บทที่ 2
ผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์และกราฟ

2.1 คู่อันดับ (Ordered pairs)

สำหรับอีลีเมนต์ x และ y ใด ๆ เราเรียก (x, y) ว่า "คู่อันดับของ x กับ y" มักอ่านว่า "คู่อันดับ (x, y)" สิ่งสำคัญของคู่อันดับก็คือ จะต้องเป็น "คู่" และมี "อันดับ" นั่นคือ คู่อันดับแต่ละคู่ ย่อมประกอบด้วยอีลีเมนต์สองตัว (คือเป็นคู่) ได้แก่ **ตัวหน้ากับตัวหลัง** ตัวหน้าคือ x เราเรียก x ว่า ส่วนประกอบที่หนึ่ง (first component) และตัวหลังคือ y เราเรียก y ว่า **ส่วนประกอบที่สอง** (second component) ของคู่อันดับ (x, y) ในการเป็นส่วนประกอบที่หนึ่ง (ตัวหน้า) กับส่วนประกอบที่สอง (ตัวหลัง) คือ "อันดับ" นั้นมีความสำคัญมาก การสลับกันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและที่สอง จะทำให้ความหมายเปลี่ยนไปจากเดิม เช่น ถ้าเราจับ "คู่" กันระหว่างสามี กับภรรยาแล้ว เขียนเป็นสัญลักษณ์คู่อันดับได้คือ (ทึ่ม, สะดิ้ง) เราจะถือว่า ส่วนประกอบที่หนึ่ง (ตัวหน้า) เป็นสามี และส่วนประกอบที่สอง (ตัวหลัง) เป็นภรรยา นั่นคือเราจะได้ว่า "นายทึ่มเป็นสามี นางสะดิ้งเป็นภรรยา" แต่ถ้าเราสลับที่เป็น (สะดิ้ง, ทึ่ม) จะได้ความหมายที่ผิดไปจากเดิม คือกลายเป็น "นางสะดิ้งเป็นสามี นายทึ่มเป็นภรรยา" ดังนั้น จึงถือว่า "อันดับ" ของส่วนประกอบที่หนึ่งกับที่สองมีความสำคัญมาก

นิยาม 1.1 สำหรับคู่อันดับ (a, b) กับ (c, d) ใด ๆ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ข้อสังเกต (1) ถ้า $a \neq b$ แล้ว $(a, b) \neq (b, a)$

(2) คู่อันดับ (a, b) สามารถให้นิยามแบบเคร่งครัดได้เป็น

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

แบบฝึกหัด 2.1

1) จงอธิบายถึงความแตกต่างระหว่าง $(1, 2)$, $\{1, 2\}$ และ $\{(1, 2)\}$

2) จงหาค่าของ x และ y ถ้า $(2x, y + 3) = (4, 2)$

3) จงหาค่าของ x และ y ถ้า $(2x - y, 3x + y) = (10, 5)$

2.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)

นิยาม 2.2.1 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต A และเซ็ต B คือ เซ็ตของทุกคู่อันดับ (x, y) เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$

ตัวอย่างที่ 2.2.1 ให้ $A = \{a, b\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ แล้วจะได้ว่า

1) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
2) $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
3) $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
4) $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

ข้อสังเกต

1) โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$
2) ถ้า A และ B มีสมาชิกจำนวน m และ n ตัว ตามลำดับแล้ว จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ และ $B \times A$ ย่อมเท่ากับ mn

ทฤษฎีบท 2.2.1 สำหรับเซ็ต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $A \neq \varnothing$ และ $B \neq \varnothing$ แล้ว $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

ทฤษฎีบท 2.2.2 สำหรับเซ็ต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

$A \times B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$

ทฤษฎีบท 2.2.3 สำหรับเซ็ต A, B และ C ใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \times C \subseteq B \times C$

ตัวอย่าง 2.2.2

ให้ $A \subseteq B$ โดย $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

ถ้าให้ $C = \{a, b\}$ จะได้ว่า

$A \times C = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

และ $B \times C = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

ซึ่งจะเห็นว่า $A \times C \subseteq B \times C$

ทฤษฎีบท 2.2.4 สำหรับเซ็ต A, B, C และ D ใด ๆ จะได้ว่า

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

ตัวอย่าง 2.2.3

ให้ $A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

และ $D = \{3, 4, 5\}$

จะได้ว่า

1. $\because B \cap C = \{2, 4\}$

$\therefore A \times (B \cap C) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$

และ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times C = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$

จะเห็นว่า $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A' \times C)$

2. $\because B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6)\}$

และ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2),$
$(2, 3), (2, 4)\}$

$A \times C = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6)\}$

จะเห็นว่า $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. $\because A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

และ $C \times D = \{ (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

$\therefore (A\times B) \cap (C\times D) = \{ (2, 3), (2, 4) \}$

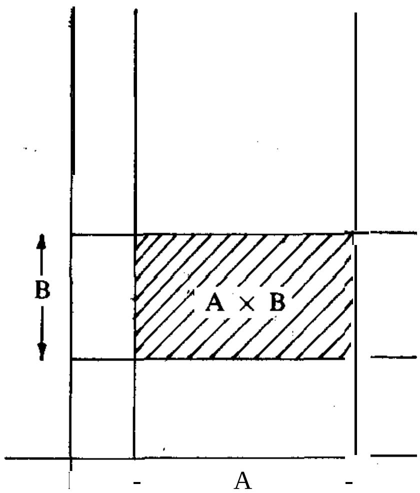
$\because A \cap C = \{ 2 \}$

และ $B \cap D = \{ 3, 4 \}$

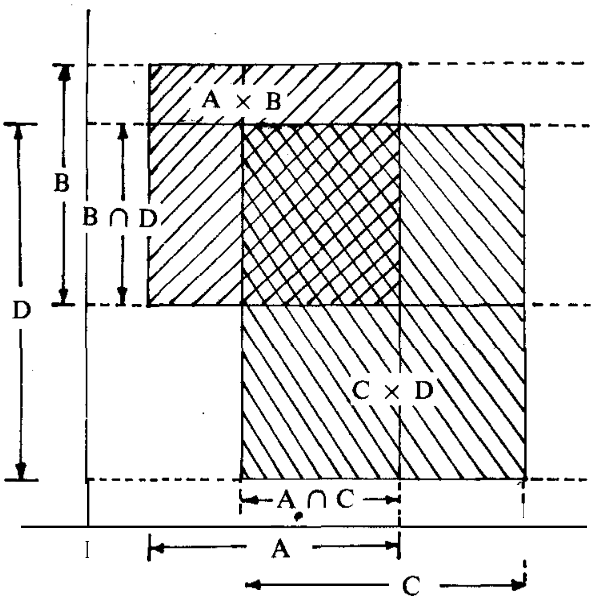
$\therefore (A\cap C)\times(B\cap D) = \{ (2, 3), (2, 4) \}$

จะเห็นว่า $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

เราอาจเขียนแผนภาพแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ตสองเซ็ต โดยกำหนดให้เป็นแผนภาพโคออร์ดิเนตในระบบคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตในระนาบคือ เมื่อมีเซ็ตสองเซ็ต ให้เซ็ตหนึ่งอยู่บนแกนนอน อีกเซ็ตหนึ่งอยู่บนแกนตั้ง ถ้าต้องการจะแทนเซ็ต $A \times B$ ด้วยภาพก็อาจให้ A อยู่บนแกนนอน และเซ็ต B อยู่บนแกนตั้ง ลากเส้นขนานกับแกนตั้งให้ผ่านจุดในเซ็ต A และลากเส้นขนานกับแกนนอนให้ผ่านจุดในเซ็ต B จุดตัดของเส้นขนานเหล่านั้นแทนสมาชิกของเซ็ต $A \times B$ ดังรูป 2.2.1 a และ 2.2.1 b



รูป 2.2.1 a แสดง $A \times B$



รูป **2.2.1 b**

แสดง $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

นิยาม 2.2.2 (ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ตหลายเซ็ต)

สำหรับเซ็ต $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ใดๆผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ คือ เซ็ตซึ่งประกอบด้วย $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ โดยที่ $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

นั่นคือ $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n\}$

ตัวอย่างที่ 2.2.4 ให้ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ และ $C = \{5, 6\}$

แล้ว $A \times B \times C = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\}$

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ให้ $A = \{T, F\}$ แล้ว

$A \times A \times A = \{(T, T, T), (T, T, F), (T, F, T), (T, F, F), (F, T, T), (F, T, F), (F, F, T), (F, F, F)\}$

นิยาม 2.2.3 สำหรับ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ที่อยู่ใน $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ จะได้ว่า

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$$

หมายเหตุ

เราเรียก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ว่า ordered **n-tuple**

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ $A = \{a, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, b\}$ จงหา

1.1) $A \times B$

1.2) $B \times A$

1.3) $A \times C$

1.4) $C \times A$

1.5) $B \times C$

3 1.6) $C \times B$

1.7) $A \times A$

1.8) $B \times B$

1.9) $c \times c$

1.10) $A \times (B \cap C)$

1.11) $(A \times B) \cap (A \times C)$

1.12) $A \times (B \cup C)$

1.13) $(A \times B) \cup (A \times C)$

1.14) $C \times (A \cup B)$

1.15) $(A \cup B) \times C$

1.16) $(A \cap B) \times C$

1.17) $(B \times B) \cap (C \times C)$

1.18) $(A \times A) \cup (C \times C)$

1.19) $(A \times C) \cap (B \times B)$

1.20) $(A \times A) \times A$

1.21) $(A \times B) \times C$

1.22) $A \times (B \times C)$

1.23) $(A - B) \times C$

1.24) $(A - B) \times (B - C)$

1.25) $(A - A) \times B$

1.26) $(A \cap C) \times (B \cup C)$

1.27) $(A \times A) \times B$

1.28) $(C - B) \times (A \cap B)$

1.29) $(A \cap B) \times (A \cap C)$

1.30) $(A - B) \times (B - A)$

2. ถ้า A เป็นเซ็ตที่มีสมาชิก 4 ตัว และ B เป็นเซ็ตที่มีสมาชิก 6 ตัว จงหาจำนวนสมาชิกของ

2.1) $A \times A$

2.2) $A \times B$

2.3) $B \times A$

2.4) $B \times B$

2.3 กราฟ

นิยาม 2.3.1 เซ็ตของคู่ลำดับใด ๆ เราเรียกรวม ๆ ว่า กราฟ (graph) หรือพูดอีกอย่างหนึ่งกราฟ ก็คือ เซ็ตย่อยของ $u \times u$ เมื่อ u คือ เอกภพสัมพัทธ์

นิยาม 2.3.2 ถ้า G เป็นกราฟแล้ว G^{-1} ซึ่งกำหนดโดย

$G^{-1} = \{ (x, y) : (y, x) \in G \}$ เป็นกราฟด้วย

และ $(x, y) \in G^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $(y, x) \in G$

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ให้ $G = \{ (1, 2), (3, 4), (5, 6) \}$ แล้ว

$$G^{-1} = \{ (2, 1), (4, 3), (6, 5) \}$$

นิยาม 2.3.3 ถ้า G และ H เป็นกราฟแล้ว $G \circ H$ ซึ่งกำหนดโดย

$G \circ H = \{ (x, y) : \exists z\, [(x, z) \in H \wedge (z, y) \in G]\}$ เป็นกราฟด้วย

และ $(x, y) \in G \circ H$ ก็ต่อเมื่อ $\exists z\, [(x, z) \in H \wedge (z, y) \in G]$

ตัวอย่างที่ 2.3.2:

ให้ $G = \{ (1, a), (2, c), (3, b), (4, a), (2, b) \}$

และ $H = \{ (a, 3), (b, 2), (a, 4), (c, 1), (b, 4) \}$

แล้ว $G \circ H = \{ (a, b), (b, c), (b, b), (a, a), (c, a), (b, a) \}$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 จากตัวอย่าง 2.3.2 จะได้ว่า

$$(H \circ G)^{-1} = \{ (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4), (2, 2), (4, 2) \}$$

$$H^{-1} = \{ (3, a), (2, b), (4, a), (1, c), (4, b) \}$$

$$G^{-1} = \{ (a, 1), (c, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 2) \}$$

ซึ่งจะได้ว่า $H^{-1} \circ G^{-1} = \{ (3, 1), (3, 4), (2, 3), (2, 2), (4, 1), (4, 4), (1, 2), (4, 3), (4, 2) \}$

นั่นแสดงว่า $(H \circ G)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

นิยาม 2.3.4 สำหรับ กราฟ G ใด ๆ โดเมน (domain) ของ G หมายถึง เซ็ต

$D_G = \{ x : \exists y [(x, y) \in G] \}$

และพิสัย (range) ของ G หมายถึงเซ็ต

$R_G = \{ y : \exists x [(x, y) \in G] \}$

นั่นคือ $x \in D_G$ ก็ต่อเมื่อ $\exists y [(x, y) \in G]$

และ $y \in R_G$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x [(x, y) \in G]$

จากนิยามข้างต้น จึงอาจกล่าวได้ว่า โดเมนของ G หรือเซ็ต D_G ก็คือ เซ็ตของส่วนประกอบตัวแรก (first component) ของทุกคู่ลำดับใน G และพิสัยของ G หรือเซ็ต R_G ก็คือเซ็ตของส่วนประกอบตัวที่สอง (second component) ของทุกคู่ลำดับใน G นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.3.4 ให้ G = { (1, a), (2, c), (3, b), (4, a), (2, b) }

ดังนั้น $D_G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

และ $R_G = \{ a, b, c \}$

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า G และ H เป็นกราฟแล้ว

1) $D_G = R_{G^{-1}}$ 2) $R_G = D_{G^{-1}}$

3) $D_{G \circ H} \subseteq D_H$ 4) $R_{G \circ H} \subseteq R_G$

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ให้ G = { (1, a), (2, c), (3, b), (4, a), (2, b), (6, d) }

และ H = { (a, 3), (b, 2), (a, 4), (c, 1), (b, 4), (d, 5) }

แล้วได้ว่า $G \circ H$ = { (a, b), (b, c), (b, b), (a, a), (c, a). (b, a) }

G^{-1} = { (a, 1), (c, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 2) }

H^{-1} = { (3, a), (2, b), (4, ah (1, c), (4, b) }

จะสังเกตเห็นว่า

1) $D_G = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_{G^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore D_G = R_{G^{-1}}$

2) $R_G = \{a, b, c\}$

$D_{G^{-1}} = \{a, b, c\}$

$\therefore R_G = D_{G^{-1}}$

3) $D_{G \circ H} = \{a, b, c\}$

$D_H = \{a, b, c, d\}$

$\therefore D_{G \circ H} \subseteq D_H$

4) $R_{G \circ H} = \{a, b, c\}$

$R_G = \{a, b, c, d\}$

$\therefore R_{G \circ H} \subseteq R_G$

แบบฝึกหัด 2.3

ให้ $G = \{ (a, b), (b, c), (c, c), (c, d) \}$

และ $H = \{ (b, a), (c, b), (d, c) \}$

จงหา

1) G^{-1}	2) H^{-1}
3) $G \circ H$	4) $H \circ G$
5) $(G \circ H)^{-1}$	6) $H^{-1} \circ G^{-1}$
7) $(H \circ G)^{-1}$	8) $G^{-1} \circ H^{-1}$
9) $(G \cup H)^{-1}$	10) $(G \cap H)^{-1}$
11) $H^{-1} \circ G$	12) $G^{-1} \circ H$
13) $H \circ G^{-1}$	14) $G \circ H^{-1}$
15) $G \circ (H \circ G)$	16) $H \circ (G \circ G)$
17) $D_{G \circ H}$	18) D_H
19) $R_{G \circ H}$	20) R_G

2.4 **ความสัมพันธ์** (relation)

โดยปกติแล้ว เรามักเคยเห็นตัวอย่างของความสัมพันธ์กันมาบ้างแล้วทุกคน เช่น x เป็นพี่ของ y, x เป็นสามีของ y, x น้อยกว่า y เป็นต้น ในแต่ละกรณีที่กล่าวถึงนั้น จะสังเกตได้ว่ามีความสัมพันธ์บางอย่างระหว่าง x กับ y เช่น

"x เป็นพี่ของ y" บอกความสัมพันธ์ "การเป็นพี่-น้อง"

"x เป็นสามีของ y" บอกความสัมพันธ์ "การเป็นสามี-ภรรยา" เป็นต้น

เราอาจเขียนแทน "x เป็นพี่ของ y" ด้วย ประโยคเปิด $P(x, y)$ และอาจเขียนแทน "x เป็นสามีของ y" ด้วย ประโยคเปิด $Q(x, y)$ ซึ่งทั้งประโยคเปิด $P(x, y)$ และ $Q(x, y)$ นี้ ก็แสดงถึงความสัมพันธ์ของตัวแปร x กับ y ซึ่งเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y) นั่นเอง จึงให้นิยามของความสัมพันธ์ ดังนี้

นิยาม 2.4.1 ความสัมพันธ์ (relation) ก็คือ เซ็ตของคู่อันดับ

โดยหลักการกำหนดเซ็ตแล้ว เราอาจจะพิจารณาเซ็ตย่อยของ $A \times B$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (x, y) เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ เฉพาะส่วนที่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริงเท่านั้น แล้วเราจะเรียกแต่ละเซ็ตย่อยของ $A \times B$ นี้ว่า ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

นิยาม 2.4.2 ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ก็คือ เซ็ตย่อยของ $A \times B$

ข้อสังเกต

1) เซ็ตย่อยแต่ละเซ็ตของ $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

2) เนื่องจาก $\varnothing$ เป็นเซ็ตย่อยของทุกเซ็ต ดังนั้น $\varnothing$ จึงเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ด้วย และจะเรียก $\varnothing$ ว่า **ความสัมพันธ์ว่าง** (empty relation)

3) ถ้าเซ็ต A และ B มีจำนวนสมาชิกเป็น m และ n ตัว ตามลำดับแล้ว จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B จะมีทั้งหมด 2^{mn} ความสัมพันธ์

นิยาม 2.4.3 ความสัมพันธ์ ใน A ก็คือ เซ็ตย่อยของ $A \times A$

ในกรณีที่ $a, b \in A$ และ R เป็นความสัมพันธ์ใน A มักนิยมเขียน a R b แทนการเขียน $(a, b) \in R$ หรือ R(a, b)

ข้อสังเกต ความสัมพันธ์ใน A อาจประกอบด้วยคู่อันดับของสมาชิกของ A ซึ่งมีจำนวนคู่อันดับจำนวนจำกัด หรือไม่จำกัดก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.4.1 จาก A = { 1, 2 }, B = { a, b }

ซึ่งเราได้ว่า $A \times B$ = { (1, a), (1, b), (2, a), (2,b) } มีจำนวนสมาชิกทั้งหมด 4 ตัว ดังนั้น R ที่เป็นเซ็ตย่อยของ $A \times B$ ($R \subseteq A \times B$) จะมีทั้งหมด $2^4 = 16$ เซ็ตของความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ได้แก่

$R_1 = 0$	R_9 = { (1, b), (2, a) }
R_2 = { (1, a) }	R_{10} = { (1, b), (2, b) }
R_3 = { (1, b) }	R_{11} = { (2, a), (2, b) }
R_4 = { (2, a) }	R_{12} = { (1, a), (1, b), (2, a) }
R_5 = { (2, b) }	R_{13} = { (1, a), (1, b), (2, b) }
R_6 { (1, a), (1, b) }	R_{14} = { (1, a), (2, a), (2, b) }
R_7 { (1, a), (2, a) }	R_{15} = { (1, b), (2, a). (2, b) }
R_8 = { (1, a), (2, b) }	R_{16} = { (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) }

ตัวอย่างที่ 2.4.2 ให้ R = { (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) } จะกล่าวได้ว่า

1Ra เป็นจริง $\because (1, a) \in R$

1Rb เป็นจริง $\because (1, b) \in R$

bR1 เป็นเท็จ $\because (b, 1) \notin R$

3 R a เป็นจริง $\because (3, a) \in R$

aR3 เป็นเท็จ $\because (a, 3) \notin R$

aRa เป็นเท็จ $\because (a, a) \notin R$

3R3 เป็นเท็จ $\because (3, 3) \notin R$

øRø เป็นเท็จ $\because (0, 0) \notin R$

ตัวอย่างที่ 2.4.3 ถ้า $A = \{ 2, 3 \}$ และ $B = \{ 4, 6, 9 \}$

1) ให้ R_1 คือความสัมพันธ์ "เป็นรากที่สอง" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_1 = \{ (2, 4), (3, 9) \}$ คือ 2 เป็นรากที่สองของ 4 และ 3 เป็นรากที่สองของ 9

2) ให้ R_2 คือความสัมพันธ์ "หารไม่ลงตัว" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_2 = \{ (2, 9), (3, 4) \}$ คือ 2 หาร 9 ไม่ลงตัว และ 3 หาร 4 ไม่ลงตัว

3) ให้ R_3 คือความสัมพันธ์ "หารลงตัว" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_3 = \{ (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9) \}$ คือ 2 หาร 9 ลงตัว ฯลฯ

4) ให้ R_4 คือความสัมพันธ์ "มากกว่า" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_4 = \varnothing$ คือไม่มีสมาชิกใดใน A ที่มากกว่าสมาชิกใน B เลย

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซ็ต ดังนั้น เราอาจเขียนแทนความสัมพันธ์ด้วยการแจกแจงสมาชิก (ดังตัวอย่างที่ 2.4.3) หรือด้วยการบอกเงื่อนไข ของสมาชิกก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.4.4

ถ้า $A = \{ 2, 3, \}$, $B = \{ 4, 6, 9 \}$

ให้ $R_1 = \{ (x, y)\ \ x \in A,\ y \in B$ และ $y = x^2 \}$

หรืออาจเขียนใหม่เป็น $R_1 = \{ (x, y)\ \mathrm{E}A \times B \mid y = x^2 \}$

ถ้าเราแจงสมาชิกจะได้ $R_1 = \{ (2, 4), (3, 9) \}$

ให้ $R_2 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 3x \}$

ถ้าเขียนโดยการแจงสมาชิกจะได้ $R_2 = \{ (2, 6), (3, 9) \}$

นิยาม 2.4.4 สำหรับความสัมพันธ์ R ใด ๆ

โดเมนของความสัมพันธ์ R ซึ่งเขียนแทนด้วย D_R ก็คือ เซ็ตของส่วนประกอบแรกของคู่ลำดับใน R และพิสัยของความสัมพันธ์ R ซึ่งเขียนแทนด้วย R_R ก็คือ เซ็ตของส่วนประกอบหลังของคู่ลำดับใน R

นั่นคือ $D_R = \{ x \mid \exists y [(x, y) \in R] \}$

และ $R_R = \{ y \mid \exists x [(x, y) \in R] \}$

ตัวอย่างที่ 2.4.5 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$r_1 = \{(1, b), (1, a), (3, b)\}$, $r_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

จะได้ว่า $D_{r_1} = \{1, 3\}$

$R_{r_1} = \{a,b\}$

$D_{r_2} = \{1, 2, 3\}$

$R_{r_2} = \{a\}$

ข้อสังเกต

1) โดเมนของ R จะเป็นเซ็ตย่อยของ A

2) พิสัยของ R จะเป็นเซ็ตย่อยของ B

3) ถ้า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ แล้ว $D_{A \times B} = A$

และ $R_{A \times B} = B$

นิยาม 2.4.6 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ R ซึ่งเขียนแทนด้วย R^{-1} ก็คือ ความสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยคู่ลำดับ (y, x) โดยที่คู่ลำดับ $(x, y) \in R$

นั่นคือ $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

ตัวอย่างที่ 2.4.6 ถ้า $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

จะได้ว่า $R^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$

ตัวอย่างที่ 2.4.7 ถ้า $R = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, 2x + y = 10\}$

เมื่อ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $R^{-1} = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 2y = 10\}$

ซึ่งอาจเขียนแบบแจกแจงได้ว่า $R = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$

และ $R^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$

นิยาม 5.4.6

ให้ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก เซ็ต $R' = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \wedge (x, y) \notin R\}$ ว่า เป็นความสัมพันธ์เติมเต็มของ R (complementary relation of R)

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

$G_1 = \{(1,2), (3,4)\}$ $\quad G_2 = \{(2,2), (3,3)\}$

$G_3 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ $\quad G_4 = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$

$G_5 = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$ $\quad G_6 = \{(4,1), (4,3)\}$

$G_7 = \{(3,3), (4,3), (4,4)\}$ $\quad G_8 = \{(3,1), (3,2), (3,3)\}$

$G_9 = \{(4,2), (3,3), (2,4)\}$ $\quad G_{10} = \{\ \} = \Phi$

จงพิจารณา G ที่กำหนดให้ว่า

1.1) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

1.2) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

1.3) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

1.4) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

2. จาก G_1 ถึง G_{10} ในข้อ 1 จงหา G_1^{-1} ถึง G_{10}^{-1}

3. ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$

$R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (c, c)\}$

และ $G = \{(b, b), (c, c), (b, a), (b, c)\}$

จงพิจารณาดูข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดเป็นจริง ข้อความใดเป็นเท็จ

3.1) aRb

3.2) aGb

3.3) bGa

3.4) bRa

3.5) CRC

3.6) cGc

3.7) bRb

3.8) bRd

3.9) dRa

3.10) dGa

3.11) bGc

3.12) cGb

3.13) R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

3.14) R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

3.15) R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

3.16) R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

3.17) G เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

3.18) G เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

3.19) G เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

3.20) G เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

4. จาก R และ G ในข้อ 3 จงหา R^{-1} และ G^{-1}

5. จากผลในข้อ 3 และข้อ 4 จงหา D_G, $D_{G^{-1}}$, D_R, $D_{R^{-1}}$, R_G, $R_{G^{-1}}$, R_R และ $R_{R^{-1}}$

6. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ จงเขียนความสัมพันธ์แต่ละ R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ด้วยวิธีแจงสมาชิก

6.1) R_1 คือ "…..น้อยกว่า….."

6.2) R_2 คือ "….มากกว่าหรือเท่ากับ….."

6.3) R_3 คือ "…..เท่ากับ….."

2.5 ฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์บางอย่างมีลักษณะพิเศษ เช่น $R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$ กล่าวคือ สำหรับคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ในความสัมพันธ์ R นั้น ถ้าส่วนประกอบตัวแรกของคู่อันดับเป็นตัวเดียวกันแล้วจะมีส่วนประกอบตัวหลังเป็นตัวเดียวกันด้วย หรือกล่าวได้ว่า สำหรับคู่อันดับใน R จะไม่มีส่วนประกอบตัวแรกซ้ำกันเลย ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษนี้ว่า ฟังก์ชัน

นิยาม 2.5.1 เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

ตัวอย่างที่ 2.5.1

ความสัมพันธ์ $R_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$ เป็นฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะทั้ง (1, 2) และ (1, 4) อยู่ในความสัมพันธ์ R_2

ตัวอย่างที่ 2.5.2

ความสัมพันธ์ $R_1 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R$ และ $y = x^2\}$ เป็นฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ $R_2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R$ และ $y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่ลำดับ $(1, -1), (1, 1)$ อยู่ในความสัมพันธ์ R_2

หมายเหตุ 1) ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ แต่ความสัมพันธ์อาจจะไม่ใช่ฟังก์ชันก็ได้

2) เนื่องจากฟังก์ชัน f ใด ๆ เป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น โดเมนและพิสัยของ f ก็เขียนแทนด้วย D_f และ R_f

นิยาม 2.5.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว กราฟ f ก็คือ เซ็ตของทุกคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง $(x, y) \in f$

จากนิยามนี้ จึงได้ว่าฟังก์ชันก็คือ กราฟ แต่กราฟอาจจะไม่ใช่ฟังก์ชัน อีกทั้งยังกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันนั้นกำหนดกราฟของมันเองได้ และกราฟของฟังก์ชัน ก็กำหนดฟังก์ชันได้ ดังนั้น จึงไม่จำเป็นต้องแยกความหมายระหว่างฟังก์ชัน และกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ A และ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก f เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x, y) โดย $x \in A, y \in B$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $x + 2y = 9$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$

และจากเงื่อนไข $x + 2y = 9$ ได้ว่า

$$f = \{(1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1)\}$$

เมื่อพิจารณาดูคู่อันดับของ f แล้ว จะกล่าวได้ว่า f มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

วิธีพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

เราอาจแบ่งการพิจารณาเป็น 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ต้องแสดงก่อนว่า แต่ละคู่อันดับนั้นบรรดาส่วนประกอบตัวที่หนึ่งของคู่อันดับต้องอยู่ในเซ็ต A และส่วนประกอบที่สองของคู่อันดับต้องอยู่ในเซ็ต B นั่นคือแสดงว่า f มีความสัมพันธ์ จาก A ไปยัง B

ขั้นที่ 2 แล้วแสดงว่า สำหรับแต่ละค่าของส่วนประกอบตัวที่หนึ่ง จะจับคู่กับส่วนประกอบตัวที่สองได้ อย่างมากเพียงหนึ่งค่า หรือแสดงได้ว่า สำหรับคู่อันดับใด ๆ ถ้าส่วนประกอบตัวที่หนึ่งเหมือนกัน แล้วส่วนประกอบตัวที่สองต้องเหมือนกันด้วย ดังนั้น ถ้าส่วนประกอบตัวที่หนึ่งไม่ซ้ำกันเลย ขั้นที่ 2 นี้ ก็เป็นจริง

เมื่อเราแสดงได้ว่า f เป็นจริง ทั้ง 2 ขั้นจึงจะสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.5.4 ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

จงพิจารณาว่า F ใด เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1) $F_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

2) $F_2 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3)\}$

3) $F_3 = \{(2, 3), (2, 4), (1, 5), (3, 2)\}$

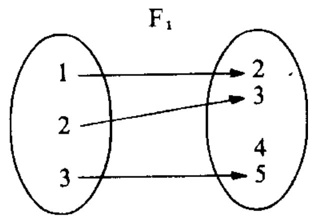
4) $F_4 = \{(2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$

5) $F_5 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 6)\}$

แนวการพิจารณา

1) $F_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะ

1. เป็นเซ็ตที่มีส่วนประกอบตัวที่หนึ่ง (คือ 1, 2, 3) อยู่ในเซ็ต A และส่วนประกอบตัวที่สอง (คือ 2, 3, 5) อยู่ในเซ็ต B
2. และสมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ใน A ก็จับคู่กับสมาชิกที่อยู่ใน B เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 1 จับคู่กับ 2, 2 จับคู่กับ 3, 3 จับคู่กับ 5 อาจเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่กันได้ดังรูป 2.5.1

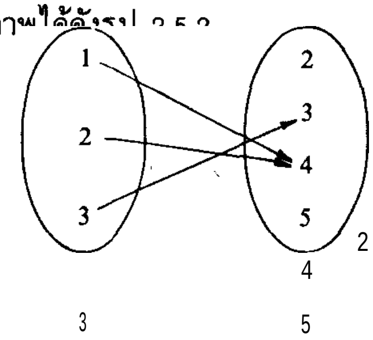


รูป 2.5.1

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า F_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

2) $F_2 = \{ (1, 4), (2, 4), (3, 3) \}$

อาจเขียนแผนภาพได้ดังรูป 2.5.2



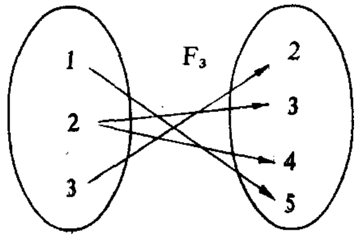
รูป 2.5.2

จะเห็นว่า F_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะเป็นเซ็ตที่มีส่วนประกอบตัวที่หนึ่งอยู่ในเซ็ต A และส่วนประกอบตัวที่สอง (คือ 3, 4) อยู่ในเซ็ต B โดยแต่ละสมาชิกที่อยู่ใน A จับคู่กับสมาชิกที่อยู่ใน B เพียงค่าเดียวคือ 1 จับคู่กับ 4 เพียงตัวเดียว, 2 ก็จับคู่กับ 4 เพียงตัวเดียว, และ 3 จับคู่กับ 3 เพียงตัวเดียว หรือไม่มีคู่อันดับใด ที่มีส่วนประกอบที่หนึ่งซ้ำกันเลย

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

3) $F_3 = \{(1, 5). (2, 4), (2, 3), (3, 2)\}$

เขียนแผนภาพได้ ดังรูป 2.5.3



รูป 2.5.3

จะเห็นว่า F_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะถึงแม้ส่วนประกอบตัวที่หนึ่งจะอยู่ในเซ็ต A (คือ 1, 2, 3) และส่วนประกอบตัวที่สองจะอยู่ใน B (คือ 2, 3, 4, 5) ก็ตาม แต่เราพบว่ามีสมาชิกที่อยู่ใน A จับคู่กับสมาชิกใน B **มากกว่าหนึ่งค่า** (หรือมีคู่อันดับที่มีส่วนประกอบตัวที่หนึ่งเหมือนกัน จับคู่กับส่วนประกอบตัวที่สองที่ต่างกัน) ตัวอย่างของคู่อันดับนี้ได้แก่ (2, 3) กับ (2, 4) นั่นคือ 2 จับคู่กับ 3 และ 2 ตัวเดียวกันนี้ยังจับคู่กับ 4 อีกด้วย จึงได้ว่าส่วนประกอบตัวที่หนึ่งตัวเดียวกัน แต่จับคู่กับส่วนประกอบตัวที่สอง มากกว่า 1 ค่า

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_3 **ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B**

4) $F_4 = \{(2, 4), (3, 2); (4, 3)\}$

จะเห็นว่า F_4 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะว่าบรรดาส่วนประกอบตัวที่หนึ่งคือ 2, 3, 4 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต A ทั้งหมด (คือ 4 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต A)

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_4 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

5) $F_5 = \{ (1, 3), (2, 5), (3, 6) \}$

จะเห็นว่า F_5 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะว่าบรรดาส่วนประกอบตัวที่สองคือ 3, 5, 6 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต B ทั้งหมด ($6 \notin B$) แม้ว่าส่วนประกอบตัวที่หนึ่งจะอยู่ในเซ็ต A ทั้งหมดก็ตาม

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_5 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.5.5 ให้ A และ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก (คือ $A = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$ และ $B = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$) F ประกอบด้วย (x, y) ซึ่ง $x \in A, y \in B$

จงพิจารณาว่า F คือ $y = 10 - 3x$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่?

กล่าวคือ เราจะแทนค่า x ด้วยเลขจำนวนเต็มบวก (คือ $x \in A$) แล้วหาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก (คือ $y \in B$) ที่สอดคล้องออกมา

จาก $y = 10 - 3x$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = 10 - 3(1) = 7$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 10 - 3(2) = 4$

เมื่อ $x = 3$ จะได้ $y = 10 - 3(3) = 1$

เมื่อ $x = 4$ จะได้ $y = 10 - 3(4) = -2$

เมื่อ $x = 5$ จะได้ $y = 10 - 3(5) - 5$

ฯลฯ

จะเห็นว่าเฉพาะ x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ($x \in A$) ที่ $x = 1, 2, 3$ เท่านั้น ที่ให้ค่า y เป็นจำนวนเต็มบวก ($y \in B$) ออกมา ค่า x นอกจากนั้น คือ 4, 5, 6, ... ไม่ให้ค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เราจึงไม่นำมาพิจารณา

ดังนั้น เราจะได้ค่าที่สอดคล้องกับโจทย์คือ $x = 1, y = 7, x = 2, y = 4, x = 3, y = 1$

นั่นคือ เซ็ต F ที่เป็นเซ็ตของคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง $x \in A, y \in B$ โดย F คือ $y = 10 - 3x$ เป็น

$$F = \{ (1, 7), (2, 4), (3, 1) \}$$

จาก F จะเห็นว่า แต่ละ $x \in A$ คือ $x = 1, 2$ หรือ 3 เราหาค่า $y \in B$ ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวเท่านั้น คือ 1 คู่กับ 7 ค่าเดียว, 2 จับคู่กับ 4 ค่าเดียว และ 3 จับคู่กับ 1 ค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.5.6 ให้ A เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวกและ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย F ประกอบด้วยคู่ลำดับ (x, y) ซึ่ง $x \in A, y \in B$ และ F คือ $x + y^2 = 5$

จงพิจารณาว่า F เป็นฟังก์ชันหรือไม่?

กล่าวคือ เราจะแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มบวก แล้วหาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหลายที่สอดคล้องออกมา

จาก $\quad x + y^2 = 5$

$$\therefore y^2 = 5 - x$$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y^2 = 5 - 1 = 4$

$$\therefore y = \pm 2$$

$x = 4$ จะได้ $y^2 = 5 - 4 = 1$

$$\therefore y = \pm 1$$

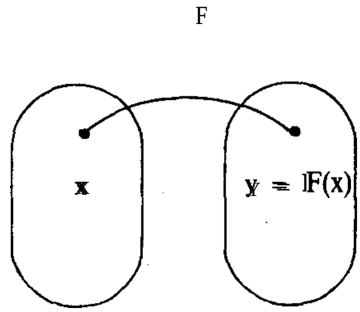
หมายเหตุ เราจะพบว่าสำหรับ $x \in A$ ที่ $x = 1, 4$ เท่านั้นที่ให้ค่า $y \in B$ ออกมา แต่ถ้า x ไม่ใช่ค่าใดค่าหนึ่งในบรรดา 1, 4 แล้วเราหาค่า $y \in B$ ไม่ได้ ดังนั้น เราได้เซ็ต F ซึ่งเป็นเซ็ตของคู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับโจทย์เป็น $F = \{ (1, 2), (1, -2), (4, 1), (4, -1)$

จะเห็นว่ามีบางค่าของ x เช่น $x = 1$ เราอาจหาค่า y ได้มากกว่าหนึ่งค่า คือ ได้ $y = 2$ และ -2

ดังนั้น F ตามโจทย์นี้จึงไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

อนึ่ง สำหรับฟังก์ชัน F ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in F$ เรากล่าวว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน F ที่ x และจะเขียนแทน y ด้วย "$F(x)$" (อ่านว่า F of x) คือ เป็นได้ว่า $y = F(x)$

เขียนแผนภาพแสดงได้ดังรูป 2.5.4



รูป 2.5.4

ดังนั้น จากตัวอย่างที่ 2.5.5

$y = F(x) = 10 - 3x$

เราได้ $F(1) = 7$ (อ่านว่า "ค่าของ F ที่ 1 เท่ากับ 7" คือ $x = 1$ ได้ $F(x) = 7$)

$F(2) = 4$

$F(3) = 1$

ส่วนที่ x อื่น ๆ นอกจาก 1, 2, 3 นั้น F ไม่มีค่า

ตัวอย่างที่ 2.5.7 จากตัวอย่างที่ 2.5.5 ซึ่งมี $F = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ เราได้ว่า

โดเมนของ $F = \{1, 2, 3\}$

พิสัยของ $F = \{7, 4, 1\}$

ตัวอย่างที่ 2.6.8 ถ้า $R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, b)\}$ จงหาโดเมน และพิสัยของ R

จะได้ว่า โดเมน ของ $R = \{1, 2\}$

พิสัยของ $R = \{a, b, c\}$

นิยาม 2.5.3 ให้ A และ B เป็นเซ็ต f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $(x, y) \in f$ แล้วจะเรียกว่า y เป็นอิเมจก์ (image) ของ x ภายใต้ f และเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และเรียกว่า x เป็นพรีอิเมจก์ (pre-image) ของ y

ข้อสังเกตุ จาก $y = f(x)$ ใด ๆ เราอาจเรียก x ว่าเป็น **"ตัวแปรอิสระ"** และเรียก y ว่า **"ตัวแปรตาม"** ได้ด้วย

ทฤษฎีบท 2.5.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่ง $D_f = D_g$ แล้ว $f = g$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ x ถ้า $x \in D_f$ แล้ว $f(x) = g(x)$

แบบฝึกหัด 2.5

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

ให้ $F_1 = \{(1,2), (2,4), (3,2)\}$ $\quad F_2 = \{(1,3), (2,4), (3,2)\}$

$F_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$ $\quad F_4 = \{(1,2), (3,3), (2,3)\}$

$F_5 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ $\quad F_6 = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$

$F_7 = \{(3,3), (2,2), (4,1)\}$ $\quad F_8 = \{(2,3), (3,2), (4,2)\}$

$F_9 = \{(3,2), (1,1), (4,3)\}$ $\quad F_{10} = \{(1,2), (3,2), (1,4)\}$

$F_{11} = \{(2,2), (3,2), (4,3), (2,1)\}$ $\quad F_{12} = \{(4,2), (3,2), (2,2)\}$

$F_{13} = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$ $\quad F_{14} = \{(4,1), (3,1), (2,1)\}$

$F_{15} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ $\quad F_{16} = \{\ \} = \Phi$

จงพิจารณา F ทั้งหลายที่กำหนดให้ว่ามี F ใดบ้างที่

1.1) เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1.2) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

1.3) เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง A

1.4) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง B

1.5) เป็นฟังก์ชันทุกข้อจาก 1.1) ถึง 1.4)

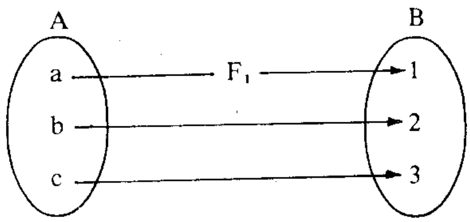
1.6) ไม่เป็นฟังก์ชันทุกข้อจาก 1.1) ถึง 1.4)

1.7) เป็นทั้งฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ A ไปยัง A

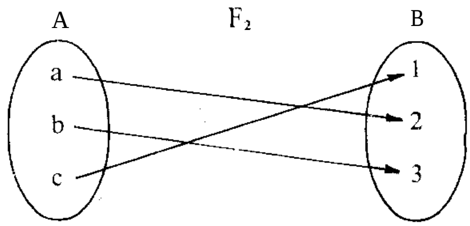
1.8) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A และ B ไปยัง B

2. จงพิจารณาว่าแผนภาพของ F ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

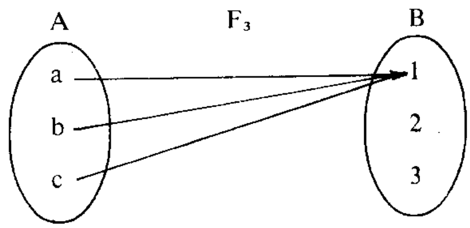
2.1)



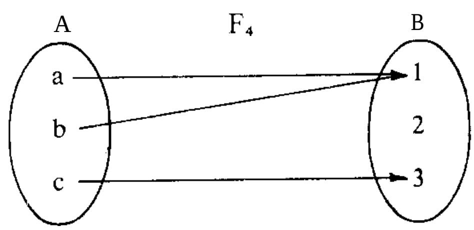
2.2)



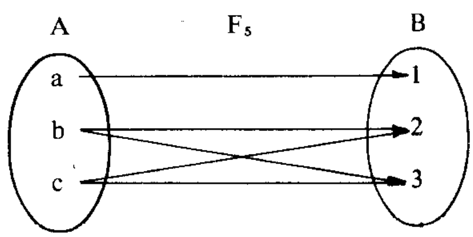
2.3)



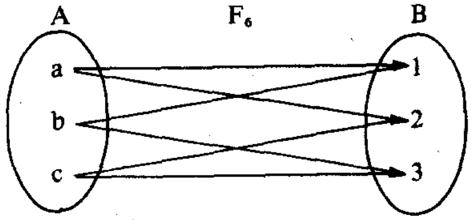
2.4)



2.5)



2.6)



3. จากโจทย์ข้อ 1 จงหาโดเมนและพิสัยของบรรดา F ทั้งหลายจาก F_1 ถึง F_{16}

4. จากโจทย์ข้อ 2 จงหาพิสัยของ F_1 ถึง F_5

5. ถ้า $F(x) = x^2 - 3x + 4$ จงหาค่าของ $F(0)$, $F(1)$, $F(-2)$, $F(a)$, $F(a + h)$

6. ถ้า $f(x) = x^2 - 3$ และโดเมนของ f คือ $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ จงหาพิสัยของ f

7. ถ้า $h(x) = x - 2$ และพิสัยของ h คือ $\{-4, -2, 0, 2\}$ จงหาโดเมนของ h

8. ให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ จงพิจารณาว่า F ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

   8.1) $F_1 = \{(x, y) \mid y = 1\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.2) $F_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.3) $F_3 = \{(x, y) \mid y = x - 1\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.4) $F_4 = \{(x, y) \mid y^2 = 2x\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.5) $F_5 = \{(x, y) \mid y^2 = 0\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

9. ให้ A เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก, B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย จงพิจารณาว่า F ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

   9.1) $F_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.2) $F_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.3) $F_3 = \{(x, y) \mid xy^2 = 4)$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.4) $F_4 = \{(x, y) \mid 10x^2y = 0\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

10. จากโจทย์ข้อ 9 จงหาโดเมนและพิสัยของ F_1 ถึง F_4

11. จากโจทย์ในข้อที่ 1 ของแบบฝึกหัด 2.4 จงพิจารณา G ที่กำหนดให้ว่า

11.1) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง A

11.2) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

11.3) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง B

11.4) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

2.6 ไบนารีโอเปอร์เรชัน (Binary Operation)

นิยาม 2.6.1 สำหรับเซ็ต S ใด ๆ ถ้า "O" เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ ไปยัง S และมี $S \times S$ เป็นโดเมนแล้ว เราจะเรียกว่า "O เป็นไบนารีโอเปอร์เรชัน (Binary Operation) ใน S"

สำหรับไบนารีโอเปอร์เรชัน "O" ใด ๆ ในเซ็ต S

ถ้า $O(x, y) = z$ เราจะเขียนว่า $x \, O \, y = z$

การบวก, การลบ, และการคูณ ต่างก็เป็น ไบนารีโอเปอเรชัน ในเซ็ตของจำนวนทั้งนั้น เช่น การบวกในเซ็ตของจำนวนเต็มบวก เป็นต้น

ลองพิจารณาข้อความ "$3 + 4 = 7$" อาจกล่าวได้ว่า "7 เป็นผลบวกของ 3 กับ 4" สังเกตดูจะเห็นว่า คู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก (3, 4) นั้นถูกจับเข้าคู่กับเลข 7 โดย โอเปอเรชัน "การบวก" หรือกล่าวแบบทั่ว ๆ ไปจะได้ว่า ในการบวกเลขจำนวนเต็มบวกนั้น คู่ลำดับของเลขจำนวนเต็มบวก (a, b) จะถูกจับเข้าคู่กับเลขจำนวนเต็มบวกที่สาม สมมุติว่าเป็น c และเราพูดว่า "c เป็นผลบวกของ a กับ b" (คือ $(a, b) \in N \times N$) จะเห็นได้ว่าคู่ลำดับ (a, b) เป็นอีลีเมนต์ของผลคูณคาร์ทีเซียน $N \times N$ เมื่อ N เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก และ $c \in N$ เพราะว่า (a, b) ถูกจับเข้าคู่กับ c โดย โอเปอเรชัน บวก จึงทำให้ได้ว่า "การบวกเลขจำนวนเต็มบวกนั้น อาจแสดงในรูปของ**ความสัมพันธ์จาก** $N \times N$ **ไป** N **ได้** โดยใช้สัญลักษณ์ " + " แทนโอเปอเรชัน บวกนี้ นั่นคือ + เป็นความสัมพันธ์จาก $N \times N$ ไปยัง N หรือเขียนได้ว่า $+ \subseteq (N \times N) \times N$ และ $((3, 4), 7) \in +$ โดย $(3, 4) \in N \times N$ และ $7 \in N$ นั่นแสดงให้เห็นว่า + **เป็นความสัมพันธ์จาก** $N \times N$ **ไปยัง** N อาจเขียนได้ว่า $+ = \{((1, 1), 2), \ldots, ((3, 4), 7) \text{---} \}$ และจะเห็นได้ว่าสำหรับแต่ละคู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก (a, b) จะมีจำนวนเต็มบวก c ซึ่งเรียกว่าเป็นผลบวกของ a กับ b เสมอโดยถ้า $((a, b), c) \in +$ และ $((a, b), d) \in +$ แล้วจะได้ว่า $a + b = c = d$ นั่นคือ $c = d$ แสดงว่าในคู่ลำดับ ((a, b), c) กับ ((a, b), d) ใด ๆ ถ้าอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งเป็นตัวเดียวกัน (คือ $(a + b)$) แล้วอีลีเมนต์ตัวที่สองคือ c กับ d ต้องเป็นตัวเดียวกัน คือ $c = d$

นั่นคือ + เป็นฟังก์ชันจาก $N \times N$ ไปยัง N ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า

+ เป็นไบนารีโอเปอเรชัน

อนึ่ง ถ้าเซ็ต S มีอีลีเมนต์จำนวนไม่มากนัก เราอาจพรรณนา ไบนารีโอเปอเรชัน "O" ในเซ็ต S ได้ด้วยตาราง

โดยถ้า $x \bigcirc y = z$ เราจะเขียนค่า z ลงในแถวของ x และคอลัมน์ของ y ดังตาราง 2.6.1

O	....	y	. .
⋮		⋮	
x	....	z	. .
⋮		⋮	

ตาราง 2.6.1

ตัวอย่างที่ 2.6.1 จากตาราง 2.6.2 ต่อไปนี้

0	a	b
a	a	b
b	b	a

ตาราง 2.6.2

แสดงว่า " 0 " เป็นไบนารีโอเปอเรชัน โดย

a 0 a = a

a 0 b = b

b 0 a = b

b 0 b = a

หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่า

0 = { ((a, a), a), ((a, b), b), ((b, a), b), ((b, b), a) }

นิยาม 2.6.2 ถ้าไบนารีโอเปอร์เรชัน " 0 " มีคุณสมบัติว่า

(x 0 y) 0 z = x 0 (y 0 z)

สำหรับทุก 9 ค่าของ x, y, z แล้ว จะกล่าวว่า "0 คล้องตามกฎการจัดหมู่"

(Associative law)

นิยาม 2.6.3 ถ้าไบนารีโอเปอร์เรชัน " 0 " มีคุณสมบัติว่า

x 0 y = y 0 x

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y แล้ว จะกล่าวว่า "0 คล้องตามกฎการสลับที่"

(Commutative law)

ตัวอย่าง 2.6.2 ให้ $S = \{1, 2\}$ และให้ " ⊕ " เป็น ไบนารีโอเปอเรชัน ซึ่งมีค่าแสดงดังตาราง 2.6.3 ข้างล่างนี้

⊕	1	2
1	1	2
2	2	1

ตาราง 2.6.3

จงแสดงว่า “ ⊕ ” คล้องตามกฎการจัดหมู่ และกฎการสลับที่

วิธีทำ

1) จะแสดงว่า ⊕ คล้องตามกฎการจัดหมู่
โดยจะต้องแสดงว่า $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y, z
เขียนตารางประกอบการพิจารณาได้เป็น

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	y	z	(x ⊕ y)	(x ⊕ y) ⊕ z	y ⊕ z	x ⊕ (y ⊕ z)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2
1	2	2	2	1	1	1
2	1	1	2	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	1	2	1
2	2	2	1	2	1	2

ตาราง 2.6.4

ช่อง (1), (2), (3) ได้จากเขียนทุก ๆ ค่าของ x, y, z ที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ กันทั้งหมดใน $S = \{1, 2\}$ ช่อง (4) ได้จากเอาช่อง (1) กับช่อง (2) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดให้ ช่อง (5) ได้จากเอาช่อง (4) กับช่อง (3) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดให้ ช่อง (6) ได้จากเอาช่อง (2) กับช่อง (3) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕

ที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่อง (7) ได้จากเอาช่อง (1) กับช่อง (6) มา $\oplus$ โดยใช้ตาราง $\oplus$ ที่โจทย์กำหนดมาให้

พิจารณาช่อง (5) กับ (7) จะเห็นว่ามีค่าเท่ากันกรณีต่อกรณี
นั่นคือ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y, z
ดังนั้น $\oplus$ คล้องตามกฎการจัดหมู่

2) จะแสดงว่า $\oplus$ คล้องตามกฎการสลับที่
โดยจะต้องแสดงว่า $x \oplus y = y \oplus x$ สำหรับทุกค่าของ x, y
เขียนตารางประกอบการพิจารณาได้เป็น

(1)	(2)	(3)	(4)
x	y	$x \oplus y$	$y \oplus x$
1	1	1	1
1	2	2	2
2	1	2	2
2	2	1	1

ตาราง 2.6.5

ช่อง (1), (2) ได้จากเขียนทุก ๆ ค่าของ x, y ที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ กันทั้งหมด ช่อง (3) ได้จากเอาช่อง (1) กับ (2) มา $\oplus$ โดยใช้ตาราง $\oplus$ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่อง (4) ได้จากเอาช่อง (2) กับ (1) มา $\oplus$ โดยใช้ตาราง $\oplus$ ที่โจทย์กำหนดมาให้ พิจารณาช่อง (3) กับ (4) จะเห็นว่ามีค่าเท่ากันกรณีต่อกรณี

นั่นคือ $x \oplus y = y \oplus x$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y
ดังนั้น $\oplus$ คล้องตามกฎการสลับที่

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1. ให้ A = { a, b, c, d } กับไบนารีโอเปอร์เรชัน 0 ตามตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

0	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	b	c
c	a	d	c	d
d	c	c	a	a

จงหา

1.1) c 0 b　　　　1.2) b 0 c

1.3) cO(bOd)　　　　1.4) (c 0 b) 0 d

1.5) ((a. 0 b) 0 c) 0 d　　　　1.6) (a 0 c) 0 ((b 0 d) 0 c)

1.7) ((cl 0 d) 0 d) 0 d　　　　1.8) (aOd)O(cOb)

1 .9) " 0 " คล้องตามกฎการสลับที่หรือไม่ เพราะเหตุใด

1.10) " 0 " คล้องตามกฎการจัดหมู่หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ให้ S = { a, b, c, d, e } กับไบนารีโอเปอร์เรชัน ⊕ ถ้า ⊕ สอดคล้องตามกฎการสลับที่และกฎการจัดหมู่แล้ว จงหาอักษรเติมในช่อง (1), (i), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ที่เว้นไว้ให้สมบูรณ์

⊕	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	d	(6)	c	e
c	(1)	a	(7)	(9)	e
d	(2)	(4)	b	(10)	e
e	(3)	(5)	(8)	e	e