เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 5.1

ข้อ 1

1.1) เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×5 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 5 อีลีเมนต์

1.2) เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×1 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 4 อีลีเมนต์

1.3) เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×5 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 10 อีลีเมนต์

1.4) เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×7 และมีอีลีเมนต์ทั้งหมด 28 อีลีเมนต์

ข้อ 2

2.1) เมทริกซ์ A มีขนาด 3×5

2.2) เมทริกซ์ A มีอีลีเมนต์ทั้งหมด 15 อีลีเมนต์

2.3) $a_{13} = 1$ $\quad a_{34} = 7$

$a_{15} = 3$ $\quad a_{25} = 1$

$a_{22} = 3$ $\quad a_{43}$ ไม่มี

2.4) อีลีเมนต์ในแถวที่ สาม คือ -2, -3, 0, 7, 5

2.5) อีลีเมนต์ในคอลัมน์ที่ ห้า คือ 3, 1, 5

ข้อ 3

3.1) เป็น เมทริกซ์ศูนย์ และ เป็น เมทริกซ์จัตุรัสด้วย (มีขนาด 1×1)

3.2) เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด 1×1

3.3) เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด 2×2

3.4) เป็นเมทริกซ์ ศูนย์

3.5) เป็นเมทริคซ์ ศูนย์ และเป็นเมทริคซ์ จัตุรัสด้วย

3.6) เป็นเมทริคซ์จัตุรัส

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 5.2

ข้อ 1 มีเมทริคซ์ C กับ F เท่านั้นที่เท่ากัน

ข้อ 2 จากนิยามการเท่ากันของเมทริคซ์จะได้ว่า

$$x + 5 = -1$$

$$\therefore \quad x = -6$$

$$y - 2 = -6$$

$$\therefore \quad y = -4$$

$$3z = 2x$$

$$= 2 \quad c\text{-}6) = -12$$

$$\therefore \quad z = -4$$

ดังนั้น $x = -6, \quad y = -4, \quad z = -4$

ข้อ 3 จากการเท่ากันของเมทริคซ์ เราได้

$$y - 2 = x \quad \text{- - - - - - - (1)}$$

และ $\quad x = 3y \quad$ - - - - - - - - (2)

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$$\therefore \quad y - 2 = 3y$$

$$\therefore \quad y = -1$$

แทนค่า y ใน (2)

$\therefore x = -3$

ดังนั้น $x = -3, \; y = -1$

ข้อ 4 จากการเท่ากันของเมทริคซ์ เราได้

$3x + 2y = 7$ ---------- (1)

$5x - y = 3$ ---------- (2)

(2) 4.2 จะได้ $10x - 2y = 6$ ---- 43)

(1) + (3) จะได้ $13x = 13$

$\therefore x = 1$

แทนค่า x ใน (2)

$\therefore y = 2$

ดังนั้น $x = 1, \; y = 2$

ข้อ 5 จาก $x^3 + x - 1 = 0$ จะได้ว่า

ถ้า $-x^3 - x = -1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 1 เท่ากัน

และ $x^3 = -x + 1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2 เท่ากัน

และ $x = -x^3 + 1$ แสดงว่าอีลีเมนต์ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 เท่ากัน

และ $x^3 + x = 1$ แสดงว่าอีลีเมพต์ในแถวที่ 2 คอลัมท์ที่ 2 เท่ากัน

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเมทริคซ์ทีสองเท่ากัน

ข้อ 6

6.1) $A + F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

6.2) $(A + B) + F = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

6.3) A + C บวกกันไม่ได้

6.4) $CA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

6.5) AC คูณกันไม่ได้

6.6) $AD = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

6.7) $(AD)\,E = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6.8) $C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

6.9) $C^3 - C^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}$

6.10) $DA = \begin{bmatrix} -6 & 10 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6.11) $3A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

6.12) $-\frac{1}{2}\,D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

6.13) $2A - 3B = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -11 \\ -16 & 12 & -2 \end{bmatrix}$

6.14) $DE = \begin{bmatrix} 7 & & & \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & \overset{3}{6} & \overset{2}{5} & \overset{1}{4} \end{bmatrix}$

$\therefore\ H = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ h_{13} = 5,\quad h_{22} = 6,\quad h_{34} = 1$

6.15) $C - G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(C - G)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

$CG = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ C^2 - 2CG + G^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าในที่นี้ $(C - G)^2 = C^2 - 2CG + G^2$

6.16) จากข้อ 6.15) $C^2 = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ และ $G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore C^2 - G^2 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $C+G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$C-G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (C + G)(C - G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าในที่นี้ $C^2 - G^2 = (C + G)(C - G)$

6.17) จากข้อ 6.9) จะได้ว่า เมทริกซ์ C^3 มีขนาด 2×2

6.18) จากข้อ 6.6) จะได้ว่า AD มีขนาด 2×2

6.19) จากข้อ 6.7) จะได้ว่า $(AD)E$ มีขนาด 2×4

6.20) $A + B$ มีขนาด 2×3

ข้อ 7 จาก $A = [\quad]$, $C =$

1) AB = $\begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$

2) BA = $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

3) CA = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

4) CB คูณกันไม่ได้

5) AC คูณกันไม่ได้

$\boxed{\text{ข้อ 8}}$ จาก AB = C จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3x + 5y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$$\therefore \quad 3x + 5y = 1 \quad \text{-----------} (1)$$

$$x + 2y = 0 \quad \text{-----------} (2)$$

(2) x 3 จะได้ $3x + 6y = 0$ --------- (3)

(3) - (1) จะได้ $y = -1$

แทน y ใน (2) จะได้ $x = 2$

ดังนั้น $x = 2$, $y = -1$

ข้อ ๑ จากโจทย์จะได้ว่า

โรงเรียนต้องการซื้อสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

สมุด (โหล)	ดินสอ (โหล)	ยางลบ (โหล)	ไม้บันทัด (โหล)
20	12	30	15

เขียนรูปเมทริคซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 30 & 15 \end{bmatrix}$$

และจากตารางพ่อค้าทั้ง 4 คน เสนอราคาต่อโหล ของสมุด, ดินสอ, ยางลบ, ไม้บันทัด ตามลำดับนั้น เขียนรูปเมทริคซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 13 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริคซ์ของราคารวมของสิ่งของทั้งสี่รายการ ของพ่อค้าแต่ละคนเป็น

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 13 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 490 \\ 434 \\ 495 \\ 651 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ย่อมได้ว่า

นายดำ เสนอราคารวม 490 บาท

นายแดง เสนอราคารวม 434 บาท

นายเขียน เสนอราคารวม 495 บาท

นายขาว เสนอราคารวม 651 บาท

ดังนั้น โรงเรียนจะซื้อสิ่งของที่ต้องการจากนายแดงซึ่งเสนอราคาต่ำที่สุด

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 5.3

ข้อ 1 จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B + A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A + B = B + A$

1.2) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A + B) + C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

และ $B + C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

1.3) $A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A + 0 = A$$

1.4) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (AB)\,C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

และ $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)\,C = A(BC)$$

1.5) $(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (A + B)\,C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & [illegible] \\ -2 & [illegible] \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)\, C = AC+BC$$

1.6) $$C\,(A + B) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & [illegible] \\ 1 & [illegible] \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad CA + CB = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C(A + B) = cA+cB$$

ข้อ 2

จาก $A = \begin{bmatrix} a & [illegible] \\ b & c \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^2 + 3A + 2I_2 = 0$ คือ

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ ab + bc & c^2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + 3a + 2 & 0 \\ ab + bc + 3b & c^2 + 3c + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

2.1) $a^2 + 3a + 2 = 0$

$\therefore (a+2)(a+1) = 0$

$a = -2, -1$

2.2) $ab + bc + 3b = 0$

$\therefore b(a+c+3) = 0$

$\therefore b = 0$

และ $a + c + 3 = 0$

จะเห็นว่า do $a = -2$ จะได้ $c = -1$ และ เมื่อ $a = -1$ จะได้ $c = -2$

ซึ่งค่า c ที่ได้นี้ก็สอดคล้องกับสมการ $c^2 + 3c + 2 = 0$

ดังนั้นเราจึงได้ว่า $a = -2, b = 0, c = -1$ และ $a = -1, b = 0, c = -2$

ข้อ 3

จาก $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ข้อ 4

จาก $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ซึ่งเมทริคซ์ A เป็นเมทริคซ์ ขนาด 3×2 ดังนั้น

4.1) เมทริคซ์ I ซึ่งทำให้ $AI = A$ คือ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2) เมทริกซ์ I ซึ่งทำให้ IA = A คือ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ข้อ ๕ จาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

คือ $AI_2 = A$

และ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

คือ $I_2A = A$

นั่นคือ $AI_2 = A = I_2A$

<u>เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 5.4</u>

ข้อ 1 จากสูตร ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

1.1) จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ซึ่งได้ว่า $a_{11} = 4,\ a_{12} = 7,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2$

และ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (4)(2) - (1)(7) = 8 - 7 = 1$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1.2) จาก $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

และ $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = -10 - (-4) = -6$

$$\therefore\ B^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

1.3) จาก $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

และ $c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} = (5)(0) - (6)(0) = 0$

เราจึงสรุปได้ว่าไม่มี C^{-1}

1.4) ไม่มี D^{-1}

1.5) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.6) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

1.7) จาก $H = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

เราพิจารณา $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 15 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$

หารตลอด แถวที่ (1) ด้วย 3 เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (2) ด้วย -4 เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย 5 เท่าของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

ดังนั้นเราได้ว่า

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

1.8) $I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

1.9) $J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.10) จาก $K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

เราพิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (3) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (1) ด้วย 3 เท่า ของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่ (3) ด้วย 6 เท่าของแถวที่ (2) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

หารตลอดแถวที่ (3) ด้วย -2 เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (3) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

บวกแถวที่ (1) ด้วยแถวที่ (3) เราได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -6 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ข้อ 2

จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} -27 & -10 \\ -19 & -7 \end{bmatrix}$$

และ $(-27)\ (-7) - (-19)\ (-10)$

$= 189 - 190 = -1$

$$\therefore \quad (A\ B)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 19 & -27 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(A\ B)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$

จาก $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

และ $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = 6 - 5 = 1$

$$\therefore \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

และ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 8 - 9 = -1$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (B^{-1})\ (A^{-1}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(AB)^{-1} = (B^{-1})\ (A^{-1})$

ข้อ ๓

3.1) จาก $4x + 7y = 3$

$x + 2y = 1$

เขียนในรูปเมทริคซ์ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

จากสมการเขียนได้ว่า

$$AU = C$$

$$\therefore (A^{-1}A)\,U = A^{-1}C$$

$$\therefore U = A^{-1}C$$

จากข้อ 1.1) เราได้ว่า

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore U = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x = -1,\ y = 1$

3.2) จาก $3x + 6y = 2$

$x + 2y = 3$

เขียนในรูปเมทริคซ์ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 1.4)

เราได้ว่าเมทริคซ์ $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่มีอินเวอร์ส

ดังนั้นสมการชุดนี้ อาจจะไม่มีคำตอบ หรือถ้ามีคำตอบก็มีมากมายหลายคำตอบ

พิจารณาจากสมการที่กำหนดมาให้

$$3x + 6y = 2 \quad \text{--------- (1)}$$

$$x + 2y = 3 \quad \text{--------- (2)}$$

(2) x 3 ได้ $3x + 6y = 9$ --------- (3)

(1) - (3) ได้ $0 = -7$ ไม่จริง

แสดงว่า สมการนี้ไม่มีคำตอบ คือ ไม่มีค่า x,y ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ

3.3) $x = 2, \quad y = -3$

3.4) $x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$

3.5) $x = -3, \quad y = 3, \quad z = -1$

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ ๕.๕

ข้อ 1 หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = -2$

1.2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$

1.3) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(4) = -2 - 12 = -14$

1.4) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (1)\ (2) - (-3)\ (4)$$
$$= 2 + 12 = 14$$

1.5) 10 1.6) 2 1.7) 0

1.8) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1\ (1) - 0 + 0 = 1$$

1.9) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(0 - 0) + 1\ (0 - 0) - 3\ (6 - (-1))$$
$$= -21$$

1.10) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1\ (2 - 1) -2\ (3 - 1) + 3\ (3 - 2)$$
$$= 1 - 4 + 3 = 0$$

ข้อ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(-4-0) - 3(0-8) + 5\,(0-4)$$

$$= -4 + 24 - 20 = 0$$

ข้อ 3 แก้สมการโดยใช้ Cramer's rule

3.1) จาก $x + 2y = 3$

$3x + 4y = 10$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12-20}{4-6} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10-9}{4-6} = -\frac{1}{2}$$

นั่นคือ $x = 4,\ y = -\frac{1}{2}$

3.2) จาก $x + 4y = 2$

$2y - 3x = 5$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-20}{2-(-12)} = -\frac{8}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5-(-6)}{2-(-12)} = \frac{11}{14}$$

$$x = -\frac{8}{7}, \quad y = \frac{11}{14}$$

3,3)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ 3x - y &= 2 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1(0-0) - (-1)\ (0-0) + (-3)\ (-4+5)}{2(0-0) - (-1)\ (0-0) + (-3)\ (-6+1)}$$

$$x = \frac{-3}{15} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2\ (0 - 0) - 1(0 - 0) -3\ (15 - 2)}{15}$$

$$\therefore\ y = \frac{-39}{15} = \frac{-13}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2\ (-5+4) + 1(15 - 2) + 1\ (-6+1)}{15}$$

$$\therefore\ z = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

นั่นคือ $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{13}{5}$, $z = \frac{2}{5}$

ข้อ 4

หาค่า y โดยใช้ Cramer's rule

จาก

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= -2 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2\,(1-0) + 2\,(3-1) + 3\,(0-1)}{2\,(2-1) - 2\,(3-1) + 3\,(3-2)}$$

$$\therefore y = \frac{3}{1} = 3$$

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 5.6

ข้อ 1

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24$$

ข้อ 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (2)\,(-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-8)\,((-1)(7) - (5)\,(0)) = 56$$

ข้อ 3 ตอบ -64

ข้อ 4

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1)(3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 15\ (16 - 8) = 120$$

ข้อ 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\ (1 - 0) = 1$$

ข้อ 6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ลบแถวที่ (2) ด้วย 3 เท่าของแถวที่ (1) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

บวกแถวที่ (3) ด้วยแถวที่ (1) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ลบด้วยแถวที่ (4) ด้วย 2 เท่าของแถวที่ (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

ทรานสโพส (Transpose) เราได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-5) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} -6 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$+ (-3) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(-18 + 5) - 6(6 - 7) - 3(-5 + 21)$$

$$= 65 + 6 - 48 = 23$$