = \{ x \mid x \in R \wedge 2 \leqslant x < 6 \}$ ได้ด้วยภาพบนเส้นจำนวน คือ

โดยจะเขียนวงกลมทึบ (●) ที่จุดซึ่งแทน 2 เพื่อแสดงว่า 2 เป็นอีลีเมนต์หนึ่งในเซ็ต S ส่วนจุดซึ่งแทน 6 นั้นเราเขียนวงกลมโปร่ง (O) รอบจุดนั้น เพื่อแสดงว่า 6 ไม่เป็นอีลีเมนต์ของเซ็ต S แล้วเขียนเส้นทึบเชื่อมระหว่าง 2 กับ 6 เพื่อแสดงว่าตรงนั้นคือเซ็ต S

หมายเหตุ $S = \{ x \mid x \in R \wedge 2 \leqslant x < 6 \}$ หมายความว่า S เป็นเซ็ตของจำนวนจริง x ซึ่ง x นั้นมากกว่าหรือเท่ากับ 2 แต่ต้องน้อยกว่า 6

การเขียนแสดงเซ็ตของจำนวนจริงด้วยภาพบนเส้นจำนวนและช่วงแบบต่าง ๆ

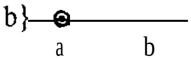
เซ็ต **เส้นจำนวน** **ช่วง**

$S_1 = \{x \mid x \in R \wedge a < x < b\}$


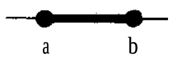
(a, b) เรียกว่าช่วงเปิด

$S_2 = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x < b\}$

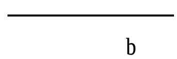

[a, b) เรียกว่าช่วงครึ่งเปิดทางขวา

$S_3 = \{x \mid x \in R \wedge a < a\, x \leqslant b\}$


(a, b] เรียกว่าช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย

$S_4 = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$


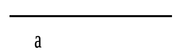
[a, b] เรียกว่า ช่วงปิด

$S_5 = \{x \quad x \in R \;\; Ax < b\}$


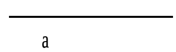
$(-\infty, b)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์

$S_6 = \{x \quad x \in R \;\; Ax \leqslant b\}$


$(-\infty, b]$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์

$S_7 = \{x \mid x \in R \;\; A \;\; a < x\}$


$(a, +\infty)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์

$S_8 = \{x \mid x \in R \wedge a \leqslant x\}$


$[a, +\infty)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์

$S_9 = \{x \quad x \in R\}$

$(-\infty, +\infty)$ เรียกว่าช่วงอนันต์

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จงเขียนช่วงและภาพบนเส้นจำนวนแสดงแทน

$$S = \{x \mid x \in R \wedge -3 < x \leqslant \frac{1}{2}\}$$

จาก $S = \{x \mid x \in R \; -3 < x \leqslant \frac{1}{2}\}$

ช่วงของเซ็ต S คือ $(-3, \frac{1}{2}]$

เส้นจำนวนที่แทนเซ็ต S คือ

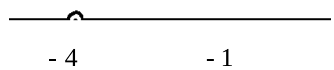
ตัวอย่างที่ 3.4.2 **จงเขียนเซ็ตแทนช่วง** $(-4, -1)$, $(-\infty, -3)$, $[2, +\infty)$

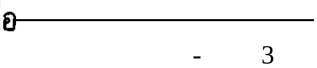
$(-4, -1)$ **หมายถึง** $\{x \mid x \in R \wedge -4 < x < -1\}$

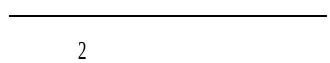
$(-\infty, -3)$ **หมายถึง** $\{x \mid x \in R \wedge x < -3\}$

$[2, +\infty)$ **หมายถึง** $\{x \mid x \in R \wedge 2 \leqslant x\}$

ตัวอย่างที่ 3.4.3 **จงเขียนภาพบนเส้นจำนวนแทนช่วง** $(-4, -1)$, $(-\infty, -3)$ $[2, +\infty)$

ช่วง $(-4, -1)$ **คือ** 

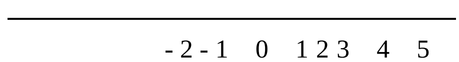
ช่วง $(-\infty, -3)$ **คือ** 

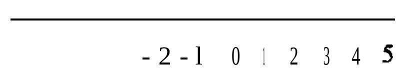
ช่วง $[2, +\infty)$ **คือ** 

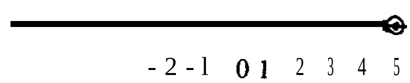
ตัวอย่างที่ 3.4.4 **ให้** $A = (1, 3)$, $B = (-2, 4]$, $C = [3, 5)$, $D = [0, 5]$

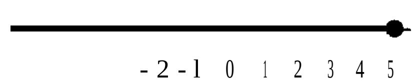
จงหา 1) $A \cup B$ 2) $B \cap D$ 3) $C - B$ 4) $A - D$ 5) $B \cap C$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

A $= (1, 3) = \{x \mid x \in R \wedge 1 < x < 3\}$ 

B $= (-2, 4] = \{x \mid x \in R \wedge -2 < x \leqslant 4\}$ 

C $= [3, 5) = \{x \mid x \in R \wedge 3 \leqslant x < 5\}$ 

D $= [0, 5] = \{x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x \leqslant 5\}$ 

ดังนั้น

1) $A \cup B = (1, 3)\ U\ (-2, 4] = (-2, 4]$

2) $B \cap D = (-2, 4] \cap [0, 5] = [0, 4]$

3) $C - B = [3, 5) - (2, 4] = (4, 5]$

4) $A - D = (1, 3) - [0, 5) = 0$

5) $B\ n\ C = (-2, 4]\ n\ [3, 5] = [3, 4]$

แบบฝึกหัด 3.4

1) จงหาเซ็ตของขอบเขตข้างบน, เซ็ตของขอบเขตข้างล่าง, ขอบเขตข้างบนต่ำสุด, ขอบเขตข้างล่างสูงสุด ของเซ็ต S ต่อไปนี้

1.1) $S = \{ x \mid x \in R \wedge -10 \leqslant x < -5 \}$

1.2) $S = \{ x \mid x \in R \wedge -2 \leqslant x \leqslant 6 \}$

1.3) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in N \}$

1.4) $S = \{ \frac{1}{n+5} \mid n \in N \}$

1.5) $S = \{ \frac{n}{n+2} \mid n \in N \}$

2) จงเขียนภาพบนเส้นจำนวนและช่วงแทนเซ็ตต่อไปนี้

2.1) $\{ x \mid x \in R \wedge 2 < x < 3 \}$

2.2) $\{ x \mid x \in R \wedge -1 < x \leqslant 4 \}$

2.3) $\{ x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x \leqslant 2 \}$

2.4) $\{ x \mid x \in R \wedge -3 \leqslant x < -1 \}$

2.5) $\{ x \mid x \in R \wedge x < 0 \}$

2.6) $\{ x \mid x \in R \wedge -2 \leqslant x \}$

2.7) $\{ x \mid x \in R \wedge x \leqslant -5 \}$

2.8) $\{ x \mid x \in R \wedge 0 < x \}$

3) จงเขียนเซ็ตแสดงภาพบนเส้นจำนวนของช่วงต่อไปนี้

3.1) $(-1, 0)$

3.2) $(-1, +\infty)$

3.3) $(-\infty, -5)$

3.4) $[2, 5]$

3.5) $[-2, 3)$

3.6) $[3, +\infty)$

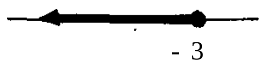
3.7) $(-\infty, 4]$

3.8) $(1, 2]$

3.9) $(-\infty, +\infty)$

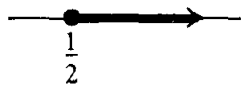
4) จงเขียนช่วงและเซ็ตของภาพบนเส้นจำนวนต่อไปนี้

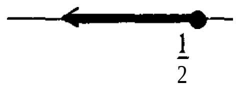
4.1) 

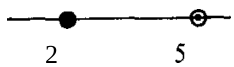
4.2) 

4.4) 

4.5) 

4.6) 

4.7) 

4.8) 

5) ให้ $A = (1, 4)$, $B = [3, 6]$ จงหา

5.1) A U B

5.2) $A \cap B$

5.3) $A - B$

5.4) B - A

5.5) A U A

5.) $B \cap B$

6) จงหาช่วงต่อไปนี้

6.1) $(1, 3) \cap [2, 3]$

6.2) $(1, 4) \cap (-2, 2]$

6.3) $(0, 3] \cap (-3, 2)$

6.4) $[2, 4] \cap (1, 31$

6.5) $(1, 5) \cap [6, 9]$ 6.8) $(1, 6] \cup [2, 5)$

6.6) $[1, 4] \cup (2, 5]$ 6.9) $(1, 3) - [2, 5]$

6.7) $[2, 3) \cup (4, 5]$ 6.10) $[2, 5] - (1, 3)$

7) ค่ารากที่สองของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 10 มีจำนวนที่เป็นจำนวนอตรรกยะกี่จำนวน อะไรบ้าง?

3.5 ทศนิยม

ต่อไปเราจะศึกษาเรื่องทศนิยมเพื่อนำไปประกอบการพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะ จำนวนใดเป็นจำนวนอตรรกยะ โดยทั่ว ๆ ไปจะแบ่งทศนิยมออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. **ทศนิยมรู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนที่สิ้นสุด เช่น 0.1, 0.132, 1.25 เป็นต้น

2. **ทศนิยมไม่รู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนที่ไม่สิ้นสุด ซึ่งแบ่งได้ 2 พวกคือ

2.1) ทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ ได้แก่ทศนิยมที่ตัวเลขตัวหนึ่งหรือมากกว่านั้นเกิดซ้ำหรือวนเวียนอยู่เสมอ เช่น 0.333....., 0.232323....., 1.125311253112531... (อนึ่ง บางทีก็จัดเอาพวกทศนิยมรู้จบไว้เป็นพวกเดียวกันกับทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ ทศนิยมรู้จบก็คือ ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ โดยตัวซ้ำคือ-"0" นั่นเอง เช่น 1.25 อาจเขียนเป็น 1.25000.... ก็ได้)

2.2) ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ ได้แก่ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมมากมายไม่สิ้นสุด โดยไม่มีการซ้ำแบบวนเวียนตลอดไป เช่น 0.1010010001...-1.7320451.... เป็นต้น

เนื่องจากจำนวนตรรกยะในรูป $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ จะสามารถทำเป็นทศนิยมได้โดยการตั้งหาร (คือเอาส่วนไปหารเศษ) และจำนวนตรรกยะกับทศนิยมเกี่ยวข้องกันคือ "จำนวนตรรกยะสามารถเขียนเป็นทศนิยมได้โดยจะเป็นทศนิยมประเภทรู้จบหรือ

ประเภทไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น” เช่น $\frac{1}{2} = 0.5, \frac{1}{3} = 0.333......$ เป็นต้น ซึ่งทั้ง $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{3}$ ต่างก็เป็นจำนวนตรรกยะโดย $\frac{1}{2}$ เขียนเป็นทศนิยมได้เป็นทศนิยมรู้จบและ $\frac{1}{3}$ ก็เขียนเป็นทศนิยมได้โดยเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ

ดังนั้น “จำนวนอตรรกยะ ถ้าเขียนเป็นทศนิยมแล้วจะต้องเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ” ฉะนั้น ถ้าต้องการพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะก็อาจพิจารณาได้โดยเขียนแสดงจำนวนนั้นเป็นทศนิยมแล้วพิจารณาว่าเป็นทศนิยมแบบใด ถ้าเป็นทศนิยมรู้จบหรือไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำก็แสดงว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนตรรกยะ ถ้าได้ เป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำก็กล่าวได้ว่าจำนวนนั้นก็คือจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 3.5

1. จงเขียนจำนวนตรรกยะต่อไปนี้ด้วยทศนิยม

   1.1) $\frac{1}{25}$

   1.2) $\frac{4}{2}$

   1.3) $\frac{22}{15}$

   1.4) $\frac{3}{48}$

   1.5) $\frac{26}{111}$

   1.6) $\frac{22}{7}$

2. จงพิจารณาว่าทศนิยมต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

2.1)	0.01010101...	2.7)	7.767766777666...
2.2)	0.112112112...	2.8)	3.25
2.3)	0	2.9)	−4.2000...
2.4)	0.191919...	2.10)	1.0000001
2.5)	0.1001000100001...		
2.6)	0.1211211121112...		

3.6 อสมการและการแก้สมการ

นิยาม 3.6.1

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $x - y < 0$ และ $x > y$ ก็ต่อเมื่อ $x - y > 0$

ข้อสังเกต จากนิยาม 3.6.1 ถ้ากล่าวว่า x เป็นจำนวนจริง ($x \in R$) แล้วย่อมหมายถึง $x < 0$ หรือ $x = 0$ หรือ $x > 0$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญบางประการของอสมการ ซึ่งจะนำไปใช้ในการแก้อสมการ

กำหนดให้ x, y, z, w เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1) สำหรับ x, y ใด ๆ จะได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $x > y$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

2) ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

3) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

4) ถ้า $x < y$ และ $z > 0$ แล้ว $xz < yz$ และ $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$

5) ถ้า $x < y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz > yz$ และ $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

6) ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $xy > 0$ และ $x + y > 0$

7) $xy < 0$ ก็ต่อเมื่อ ($x > 0$ และ $y < 0$) หรือ ($x < 0$ และ $y > 0$) เท่านั้น

8) $xy > 0$ ก็ต่อเมื่อ ($x > 0$ และ $y > 0$) หรือ ($x < 0$ และ $y < 0$) เท่านั้น

9) $x < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x} < 0$

10) $x > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x} > 0$

11) ถ้า $x > y > 0$ และ $z > w > 0$ แล้ว $xz > yw$

12) ถ้า $x < y$ และ $z < w$ แล้ว $x + z < y + w$

13) $x \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 > 0$

14) ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $0 < x^2 < y^2$ และ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$

15) ถ้า $x < y$ แล้ว $-y < -x$

การแก้อสมการ ก็คือการหาเซ็ตคำตอบของจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้ การแก้อสมการสามารถทำได้โดยการใช้สมบัติทั้ง 15 ข้อดังกล่าวแล้ว

ตัวอย่าง 3.6.1

จงหาค่า x จาก $3x - 4 < 5$

วิธีทำ

จาก $3x - 4 < 5$

บวกด้วย 4 ทั้งสองข้างได้ $3x < 9$

เอา 3 หารทั้งสองข้างได้ $x < 3$

เซ็ตของคำตอบ คือ $\{ x \mid x < 3\}$ หรือ $(-\infty, 3)$

ตัวอย่างที่ 3.6.2

จงหาค่า x จากสมการ $\frac{x-2}{5} \leqslant x + 6$

วิธีทำ

จาก $\frac{x-2}{5} \leqslant x + 6$

$$x - 2 \leqslant 5x + 30$$

$$-4x \leqslant 32$$

$$\therefore x \geqslant -8$$

เซ็ตคำตอบคือ $\{ x|x \geqslant -8 \}$ หรือ $[-8, +\infty)$

ตัวอย่างที่ 3.6.3 จงแก้อสมการ $\frac{x}{x-4} > 3$

วิธีทำ

จาก $\frac{x}{x-4} > 3$

$$\therefore \quad \frac{x}{x-4} - 3 > 0$$

$$\frac{x-3(x-4)}{x-4} > 0$$

$$\frac{-2x+4}{x-4} > 0$$

$$-\frac{(2x-4)}{x-4} > 0$$

$$\therefore \quad \frac{2x-4}{x-4} < 0$$

แสดงว่า $2x - 4$ กับ $x - 4$ ต้องมีเครื่องหมายต่างกัน โดย $x \neq 4$ ซึ่งจะแบ่งได้ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $2x - 4 < 0$ และ $x - 4 > 0$

$\therefore$ $x < 2$ และ $x > 4$

ในกรณีนี้ไม่มีค่า x ที่สอดคล้อง

กรณีที่ 2 $2x - 4 > 0$ และ $x - 4 < 0$

$\therefore$ $x > 2$ และ $x < 4$

ในกรณีนี้ เซ็ตคำตอบคือ $\{ x | 2 < x < 4 \}$

จากทั้งสองกรณีเรานำมาผนวก (union) กัน จะได้เซ็ตคำตอบคือ $\{ x | 2 < x < 4 \}$ คือ $(2, 4)$

ตัวอย่างที่ 3.6.4 จงแก้อสมการ $2x - x^2 \leqslant -8$

วิธีทำ

จาก $\quad 2x - x^2 \leqslant -8$

$$-2x + x^2 \geqslant 8$$

$$x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$$

$$(x - 4)(x + 2) \geqslant 0$$

ดังนั้น $x - 4$ กับ $x + 2$ มีเครื่องหมายเหมือนกันหรือเท่ากับ 0 (ศูนย์) ซึ่งจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $x - 4 \geqslant 0$ และ $x + 2 \geqslant 0$

$\therefore$ $x \geqslant 4$ และ $x \geqslant -2$

ในกรณีนี้เซตคำตอบคือ $\{ x|x \geqslant 4 \}$ หรือ $[4, +\infty)$

กรณีที่ 2 $x - 4 \leqslant 0$ และ $x + 2 \leqslant 0$

$\therefore$ $x \leqslant 4$ และ $x \leqslant -2$

ในกรณีนี้เซ็ตคำตอบคือ $\{ x|x \leqslant -2 \}$ หรือ $(-\infty, -2]$)

จากทั้ง 2 กรณี เรานำมาผนวก (union) กันจะได้เซ็ตคำตอบของสมการ

คือ $\{ x|x \leqslant -2 \} \cup \{ x|x \geqslant 4 \}$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาค่าของ x ถ้า $4x - 9 < 15$
2. จงหาค่าของ x ถ้า $7 < 2x - 3$
3. จงหาค่าของ x ถ้า $5x + 2 < 4x - 3$
4. จงหาค่าของ x ถ้า $3x - 3 < 5x + 11$
5. จงหาค่าของ x ถ้า $x^2 + 4x \; 6 \; 5$
6. จงหาค่าของ x ถ้า $(x - 2)^2 \leqslant 7$
7. จงหาค่าของ x ถ้า $\frac{x + 1}{x - 1} \leqslant 1$
8. จงหาค่าของ x ถ้า $13 \geqslant 2x - 3 \geqslant 5$
9. จงหาค่าของ x ถ้า $\frac{3x}{x - 1} \; (\; \frac{5 - x}{x - 4}$
10. จงหาค่าของ x ถ้า $(x - 3)(x + 5)(x - 1) < 0$

3.7 ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนจริง

นิยาม 3.7.1 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|x|$ คือ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เช่น $|5| = 5, |-5| = -(-5) = 5, |0| = 0$

จะสังเกตเห็นว่า ค่าสัมบูรณ์ของ x นั้น จะบอกให้ทราบว่าจำนวนจริง x อยู่ห่างจากจุด 0 (ศูนย์) เท่าใด โดยไม่คำนึงถึงว่า x จะอยู่ทางซ้ายหรือทางขวาของ 0

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $|x| \geqslant 0$
2) $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3) $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4) $|x| = \sqrt{x^2}$
5) $|x| = |-x|$
6) $|x - y| = |y - x|$
7) $|xy| = |x|\,|y|$
8) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
9) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
10) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$
11) $|x - y| \geqslant |y| - |x|$
12) ถ้า $a \geqslant 0$ แล้ว $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$
13) ถ้า $a \geqslant 0$ แล้ว $|x| \geqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geqslant a$ หรือ $x \leqslant -a$

ตัวอย่าง 3.7.1 จงหาค่า x จาก $|2x - 1| = 7$

วิธีทำ

จาก $|2x - 1| = 7$ สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $\quad 2x-1 = 7$

$$2x = 8$$

$$\therefore x = 4$$

กรณีที่ 2 $\quad -(2x-1) = 7$

$$-2x+1 = 7$$

$$-2x = 6$$

$$\therefore x = -3$$

ดังนั้น รากของสมการ $|2x-1| = 7$ คือ $x = -3$ หรือ $x = 4$

นั่นคือ เซตคำตอบ คือ $\{-3, 4\}$

ตัวอย่างที่ 3.7.2 จงหาค่ารากของสมการ $|2x-1| = |4x+3|$

วิธีทำ

จาก $|2x-1| = |4x+3|$ สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $\quad 2x-1 = 4x+3$

$$\therefore 2x-4x = 3+1$$

$$-2x = 4$$

$$\therefore x = -2$$

กรณีที่ 2 $\quad 2x-1 = -(4x+3)$

$$= -4x-3$$

$$6x = -2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น ค่ารากของสมการ $|2x-1| = |4x+3|$ คือ $x = -2, -\frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 3.7.3 จงหาค่ารากของอสมการ $|2x-9| \leqslant 5$

วิธีทำ

จาก $|2x-9| \leqslant 5$ จะได้

$$\therefore -5 \leqslant 2x-9 \leqslant 5$$

เอา 9 บวกตลอด จะได้

$4 \leqslant 2x \leqslant 14$

เอา 2 หารตลอด จะได้

$2 \leqslant x \leqslant 7$

ดังนั้น ค่ารากของอสมการ $|2x - 9| \leqslant 5$ ก็คือ $\{ x | 2 \leqslant x \leqslant 7 \}$

ตัวอย่างที่ 3.7.4 จงหาค่ารากของ $|2x - 9| \geqslant 5$

วิธีทำ

จาก $|2x - 9| \geqslant 5$ จะได้

$2x - 925$ หรือ $2x - 9 \leqslant -5$

$\therefore \; 2x \geqslant 14$ หรือ $2x \leqslant 4$

$\therefore \; x \geqslant 7$ หรือ $x \leqslant 4$

ดังนั้น ค่ารากคือ $\{ x | x \leqslant 4 \} \cup \{ x | x \geqslant 7 \}$ หรือ $(-\infty, 4] \cup [7, +\infty)$

ตัวอย่างที่ 3.7.5 จงแก้อสมการ $\left| \frac{x-1}{x} \right| < 2$ เมื่อ $x \neq 0$

วิธีทำ

จาก $\left| \frac{x-1}{x} \right| < 2$ จะได้

$-2 < \frac{x-1}{x} < 2$

ซึ่งสามารถแยกการพิจารณาได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $x > o$ จะได้

$-2x < x - 1 < ix$

นั้นคือ $-2x < x - 1$ และ $x - 1 < 2x$

$-3x < -1$ และ $-x < 1$

$3x > 1$ และ $x > -1$

$x > \frac{1}{3}$ และ $x > 1$

เพราะฉะนั้น $x > \frac{1}{3}$

กรณีที่ 2 ถ้า $x < 0$ จะได้

$-2x > x - 1 > 2x$

นั่นคือ $-2x > x - 1$ และ $x - 1 > 2x$

$-3x > -1$ และ $-x > 1$

$x < \frac{1}{3}$ และ $x < -1$

เพราะฉะนั้น $x < -1$

จากทั้ง 2 กรณี จึงได้ว่า

ค่ารากของอสมการนี้ คือ $\{ x|x < -1 \} \cup \{ x|x > \frac{1}{3} \}$

หรือ $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

แบบฝึกหัดที่ 3.7

1. จงหาค่าของ

1.1) $\lvert -5 \rvert$	1.2) $\lvert -10 + 14 \rvert$
1.3) $\lvert -2(6) \rvert$	1.4) $\lvert -12 \rvert + \lvert 5 \rvert$
1.5) $\lvert -4 \rvert + \lvert -3 \rvert$	1.6) $4 - \lvert -5 \rvert$
1.7) $-4 - \lvert -5 \rvert$	1.8) $\lvert -4 + 2 \quad 8 \rvert$

2. จงหาค่าของ x เมื่อกำหนดว่า

2.1) $\lvert x \rvert = 4$	2.2) $\lvert x \rvert = 0$
2.3) $\lvert x \rvert = -3$	2.4) $\lvert x - 3 \rvert = 2$
2.5) $\lvert x \rvert < 2$	2.6) $\lvert x - 2 \rvert \leqslant 4$
2.7) $\lvert x \rvert = x + 1$	2.8) $\lvert x \rvert = x - 1$

3. จงหาค่าของ x ในเซ็ต A, B, C, D ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

3.1) $A = \{ x \mid \lvert x \rvert < 10 \}$

3.2) $B = \{ x \mid \lvert 2x + 7 \rvert < 9 \}$

3.3) $c = \{ x \mid (2x - 3\rvert = 4 \}$

3.4) $D = \{ x \mid \lvert x - 2 \rvert < 0 \}$

4. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ

4.1) ถ้า $x < y$ แล้ว $|x - y| = ?$

4.2) ถ้า $x + y < z$ แล้ว $|x + y - z| = ?$

4.3) ถ้า $x + y < z$ แล้ว $|z - x - y| = ?$

4.4) ถ้า $x < y + z$ แล้ว $|x - y - z| = ?$

4.5) ถ้า $|x - y| = y - x$ แล้ว จงหาความสัมพันธ์ของ x กับ y

4.6) ถ้า $|x - y| = x - y$ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

4.7) ถ้า $|x - y| = 0$ แล้ว จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

5. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

5.1) $|x + 4| < 7$

5.2) $|2x \quad 5| < 3$

5.3) $|3x - 4| \leq 2$

5.4) $|2x - 5| > 3$

5.5) $|6 - 2x| \geq 7$

5.6) $|x + 4| \leq |2x - 6|$

5.7) $|3 + 2x| < |4 - x|$

5.8) $|3x| > |6 - 3x|$

5.9) $|9 - 2x| \geq |4x|$

5.10) $|4x + 7| = 7$

5.11) $|3x - 8| = 4$

5.12) $|5 - 2x| = 11$

5.13) $|4 + 3x| = 1$

5.14) $|5x - 3| = |3x + 5|$

5.15) $|x - 2| = |3 - 2x|$

5.16) $|7x| = 4 - x$

5.17) $2x + 3 = |4x + 5|$

5.18) $|x| < 3 - 2x$

5.19) $\left| \frac{x - 2}{x} \right| \leq 2$