เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.1

ข้อ 1

1.1) $(-4, 2, 3, 5, -8) + (10, -5, -3, 1, 4) = (6, -3, 0, 6, -4)$

1.2) $(1, 2, 3) + (1, 2, 3, 0)$ บวกกันไม่ได้

1.3) $2(2, 1, -4) + (1, 0, -1)$

$= (4, 2, -8) + (1, 0, -1) = (5, 2, -9)$

1.4) $5(2, -2, 0) + 2(-4, 3, 1)$

$= (10, -10, 0) + (-8, 6, 2) = (2, -4, 2)$

1.5) $(4(2, 3) + 3(2, 4)) - 2(3, 4)$

$= ((8, 12) + (6, 12)) - (6, 8)$

$= (14, 24) - (6, 8) = (8, 16)$

ข้อ 2 จาก $\bar{x} = (1, 0, 2, -3)$, $\bar{y} = (4, 2, -5, 4)$, $\bar{z} = (0, 2, 1, -2)$

2.1) $\bar{x} - \bar{y} = (-3, -2, 7, -7)$

2.2) $\bar{y} - \bar{x} = (3, 2, -7, 7)$

2.3) $\bar{x} + \bar{y} = (5, 2, -3, 1)$

2.4) $\bar{y} + \bar{x} = (5, 2, -3, 1)$

2.5) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (5, 2, -3, 1) + (0, 2, 1, -2) = (5, 4, -2, -1)$

2.6) $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (1, 0, 2, -3) + (4, 4, -4, 2) = (5, 4, -2, -1)$

2.7) $2(\bar{x} + \bar{y}) = 2(5, 2, -3, 1) = (10, 4, -6, 2)$

2.8) $2\bar{x} + 2\bar{y} = 2(1,0,2,-3) + 2(4,2,-5,4)$

$= (2,0,4,-6) + (8,4,-10,8) = (10,4,-6,2)$

2.9) $(2 + 3)\bar{x} = 5(1,0,2,-3) = (5,0,10,-15)$

2.10) $2\bar{x} + 3\bar{x} = 2(1,0,2,-3) + 3(1,0,2,-3)$

$= (2,0,4,-6) + (3,0,6,-9)$

$= (5,0,10,-15)$

2.11) $2(3\bar{x}) = 2(3\ (1,0,2,-3))$

$= 2(3,0,6,-9) = (6,0,12,-18)$

2.12) $(2 \times 3)\bar{x} = 6(1,0,2,-3) = (6,0,12,-18)$

2.13) $0\bar{x} = 0(1,0,2,-3) = (0,0,0,0)$

2.14) $\bar{x} + \bar{0} = (1,0,2,-3) + (0,0,0,0)$

$= (1,0,2,-3)$

ข้อ 3

3.1) $(2,1,-3) + \bar{x} = \bar{0}$

$\therefore \bar{x} = (0,0,0) - (2,1,-3)$

$= (-2,-1,3)$

3.2) $(1,0,-1) + 3\bar{x} = (-1,0,1)$

$\therefore 3\bar{x} = (-1,0,1) - (1,0,-1)$

$= (-2,0,2)$

$\therefore \bar{x} = (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$

3.3) $(3,2) + 5\bar{x} = 3\bar{x} + (4,1)$

$\therefore\ 5\bar{x} - 3\bar{x} = (4,1) - (3,2)$

$\therefore\ 2\bar{x} = (1,-1)$

$\therefore\ \bar{x} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

ข้อ 4

4.1) <u>ตอบ</u> $\bar{x} = (-1,3)$, $y = (3,-4)$

จาก $2\bar{x} + \bar{y} = (1,2)$ ------------(1)

$\bar{x} + \bar{y} = (2,-1)$ ------------(2)

(1) − (2) $\therefore\ \bar{x} = (1,2) - (2,-1)$

$= (-1,3)$

แทน x ใน (2)

$\therefore\ (-1,3) + \bar{y} = (2,-1)$

$\therefore\ \bar{y} = (2,-1) - (-1,3)$

$= (3,-4)$

นั่นคือ $\bar{x} = (-1,3)$, $\bar{y} = (3,-4)$

4.2) <u>ตอบ</u> $\bar{x} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $\bar{y} = (\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{8}{3})$

จาก $4\bar{x} + 2\bar{y} = (1,3,0)$ -----------(1)

$\bar{x} + 2\bar{y} = (2,1,-4)$ -----------(2)

$$(1) - (2) \quad 3\bar{x} = (1,3,0) - (2,1,-4)$$
$$= (-1,2,4)$$
$$\bar{x} = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3})$$

แทน x ใน (2)

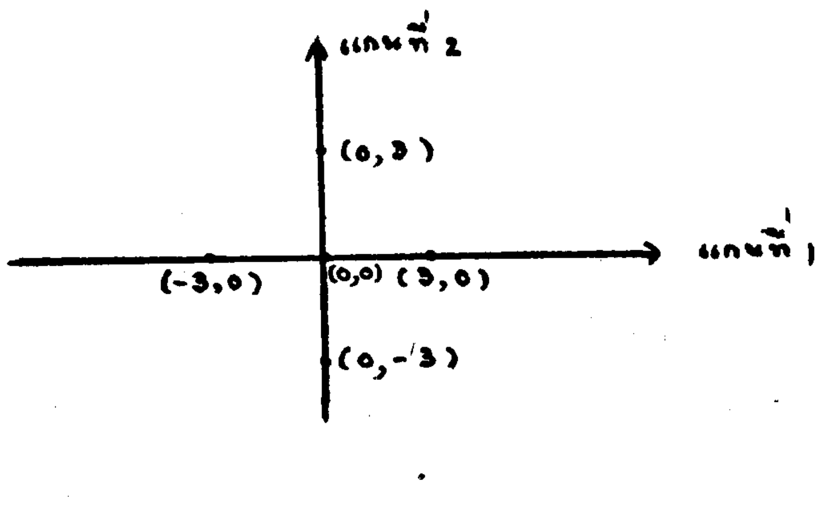
$$\therefore (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}) + 2\bar{y} = (2,1,-4)$$
$$\therefore 2\bar{y} = (2,1,-4) - (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3})$$
$$= (\tfrac{7}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{-16}{3})$$
$$\therefore \bar{y} = (\tfrac{7}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{-16}{6})$$

นั่นคือ $\bar{x} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ และ $\bar{y} = (\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-16}{6})$

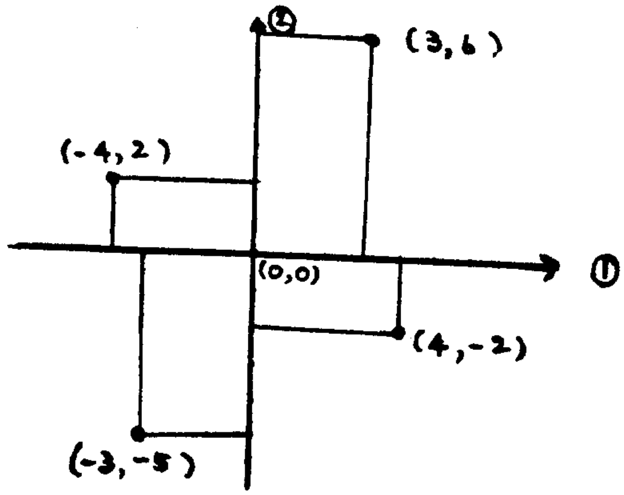
เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.2

ข้อ 1

1.1) จุด (3,0), (-3,0), (0,3), (0,-3)



1.2) จุด (3.6), (-4,2), (-3,-5), (4,-2)



ข้อ 2

จุดโคออร์ดิเนตของ A คือ (2,0)

จุดโคออร์ดิเนตของ B คือ (7,0)

จุดโคออร์ดิเนตของ C คือ (7,2)

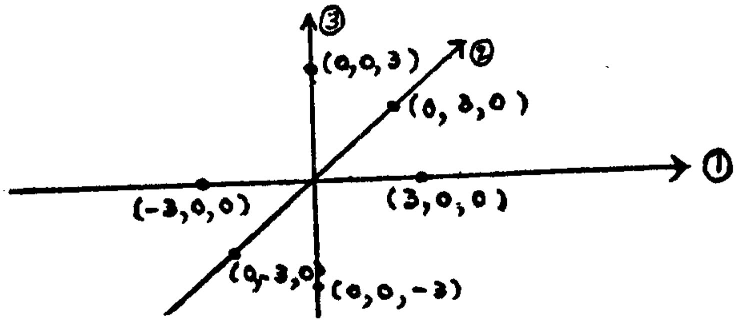
จุดโคออร์ดิเนตของ D คือ (0,2)

จุดโคออร์ดิเนตของ E คือ (0,4)

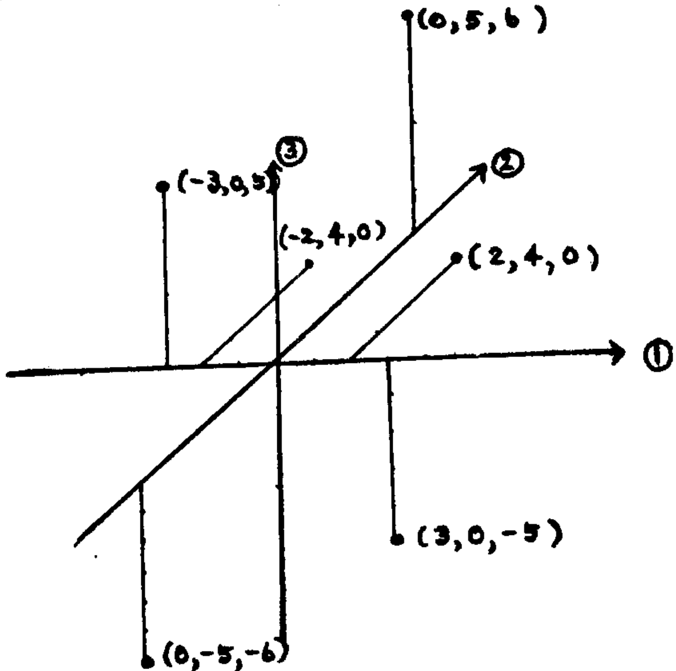
จุดโคออร์ดิเนตของ F คือ (2,4)

ข้อ 3 โดยการวางแกนโคออร์ดิเนต<u>ตามแบบที่ 1</u>

3.1) (3,0,0), (-3,0,0), (0,-3,0), (0,0,3), (0,0,-3) , (0,3,0)

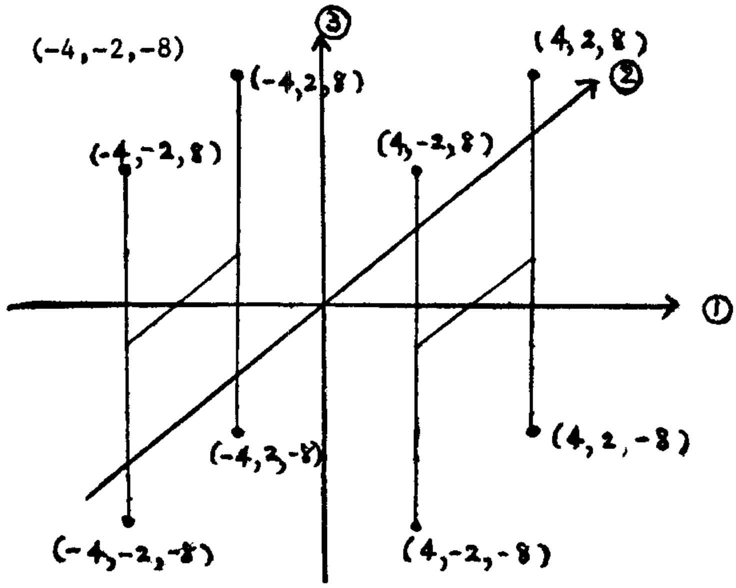


3.2) (2,4,0), (-2,4,0), (-3,0,5), (3,0,-5), (0,5,6), (0,-5,-6)



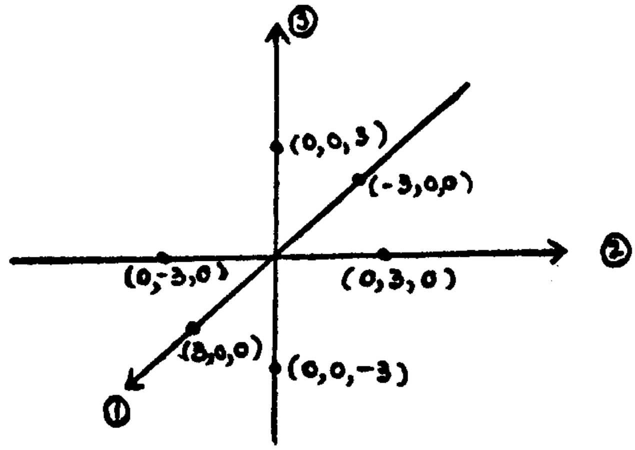
3.3) (4,2,8) (4,2,-8) (4,-2,8) (4,-2,-8) (-4,2,8) (-4,2,-8)

(-4,-2,8) (-4,-2,-8)

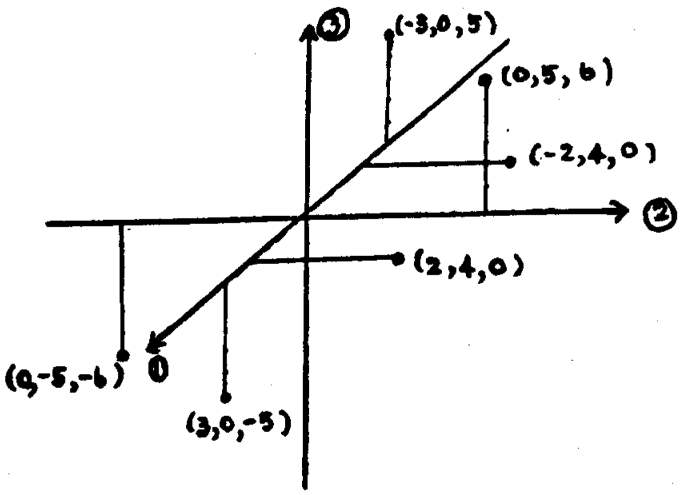


ข้อ 4 โดยการวาง แกนโคออร์ดิเนต <u>ตามแบบที่ 2</u>

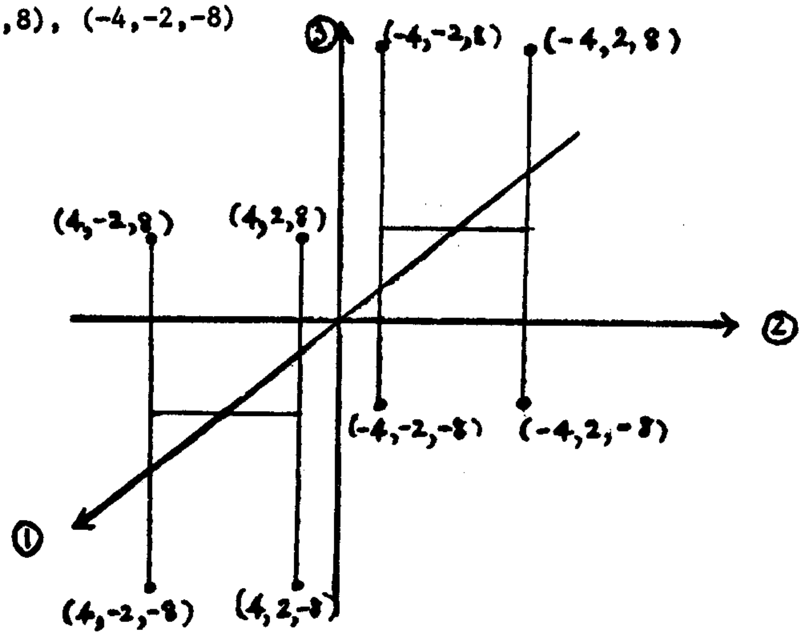
4.1) (3,0,0), (-3,0,0), (0,3,0), (0,-3,0), (0,0,3), (0,0,-3)



4.2) (2,4,0), (-2,4,0), (-3,0,5), (3,0,-5), (0,5,6), (0,-5,-6)



4.3) (4,2,8), (4,2,-8), (4,-2,8), (4,-2,-8), (-4,2,8), (-4,2,-8), (-4,-2,8), (-4,-2,-8)



เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.3

ข้อ 1 จากรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า A B C D E F

1.1) $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\overrightarrow{ED}$

1.2) $\overrightarrow{EF}$ เท่ากับ $\overrightarrow{CB}$

1.3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ เท่ากับ $\overrightarrow{AB}$

1.4) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$ เท่ากับ $\overrightarrow{EF}$

1.5) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}$ เท่ากับ $\overrightarrow{DC}$

ข้อ 2

2.1) $\overrightarrow{OP}$ = (1,6) และ $\overrightarrow{PQ}$ (คิดเป็น $\overrightarrow{OQ'}$) = (4,2)

จากสูตร $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ $(\overrightarrow{OQ})$

$\therefore \overrightarrow{OQ} = (1,6) + (4,2) = (5,8)$

นั่นคือ $\overrightarrow{OQ}$ แสดงได้ด้วย $(5,8)$

(ทำในทำนองเดียวกันทุกข้อ)

2.2) $\overrightarrow{OQ} = (-1,4) + (4,-1) = (3,3)$

2.3) $\overrightarrow{OQ} = (0,0) + (4,-2) = (4,-2)$

2.4) $\overrightarrow{OQ} = (-2,-5) + (-1,6) = (-3,1)$

2.5) $\overrightarrow{OQ} = (2,1,-4) + (-4,0,2)$

$= (-2,1,-2)$

2.6) $\overrightarrow{OQ} = (1,3,-1,-3) + (3,-2,-4,2)$

$= (4,1,-5,-1)$

2.7) $\overrightarrow{OQ} = (1,2,3,4,5,6) + (6,5,4,3,2,1)$

$= (7,7,7,7,7,7)$

ข้อ 3

3.1) ให้ $\overrightarrow{OP}$ แสดงได้ด้วย $(6,2)$ และ $c = 2$

จาก $\overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$

$\therefore \overrightarrow{OQ} = 2(6,2) = (12,4)$

นั่นคือ $\overrightarrow{OQ}$ แสดงได้ด้วย $(12,4)$

3.2) $\overrightarrow{OQ} = -3(-6,2) = (18,-6)$

3.3) $\overrightarrow{OQ} = 5(1,0,-5) = (5,0,-25)$

3.4) $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(-2,0,4,2,6)$

$= (-1,0,2,1,3)$

3.5) $\overrightarrow{OQ} = 8(8,3,2,1,4,-6,-2)$

$= (64,24,16,8,32,-48,-16)$

<u>เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.4</u>

ข้อ 1 จาก $\vec{P} : (1,-2)$, $\vec{Q} : (-2,1)$, $\vec{R} : (3,2)$, $\vec{S} : (-4,-1)$

1.1) $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$= (-2,1) - (1,-2) = (-3,3)$

1.2) $\overrightarrow{SR} = \vec{R} - \vec{S}$

$= (3,2) - (-4,-1) = (7,3)$

1.3) $\overrightarrow{PS} = \vec{S} - \vec{P}$

$= (-4,-1) - (1,-2) = (-5,1)$

1.4) $\overrightarrow{RQ} = (-5,-1)$

1.5) $\overrightarrow{QR} = (5,1)$

1.6) $\overrightarrow{PP} = \vec{P} - \vec{P}$

$= (1,-2) - (1,-2) = (0,0)$

1.7) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (-3,3) + (5,1)$

$= (2,4) = \overrightarrow{PR}$

1.8) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = (-5,1) + (7,3)$

$= (2,4) = \overrightarrow{PR}$

ข้อ 2 จาก $\vec{A} : (1,2,0,3)$, $\vec{B} : (-2,0,1,-4)$, $\vec{C} : (1,-5,0,4)$

2.1) $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (1,-5,0,4) - (1,2,0,3)$

$= (0,-7,0,1)$

2.2) $\overrightarrow{CA} = \vec{A} - \vec{C} = (0,7,0,-1)$

2.3) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-2,0,1,-4) - (1,2,0,3)$

$= (-3,-2,1,-7)$

2.4) $\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (1,-5,0,4) - (-2,0,1,-4)$

$= (3,-5,-1,8)$

2.5) $\overrightarrow{CB} = \vec{B} - \vec{C} = (-2,0,1,-4) - (1,-5,0,4)$

$= (-3,5,1,-8)$

ข้อ 3

$\vec{B}, \vec{C}, \vec{F}$ ขนานกัน $(\because \vec{B} = 3\vec{F} = \frac{1}{3}\vec{C})$

$\vec{D}$ ขนานกับ $\vec{E}$ $(\because \vec{D} = \frac{5}{6}\vec{E})$

ข้อ 4 จาก $\vec{P} : (2,3)$, $\vec{Q} : (0,5)$, $\vec{R} : (-2,2)$, $\vec{S} = (3,-3)$

4.1) $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$= (0,5) - (2,3) = (-2,2)$

และ $\overrightarrow{RS} = \vec{S} - \vec{R}$

$= (3,-3) - (-2,2) = (5,-5)$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{RS}$

หรือเขียนได้ว่า $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{RS}$ โดย $c = -\frac{2}{5}$

นั่นแสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\overrightarrow{RS}$ โดยมีทิศทางไปในทางตรงกันข้าม

4.2) $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$= (0,5) - (2,3) = (-2,2)$

$\overrightarrow{OR} = (-2,2) - (0,0) = (-2,2)$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$

หรือเขียนได้ว่า $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{OR}$ โดย $c = 1$ นั่นเอง

นั่นแสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OR}$ (เขียนสั้น ๆ เป็น $\vec{R}$) โดยมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

4.3) จาก $\vec{R} = (-2,2)$

และ $\vec{S} = (3,-3)$

$\therefore \vec{R} = -\frac{2}{3} \vec{S}$

นั่นแสดงว่า $\vec{R}$ ขนานกับ $\vec{S}$ โดยมีทิศทางตรงกันข้าม

ข้อ ๕

5.1) $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$= (4,3) - (2,-1) = (2,4)$

$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q}$

$= (-1,-7) - (4,3) = (-5,-10)$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{QR}$

แสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\overrightarrow{QR}$ โดยผ่านจุด Q ร่วมกัน

ดังนั้น P,Q,R จึงอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ข้อ 6 จาก $\vec{P} = a\vec{Q} + b\vec{R}$ ถ้า $a + b = 1$ แล้ว

จะได้ว่า P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

6.1) จาก $\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{Q} - \frac{1}{2}\vec{R}$

ได้ว่า $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ a + b \neq 1$

แสดงว่า P,Q,R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

6.2) P,Q,R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (โดย $a = 1$, $b = 1$)

6.3) P,Q,R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (โดย $a = 1$, $b = -1$)

6.4) P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

$\because\ P = 2Q - R$

ได้ว่า $a = 2$, $b = -1$

$\therefore\ a + b = 1$

แสดงว่า P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

6.5) P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (โดย $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$)

6.6) P,Q,R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (โดย $a = 4$, $b = -5$)

6.7) P,Q,R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (โดย $a = 2$, $b = 3$)

ข้อ 7 จาก P : (2,0), Q : (3,-4), R : (1,-2), S : (0,2)

<u>ตอนที่ 1</u> จะแสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$= (3,-4) - (2,0) = (1,-4)$

$\overrightarrow{RS} = \vec{S} - \vec{R}$

$= (0,2) - (1,-2) = (-1,4)$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

นั่นแสดงว่า $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\overrightarrow{RS}$

<u>**ตอนที่ 2**</u> จะแสดงว่า $\overrightarrow{PS}$ ขนานกับ $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{PS} = \vec{S} - \vec{P}$

$= (0,2) - (2,0) = (-2,2)$

$\overrightarrow{RQ} = \vec{Q} - \vec{R}$

$= (3,-4) - (1,-2) = (2,-2)$

$\therefore \overrightarrow{PS} = -\overrightarrow{RQ}$

นั่นแสดงว่า $\overrightarrow{PS}$ ขนานกับ $\overrightarrow{RQ}$

จาก (1) และ (2) เราสรุปได้ว่า P Q R S เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยมีด้าน PQ ขนานกับด้าน RS และมีด้าน PS ขนานกับ RQ

<u>เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.5</u>

ข้อ 1

1.1) จาก $P = (3,-4)$

$\therefore |\vec{P}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

1.2) $Q = (-2,0)$

$\therefore |\vec{Q}| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2}$

$= 2$

1.3) จาก R = (3,4)

$$\therefore \quad |\vec{R}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

1.4) จาก S : (-3,-4)

$$\therefore \quad |\vec{S}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

ข้อ 2

2.1) P : (-5,2), Q : (0,8)

$$\therefore \quad d\,(P,Q) = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{61}$$

2.2) P : (-1, -2), Q : (-3,-4)

$$\therefore \quad d(P,Q) = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{8}$$

2.3) P : (3,2), Q : (1,4)

$$\therefore \quad d\,(P,Q) = \sqrt{(1-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$$

2.4) P : (-2,4), Q = (-2,17)

$$\therefore \quad d\,(P,Q) = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (17 - 4)^2} = 13$$

2.5) P : (a + b, 0) , Q : (0, a + b)

$$\therefore \quad d\,(P,Q) = \sqrt{(0 - (a + b))^2 + ((a + b) - 0)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 4ab}$$

$$= \sqrt{2\,(a^2 + 2ab + b^2)}$$

$$= \sqrt{2\,(a + b)^2}$$

$$= (a + b)\sqrt{2}$$

2.6) P : (1,0,3), Q : (3,-2,4)

$$\therefore \; d\,(P,Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (4-3)^2} = 3$$

2.7) P : (a, a-b, 0), Q : (0, a + b, 1)

$$\therefore \; d\,(P,Q) = \sqrt{(0-a)^2 + ((a+b)-(a-b))^2 + (1-0)^2}$$

$$= \overline{a^2 + 4b^2 + 1}$$

2.8) P : (1, -2,3,-4), Q : (2,1,0,-4)

$$\therefore \; d\,(P,Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-2))^2 + (0-3)^2 + (-4-(-4))^2}$$

$$= \sqrt{19}$$

ข้อ 3 จาก A B C เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมี A : (3,2), B : (1,-1), C : (0,1)

$$\therefore \; d\,(A,B) = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{13} = 3.606$$

$$d\,(B,C) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{5} = 2.236$$

$$d\,(C,A) = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{10} = 3.162$$

$\therefore$ ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC $= 3.606 + 2.236 + 3.162$

$$= 9.004$$

ข้อ ๔ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมี A : (-4,2), B : (-1,-1), C : (1,1)

$$\therefore \quad d(A,B) = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8}$$

$$d(C,A) = \sqrt{(-4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

จะเห็นว่า $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

นั่นแสดงว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก, มุม B เป็นมุมฉาก, AB เป็นฐาน และ BC เป็นส่วนสูง

$\therefore$ พื้นที่ของ ABC $= \frac{1}{2}(AB)(BC)$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{18})(\sqrt{8})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{144}$$

$$= \frac{1}{2}(12) = 6$$

ดังนั้น มุมฉาก ABC มีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย

ข้อ ๕ จากจุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (2,-1)

และผ่านจุด (4,-3) คือจุด (4,-3) อยู่บนเส้นรอบวง

ดังนั้นรัศมีก็คือ ระยะทางระหว่างจุด (2,-1) กับ (4,-3) ซึ่งเท่ากับ

$\sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{8}$

ดังนั้นรัศมีของวงกลม คือ $2\sqrt{2}$

ข้อ ๖ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมี A : (4,4), B : (1,2), C : (2,1)

$\therefore \; d(A,B) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}$

$d(B,C) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$

$d(C,A) = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$

จะเห็นว่าสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB เท่ากับด้าน AC

แสดงว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ข้อ ๗ สมมุติให้ P : (2,-1), Q : (4,3), R : (-1,-7)

$\therefore \; d(P,Q) = \sqrt{(4-2)^2 + (3-(-1))^2} = 2\sqrt{5}$

$d(Q,R) = \sqrt{(-1-4)^2 + (-7-3)^2} = 5\sqrt{5}$

$d(P,R) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-7-(-1))^2} = 3\sqrt{5}$

จะเห็นว่า $d(Q,R) = d(P,Q) + d(p,R)$

นั่นคือ ความยาวของ QR เท่ากับผลรวมของความยาว QP กับ PR

นั่นแสดงว่า P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(<u>หมายเหตุ</u> เราอาจแสดงได้อีกวิธี โดยใช้ความรู้ในหัวข้อ 4.4)

ข้อ 8 จากจุด A : (4,x), B : (-5,2), C : (13,-6)

$$d(A,B) = \sqrt{(-5-4)^2 + (2-x)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 4 - 4x + x^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 85}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(13-4)^2 + (-6-x)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 36 + 12x + x^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 12x + 117}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $d(A,B) = d(A,C)$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 4x + 85} = \sqrt{x^2 + 12x + 117}$$

$$x^2 - 4x + 85 = x^2 + 12x + 117$$

$$16x = -32$$

ดังนั้น $x = -2$

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.6

ข้อ 1 สมมุติให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ในแต่ละข้อ

1.1) A : (4,-4), B : (6,2)

$$\therefore C = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$$

$$= (5,-1)$$

1.2) A : (a -b, c -d), B : (a + b, c + d)

$$\therefore \quad C = \left(\frac{a - b + a + b}{2}, \frac{c - d + c + d}{2}\right)$$

$$= (a, c)$$

1.3) $C = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 1.4) $C = (2, 2, -2)$

1.5) $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \frac{19}{2}\right)$

ข้อ 2 สมมุติให้ C เป็นจุดซึ่งแบ่ง AB ในอัตราส่วน 1 : 3

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุด C ในแต่ละข้อ คือ $\frac{3}{1+3}A + \frac{1}{1+3}B$

2.1) A : (4,-4), B : (6,2)

$$\therefore \quad C = \frac{3}{4}(4,-4) + \frac{1}{4}(6,2)$$

$$= \left(\frac{18}{4}, \frac{-10}{4}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-5}{2}\right)$$

2.2) A : (a -b, c - d), B : (a + b, c + d)

$$\therefore \quad C = \frac{3}{4}(a - b, c - d) + \frac{1}{4}(a + b, c + d)$$

$$= \left(\frac{3a - 3b}{4}, \frac{3c - 3d}{4}\right) + \left(\frac{a + b}{4}, \frac{c + d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{3a - 3b + a + b}{4}, \frac{3c - 3d + c + d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{4a - 2b}{2}, \frac{4c - 2d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{2a - b}{2}, \ \frac{2c - d}{2}\right)$$

2.3) $C = \left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}\right)$ 2.4) $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -3\right)$

2.5) $C = \left(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{21}{4}, \frac{29}{4}, \frac{37}{4}\right)$

ข้อ ๓ สมมติให้ C เป็นจุดแบ่ง AB ในอัตราส่วน 4 : 3 ดังนั้น

โคออร์ดิเนตของจุด C ในแต่ละข้อ คือ $\frac{3}{4+3}A + \frac{4}{4+3}B$

3.1) A : (4,−4), B : (6,2)

$$\therefore C = \frac{3}{7}(4,-4) + \frac{4}{7}(6,2)$$

$$= \left(\frac{12}{7}, \frac{-12}{7}\right) + \left(\frac{24}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{36}{7}, \frac{-4}{7}\right)$$

3.2) A : (a − b, c − d), B ; (a + b, c + d)

$$\therefore C = \frac{4}{7}(a - b, c - d) + \frac{3}{7}(a + b, c + d)$$

$$= \left(\frac{4a - 4b + 3a + 3b}{7}, \frac{4c - 4d + 3c + 3d}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{7a - b}{7}, \ \frac{7c - d}{7}\right)$$

3.3) $C = \left(\frac{22}{7}, \frac{26}{7}\right)$ 3.4) $C = \left(\frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{-16}{7}\right)$

3.5) $C = (\frac{10}{7}, \frac{24}{7}, \frac{38}{7}, \frac{52}{7}, \frac{66}{7})$

ข้อ 4 จาก A B C เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมี A : (4,3), B : (6, -3) C : (-2, -5)

ให้ D,E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ AC ตามลำดับ

$\because$ A : (4,3), B : (6,-3)

$$\therefore D = (\frac{4+6}{2}, \frac{3-3}{2})$$

$$= (5, 0)$$

$\because$ B : (6,-3), C : (-2,-5)

$$\therefore E = (\frac{6-2}{2}, \frac{-3-5}{2})$$

$$= (2,-4)$$

$\because$ A : (4,3), C : (-2,-5)

$$\therefore F : (\frac{4-2}{2}, \frac{3-5}{2})$$

$$= (1,-1)$$

และความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจาก B ไปยังด้าน AC ก็คือความยาวของ BF นั่นเอง

ซึ่ง B : (6,-3), F : (1,-1)

$$(B,F) = \sqrt{(1-6)^2 + (-1-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{25+4}$$

$$= \sqrt{29}$$

นั่นคือ ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจาก B ไปยังด้าน AC คือ $\sqrt{29}$

ข้อ ๕ จาก ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยมี A : (1,2), B : (2,0)
C : (4,1), D : (3,3) และมี AC กับ BD เป็นเส้นทะแยงมุม
ให้ E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ BD ตามลำดับ
จาก A : (1,2), C : (4,1)

$$\therefore \quad E = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

จาก B : (2,0), D : (3,3)

$$\therefore \quad F = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

จะเห็นว่า โคออร์ดิเนตของจุด E กับ F เท่ากัน
นั่นคือ E กับ F ซึ่งเป็นจุดแบ่งครึ่งเส้นทะแยงมุม AC กับ BD
ตามลำดับ เป็นจุดเดียวกัน

นั่นแสดงว่า เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ข้อ ๖ จาก ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมี A : (-5,2), B : (-3,-4), C : (1,6)
ให้ D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC ตามลำดับ
จาก A : (-5,2), B : (-3,-4)

$$\therefore \quad D : \left(\frac{-5-3}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$$

$$= (-4,-1)$$

จาก A : (-5,2), C : (1,6)

$\therefore$ E = $(\frac{-5+1}{2}, \frac{2+6}{2})$

= (-2,4)

จาก D : (-4,-1) และ E (-2,4)

$\therefore$ d (D,E) = $\sqrt{(-2-(-4))^2 + (4-(-1))^2}$

= $\sqrt{29}$

จาก B : (-3,-4) กับ C : (1,6)

$\therefore$ d (B,C) = $\sqrt{(1-(-3))^2 + (6-(-4))^2}$

= $\sqrt{116}$

จะเห็นว่า $\sqrt{116}$ = 2 $\sqrt{29}$

นั่นแสดงว่า d (B,C) = 2d(D,E)

หรือ d(D,E) = $\frac{1}{2}$ d (B,C)

นั่นก็คือ เส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้าน AB กับ AC มีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้าน BC

ข้อ 7 ให้ C : (5,3) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB

ซึ่ง A : (-4,5) และ B : (x,y)

นั่นคือ C = $(\frac{-4+x}{2}, \frac{5+y}{2})$

หรือ $(5,3) = (\frac{-4+x}{2}, \frac{5+y}{2})$

$$\frac{-4+x}{2} = 5$$

$$x = 14$$

และ $\frac{5+y}{2} = 3$

$$y = 1$$

นั่นคือ จุด B มีโคออร์ดิเนต $(14,1)$

ข้อ 8 ให้จุดปลายของเส้นผ่าวงกลมทั้งสองคือ A กับ B

โดยมี $A : (-5,7)$ และ $B : (3,5)$

ให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นผ่าศูนย์กลาง AB ซึ่งจะได้ว่า

C จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย

$$\therefore C = (\frac{-5+3}{2}, \frac{7+5}{2})$$

$$= (-1,6)$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้คือ จุด $(-1,6)$

โดยมี AC และ BC เป็นรัศมี

ซึ่ง $A : (-5,7)$, $C : (-1,6)$

$$\therefore d(A,C) = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (6-7)^2}$$

$$= \sqrt{17}$$

นั่นคือ วงกลมนี้มีรัศมียาว $\sqrt{17}$

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.7

ข้อ 1

1.1) $y = \frac{1}{2}$

1.2) $y = -6$

1.3) $y = 0$

1.4) $x = 3$

1.5) $x = \frac{-3}{4}$

1.6) $x = 0$

1.7) $x = 4$

1.8) $y = -4$

ข้อ 2

2.1) จุด (1,1) กับ (3,3)

จากสูตร $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore$ สมการคือ $\frac{y - 1}{x - 1} = \frac{3 - 1}{3 - 1}$

$\therefore \; y - 1 = x - 1$

ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $y = x$

2.2) จุด (4,3) กับ (1,4)

$\therefore \; \frac{y - 3}{x - 4} = \frac{4 - 3}{1 - 4}$

$\frac{y - 3}{x - 4} = \frac{1}{-3}$

$-3y + 9 = x - 4$

ดังนั้นสมการคือ $x + 3y - 13 = 0$

2.3) จุด (-4,1) กับ (-1,4)

$$\therefore \frac{y-1}{x-(-4)} = \frac{4-1}{-1-(-4)}$$

ดังนั้นสมการคือ $y - x - 5 = 0$

2.4) $y - x + 1 = 0$

2.5) $y + x + 5 = 0$

2.6) $x - 4 = 0$

2.7) $x + 5 = 0$

2.8) $y - 5 = 0$

2.9) $y + 2 = 0$

2.10) $3y - 2x = 0$

ข้อ ๓

3.1) ผ่านจุด (4,3), ความชัน -2

จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 3 = -2(x - 4)$

ดังนั้น สมการคือ $y + 2x - 11 = 0$

3.2) ผ่านจุด (2,-4) ความชัน $\frac{3}{4}$

$\therefore y - (-4) = \frac{3}{4}(x - 2)$

ดังนั้น สมการคือ $4y - 3x + 22 = 0$

3.3) ผ่านจุด (-1,-3), ความชัน $-\frac{1}{2}$

$\therefore y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - (-1))$

ดังนั้นสมการคือ $2y + x + 7 = 0$

3.4) $y - x + 4 = 0$

3.5) $y + 3 = 0$

3.6) $y + 3 = 0$

3.7) $y = 0$

3.8) $x = 0$

3.9) $y - 2x + 6 = 0$

3.10) $y - 3x - 5 = 0$

ข้อ 4

4.1) จุดตัดแกน X คือ (3,0) และจุดตัดแกน Y คือ (0,4)

จากสมการเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด (a,0) ตัดแกน Y ที่จุด (0,b)

คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

4.2) จุดตัดแกน X คือ (3,0) จุดตัดแกน Y คือ (0,-4)

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$

4.3) $\frac{y}{4} - \frac{x}{3} = 1$

4.4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -1$

ข้อ 5

5.1) จุด (2,1) กับ (3,2)

จาก $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ เป็นความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1,y_1) และ (x_2,y_2)

$\therefore\ m = \frac{2 - 1}{3 - 2}$

ดังนั้นความชันคือ 1

5.2) จุด (4,1) กับ (-2,-1)

$\therefore \quad m = \frac{-1-1}{-2-4}$

ดังนั้น ความชันคือ $\frac{1}{3}$

5.3) -1

5.4) ไม่มีความชัน

5.5) 0

5.6) $\frac{b - a}{2b}$

5.7) -1

ข้อ 6

6.1) สมการ $3x - 5y = 15$

หาความชัน

$\therefore \quad 5y = 3x - 15$

$\therefore \quad y = \frac{3}{5}x - 3$

ดังนั้น ความชันคือ $\frac{3}{5}$

เนื่องจากความชันเป็นจำนวนบวก ดังนั้นเส้นตรงทำมุมเป็นมุมแหลมกับแกน X

<u>หาจุดตัดแกน X</u> แทน $y = 0$ ลงในสมการที่โจทย์กำหนด

$\therefore \quad 3x - 5(0) = 15$

$\therefore \quad x = 5$

จุดตัดแกน X คือ (5,0)

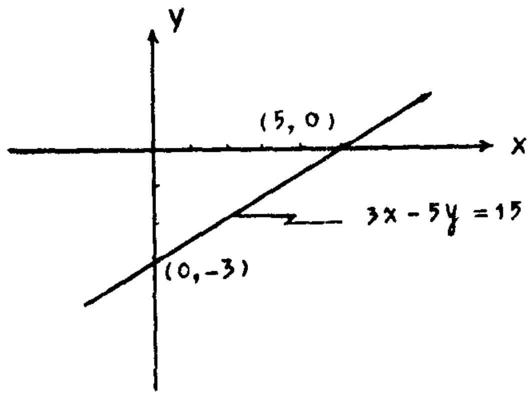
<u>หาจุดแกน Y</u> : แทน $y = 0$ ลงในสมการที่โจทย์กำหนด

$\therefore 3(0) - 5(y) = 15$

$\therefore y = -3$

จุดตัดแกน y คือ (0 , - 3)

แสดงกราฟของเส้นตรงที่มีสมการ $3x - 5y = 15$ คือ



6.2) สมการ $3x + 4y - 12 = 0$

<u>ความชัน</u> $4y = -3x + 12$

$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 3$

ความชันคือ $-\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนลบ

ดังนั้น เส้นตรงที่มีสมการ $3x + 4y - 12 = 0$ ทำมุมกับแกน X เป็นมุมป้าน

<u>หาจุดตัดแกน X</u> ให้ $y = 0$

$\therefore 3(x) + 4(0) - 12 = 0$

$\therefore x = 4$

จุดตัดแกน X คือ (4,0)

<u>หาจุดตัดแกน Y</u>

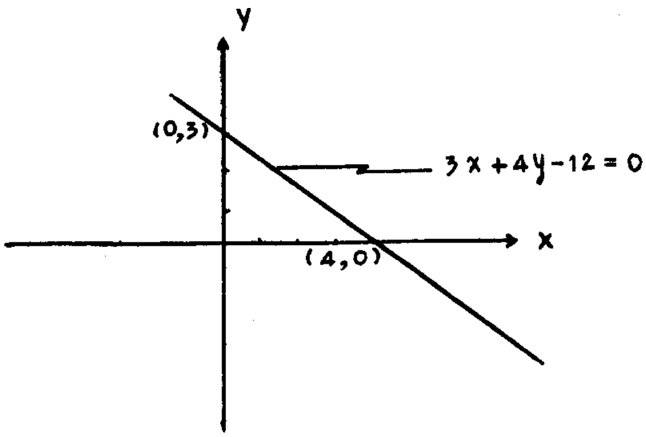
ให้ $x = 0$

$\therefore \quad 3(0) + 4y - 12 = 0$

$\therefore \quad Y = 3$

จุดตัดแกน Y คือ (0,3)

กราฟของเส้นตรงนี้คือ



6.3) ความชันคือ 3

เส้นตรงทำมุมกับแกน X เป็นมุมแหลม

จุดตัดแกน X คือ $(-\frac{1}{2}, 0)$

จุดตัดแกน Y คือ $(0, \frac{3}{2})$

6.4) ความชันคือ $-\frac{1}{2}$

เส้นตรงทำมุมกันแกน X เป็นมุมป้าน

จุดตัดแกน x คือ (0,0)

จุดตัดแกน Y คือ (0,0)

6.5) ความชันคือ $-\frac{2}{3}$

เส้นตรงทำมุมกับแกน x เป็นมุมป้าน

จุดตัดแกน X คือ (6,0)

จุดตัดแกน Y คือ (0,4)

6.6) ความชันคือ 1

เส้นตรงทำมุมกับแกน X เป็นมุมแหลม

จุดตัดแกน X และแกน Y คือ (0,0)

6.7) ความชันคือ -1

เส้นตรงทำมุมกับแกน X เป็นมุมป้าน

จุดตัดแกน X คือ (3,0)

จุดตัดแกน Y l o (0,3)

6.8) ความชัน no 0 (ศูนย์)

เส้นตรงทำมุมกับแกน X เป็นมุม 0 ' (ศูนย์องศา)

คือขนานกับแกน X

จุดตัดแกน X ไม่มี

จุดตัดแกน Y คือ (0,4)

6.9) ความชัน ไม่มีความชัน

เส้นตรงทำมุมกับแกน X เป็นมุม 9 0 ' ๖(มุมฉาก)

จุดตัดแกน X คือ (-2,0)

จุดตัดแกน Y ไม่มี

ข้อ 7 ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,3)$ กับ $(1,-5)$

คือ $m = \frac{-5-3}{1-k} = \frac{-8}{1-k}$

แต่ $m = 4$ (จากโจทย์)

$\therefore \frac{-8}{1-k} = 4$

$-8 = 4 - 4k$

$\therefore 4k = 12$

ดังนั้น $k = 3$

ข้อ 8 เส้นตรง $2kx + 3y + k - 3 = 0$ ผ่านจุด $(1,-3)$

ดังนั้น จุดนี้ต้องสอดคล้องกับสมการ

unu $(1,-3)$ ลงในสมการ (คือแทน $x = 1$, $y = -3$ ลงในสมการ)

$2k(1) + 3(-3) + k - 3 = 0$

$\therefore 3k = 12$

ดังนั้น $k = 4$

ข้อ 9 จากโจทย์ เส้นตรง $5x - ky + 8 = 0$ มีความชันเป็น $\frac{2}{3}$

$\therefore -ky = -5x - 8$

$Y = \frac{5}{k}x + \frac{8}{k}$

ความชันคือ $\frac{5}{k}$

แต่โจทย์กำหนดว่า ความชันของเส้นตรงนี้เป็น $\frac{2}{3}$

$$\therefore \quad \frac{5}{k} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $k = \frac{15}{2}$

ข้อ 10 จากสมการของเส้นตรงคือ $kx - y = 3k - 6$

มีจุดตัดแกน x (X - intercept) A (5,0) คือผ่านจุด (5,0)

แทน (5,0) ลงในสมการ (คือแทน $x = 5$, $y = 0$)

$$k(5) + 0 = 3k - 6$$

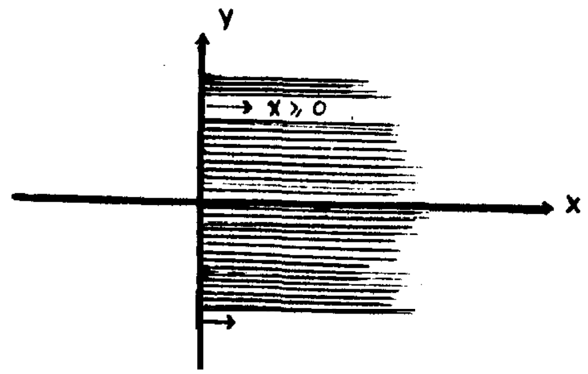
$$2k = -6$$

ดังนั้น $k = -3$

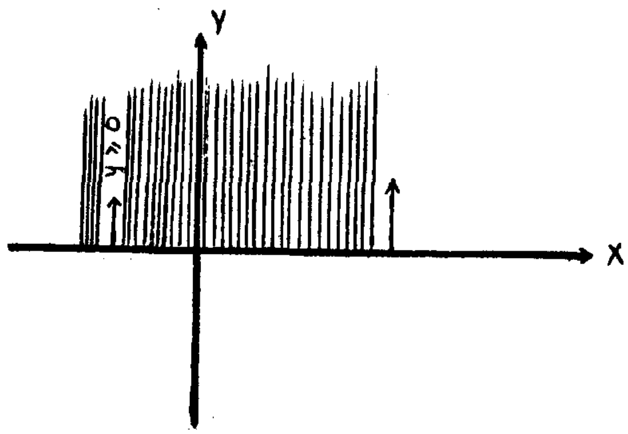
เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 4.8

ข้อ 1

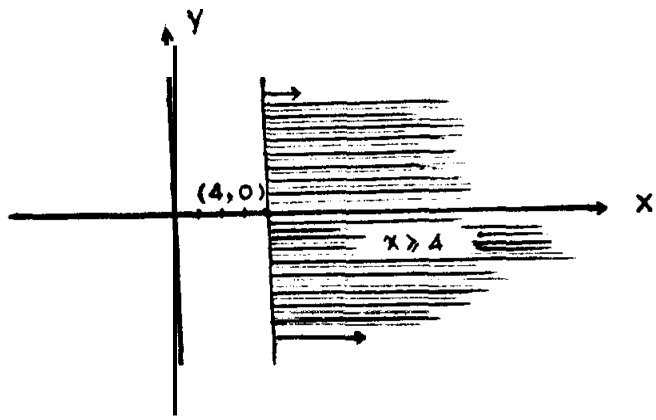
1.1) กราฟ ของ $x \geqslant 0$ คือ



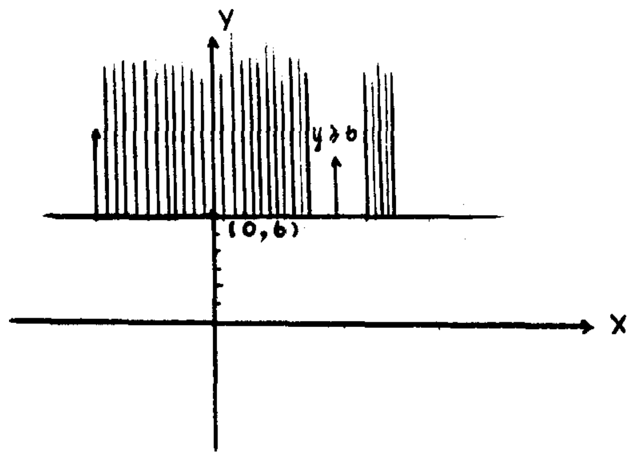
1.2) กราฟ ของ $y \geqslant 0$ คือ



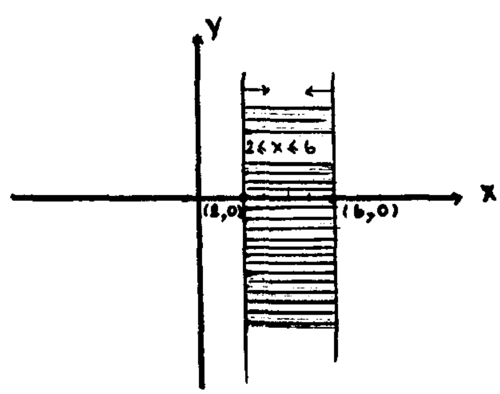
1,3) กราฟของ $x \geqslant 4$ คือ



1.4) กราฟของ $y \geqslant 6$ คือ



1.5) กราฟของ $2 \leqslant x \leqslant 6$ คือ



1,6) $3x + 2y \leq 18$

ให้ $H = \{ (x,y) \mid 3x + 2y \leq 18 \}$

กราฟเส้นตรง $L : 3x + 2y = 18$

หาจุดตัดแกน X ให้ $y = 0$

$\therefore 3(x) + 2(0) = 18$

$x = 6$

จุดตัดแกน X คือ $(6,0)$

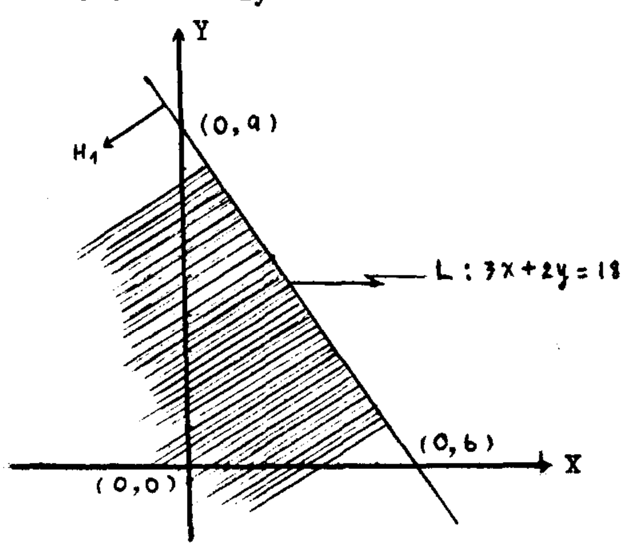
หาจุดตัดแกน y ให้ $x = 0$

$\therefore 3(0) + 2Y = 18$

$Y = 9$

$\therefore$ จุดตัดแกน Y คือ $(0,9)$

กราฟของเส้นตรง $L : 3x + 2y = 18$ คือ



ทดสอบด้วยจุด $(0,0)$ ลงใน $H = \{(x,y) \mid 3x \leq 18$

ได้ $3(0) + 2(0) \leq 18$ เป็นจริง

ดังนั้น จึงได้ว่า ครึ่งของระนาบที่ถูกแบ่งโดยเส้นตรง L และมีจุด (0,0) อยู่ด้วย เป็นกราฟของ H ดังรูป ในหน้า 488

1.7) กำหนดให้ $H = \{(x,y) \mid 4x + y \geq 40\}$

เรากราฟเส้นตรง $L : 4x + y = 40$ ก่อน

โดยมีจุดตัดแกน x คือ (10,0)

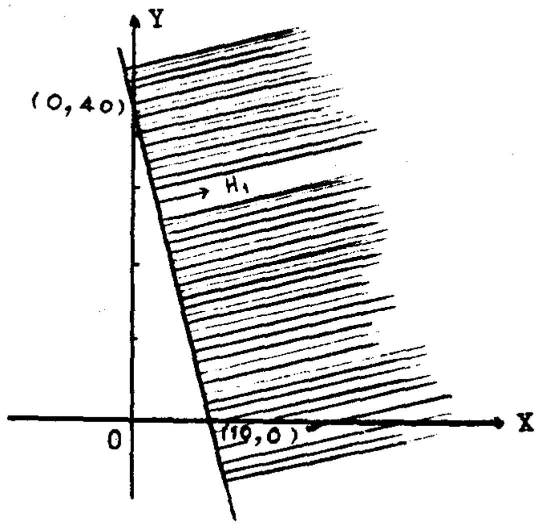
และมีจุดตัดแกน Y คือ (0,40)

แล้วกราฟเส้นตรง $L : 4x + y = 40$ ดังรูป

ทดสอบด้วยจุด (0,0) ลงใน $H = \{(x,y) \mid 4x + y \geq 40\}$

ได้ $4(0) + 0 \geq 40$ ไม่จริง

ดังนั้น จึงได้ว่า ครึ่งของระนาบที่ถูกแบ่งโดยเส้นตรง L และไม่มีจุด (0,0) อยู่ เป็นกราฟของ H ที่เราต้องการ ดังรูป



1.8) $5x + 8y \leq 20$, $3x + 10y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

สมมุติกราฟที่เราต้องการคือ

$H_1 = \{(x,y) \mid 5x + 8y \leq 20\}$

$H_2 = \{(x,y) \mid 3x + 10y \leq 10\}$

$H_3 = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$

$H_4 = \{(x,y) \mid Y \geq 0\}$

<u>กราฟของ H_1</u>

เราได้ว่า L_1: $5x + 8y = 20$ ตัดแกน X ที่จุด (4,0)
และตัดแกน y ที่จุด $(0, \frac{5}{2})$

แล้วแทนจุด (0,0) ลงใน H_1 ได้ $5(0) + 8(0) \leq 20$ เป็นจริง

ดังนั้น กราฟของ H_1 ก็คือ ครึ่งของระนาบที่มีจุด (0,0) อยู่ด้วย

<u>กราฟของ H_2</u>

เราได้ว่า L_2 : $3x + 10y = 10$ ตัดแกน X ที่จุด $(\frac{10}{3}, 0)$

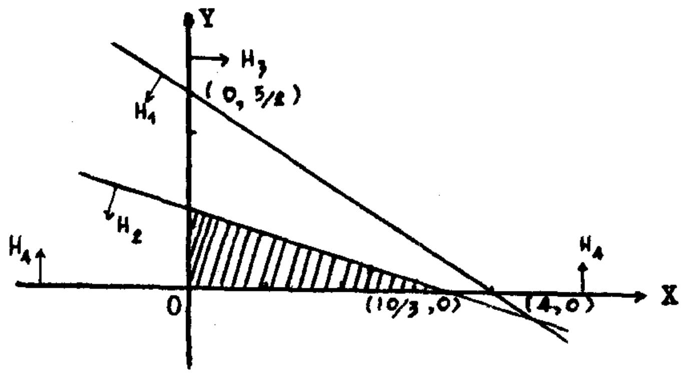
และตัดแกน Y ที่จุด (0,1)
แล้วแทน จุด (0,0) ลงใน H_2 ได้ $3(0) + 10(0) \leq 10$ เป็นจริง

ดังนั้น กราฟของ H_2 ก็คือ ครึ่งของระนาบที่มีจุด (0,0) อยู่ด้วย (ดังรูป)

<u>กราฟของ H_3</u> เช่นเดียวกับข้อ 1.1 ดังรูป

<u>กราฟของ H_4</u> เช่นเดียวกับข้อ 1.2 ดังรูป

ดังนั้น กราฟ $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ คือส่วนที่แรเงาของรูป



1.9) $2x + 3y \geq 6$, $4x + y \geq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

สมมุติกราฟที่ต้องการคือ

$H_1 = \{(x,y) \mid 2x + 3y \geq 6\}$

$H_2 = \{(x,y) \mid 4x + y \geq 40\}$

$H_3 = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$

$H_4 = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$

กราฟของ H_1

เราได้ว่า $L1 : 2x + 3y = 6$ ตัดแกน X ที่จุด (3,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,2) แล้วแทนจุด (0,0) ลงใน H_1 ได้ $2(0) + 3(0) \geq 6$ ไม่จริง

ดังนั้น กราฟของ H_1 ก็คือ ครึ่งของระนาบที่ไม่มีจุด (0,0) อยู่

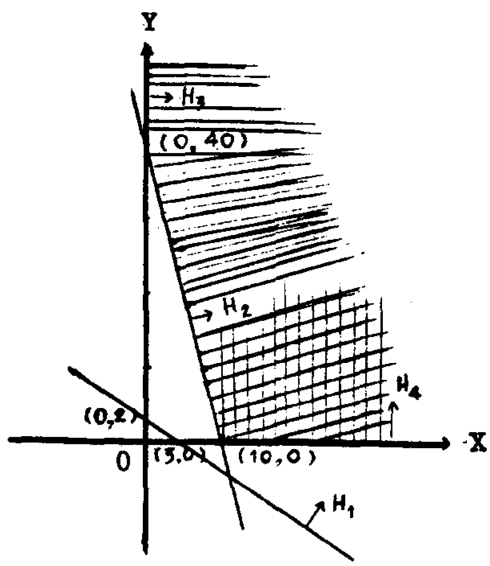
กราฟของ H_2

เราได้ว่า L_2 : $4x + y = 40$ ตัดแกน X ที่จุด (10,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,40) แล้วแทนจุด (0,0) ลงใน H_2 ได้ $4(0) + 0 \geq 40$ ไม่จริง ดังนั้น กราฟของ H_2 ก็คือครึ่งของระนาบที่ไม่มีจุด (0,0) ดังรูป

กราฟของ H_3 เช่นเดียวกับ ข้อ 1.1 ดังรูป

กราฟของ H_4 เช่นเดียวกับ ข้อ 1.2 ดังรูป

ดังนั้น กราฟ $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ คือส่วนที่แรเงาของรูป



1.10) $3x + 2y \leq 18$, $x \leq 4$, $y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

สมมุติกราฟที่เราต้องการ คือ

$H_1 = \{(x,y) \mid 3x + 2y \leq 18\}$

$H_2 = \{(x,y) \mid x \leq 4\}$

$H_3 = \{(x,y) \mid y \leq 6\}$

$H_4 = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$

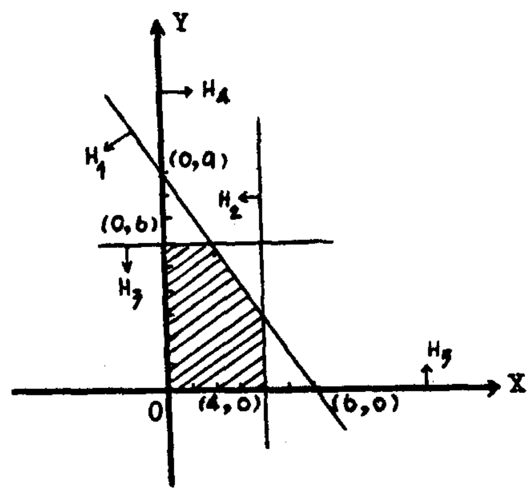
$H_5 = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$

<u>กราฟของ H_1</u>

เราได้ว่า $L_1 : 3x + 2y = 18$ ตัดแกน X ที่จุด (6,0) ตัดแกน Y ที่จุด (0,9) แล้วแทนจุด (0,0) ลงไปใน H_1 ได้ $3(0) + 2(0) \leq 18$ เป็นจริง

ดังนั้น กราฟของ H_1 ก็คือครึ่งของระนาบที่มีจุด (0,0) อยู่ด้วย (ดังรูป)

นั่นคือ กราฟของ $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$ คือส่วนที่แรเงาดังรูป



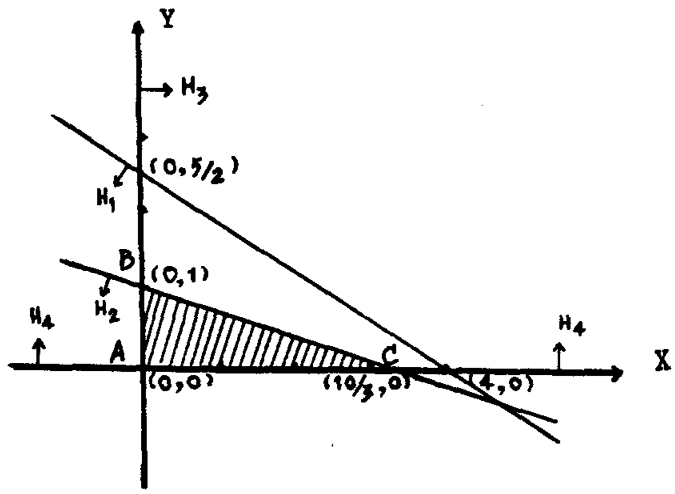
ข้อ ๒ หาค่ามากที่สุดของ $L(x,y) = 3x + 4y$

เมื่อ $5x + 8y \leq 20$

$3x + 10y \leq 10$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

จะสังเกตเห็นว่า เงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้เราได้กราฟมาแล้วใน ข้อ 1.8 ซึ่งได้รูปเป็น



ให้ A,B,C เป็นจุดมุมของ convex polygon ดังรูป

ซึ่งจะได้ว่า A มีโคออร์ดิเนตเป็น (0,0)

B มีโคออร์ดิเนตเป็น (0,1)

C มีโคออร์ดิเนตเป็น $(\frac{10}{3}, 0)$

จาก $L(x,y) = 3x + 4y$

ที่จุด A : (0,0)ได้ $L(0,0) = 3(0) + 4(0) = 0$

ที่จุด B : (0,1)ได้ $L(0,1) = 3(0) + 4(1) = 4$

ที่จุด C : $(\frac{10}{3}, 0)$ได้ $L(\frac{10}{3}, 0) = 3(\frac{10}{3}) + 4(0) = 10$

ดังนั้นค่า $L(x,y) = 3x + 4y$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมามีค่าสูงสุดเป็น 10

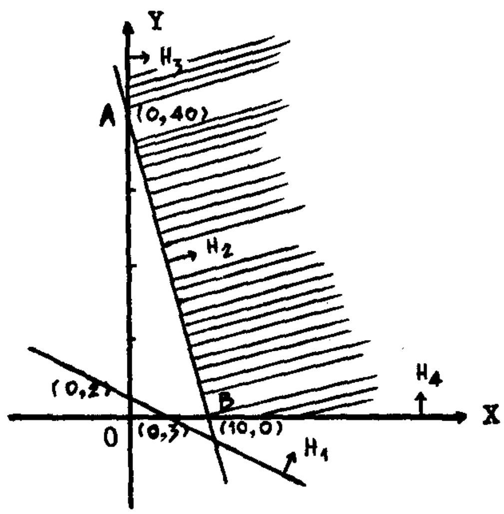
ข้อ ๘ หาค่าน้อยที่สุดของ $L(x,y) = 4x + 6y$

เมื่อ $2x + 3y \geq 6$

$4x + y \geq 40$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

จาก ข้อ 1.9 ซึ่งได้กราฟเป็น



กราฟที่ได้นี้เป็นรูปที่ไม่มีขอบเขตข้างบน โจทย์ต้องการหาค่าต่ำสุด ซึ่งลักษณะเช่นนี้เราสามารถหาค่าต่ำสุดได้

จากรูป A มีโคออร์ดิเนต (0,40), B มีโคออร์ดิเนต (10,0)

จาก $L(x,y) = 4x + 6y$

ที่จุด A : (0,40) ได้ $L(0,40) = 4(0) + 6(40) = 240$

ที่จุด B : (10,0) ได้ $L(10,0) = 4(10) + 6(0) = 40$

ดังนั้นค่า $L(x,y) = 4x + 6y$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวมีค่าต่ำสุดเป็น 40

ข้อ 4 หาค่าสูงสุดและต่ำสุด และจุด (x,y) ที่ให้ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ

$L(x,y) = 3x + 5y + 10$ มีเงื่อนไขคือ

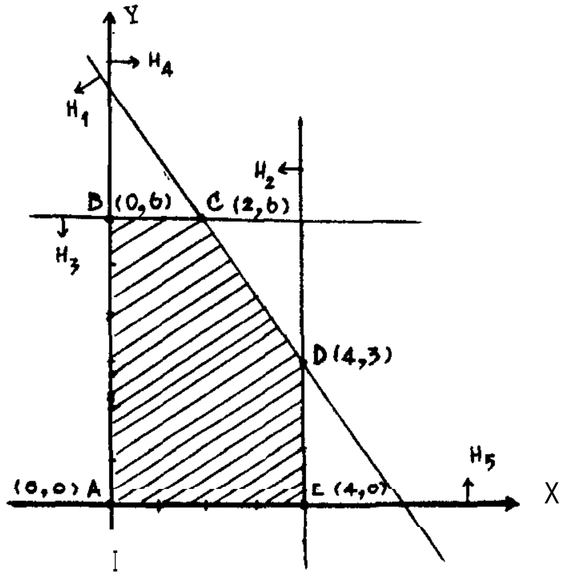
$3x + 2y \leq 18$

$x \leq 4$

$y \leq 6$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

จากข้อ 1.10 ซึ่งได้กราฟเป็น



ให้จุดมุมของ convex polygon คือ A B C D E

โดย A มีโคออร์ดิเนตเป็น (0,0) , B มีโคออร์ดิเนตเป็น (0,6)

E มีโคออร์ดิเนตเป็น (6,0)

หาโคออร์ดิเนตของ C ซึ่ง เกิดจาก เส้นตรงซึ่งมีสมการ เป็น

$3x + 2y = 18$ กับ $y = 6$ ตัดกัน

จาก $3x + 2y = 18$ .... (1)

$y = 6$ .... (2)

แทน $y = 6$ ลงใน (1)

$\therefore \quad 3x + 12 = 18$

$x = 2$

$\therefore$ โคออร์ดิเนตของ C คือ (2,6)

ในทำนองเดียวกัน โคออร์ดิเนตของ D ซึ่งเกิดจากเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

$3x + 2y = 18$ ตัดกับเส้น $x = 4$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของ D คือ (4,3)

จาก $L(x,y) = 3x + 5y + 10$

ที่จุด A : (0,0), $\therefore L(0,0) = 3(0) + 5(0) + 10 = 10$

ที่จุด B : (0,6), $\therefore L(0,6) = 3(0) + 5(6) + 10 = 40$

ที่จุด C : (2,6), $\therefore L(2,6) = 3(2) + 5(6) + 10 = 46$

ที่จุด D : (4,3), $\therefore L(4,3) = 3(4) + 5(3) + 10 = 37$

ที่จุด E : (6,0), $\therefore L(6,0) = 3(6) + 5(0) + 10 = 28$

ดังนั้น จุด (x,y) ที่ให้ค่าสูงสุดคือจุด (2,6) คือ $x = 2$, $y = 6$ และให้ค่าสูงสุดเท่ากับ 46

และจุด (x,y) ที่ให้ค่าต่ำสุดคือจุด (0,0) โดยให้ค่าต่ำสุดเท่ากับ 10 (หมายเหตุ ในทางปฏิบัติค่าต่ำสุดเรามักไม่พิจารณาจุด (0,0) เพราะเท่ากับว่าเราไม่ได้ทำอะไรเลย ดังนั้นในข้อนี้ถ้าเราไม่สนใจจุด (0,0) เราจะได้ว่าค่าต่ำสุดอยู่ที่จุด (6,0) และมีค่าต่ำสุดเป็น 28)

ข้อ ๖ กำหนดให้ x = จำนวนลังของสับปะรดกระป๋องใหญ่ที่ผลิตต่อวัน

y = จำนวนลังของสับปะรดกระป๋องเล็กที่ผลิตต่อวัน

จะต้องหาค่าสูงสุดของ $L(x,y) = 2500x + 2300y$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข คือ

$$x \le 4$$

$$y \le 6$$

$$3x + 2y \le 18$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

จากข้อ 4) ได้ว่าจุดมุมของ convex polygon ของเงื่อนไขดังกล่าวมีจุด A : (0,0), จุด B : (0,6), จุด C : (2,6), จุด D : (4,3) และจุด E : (6,0)

จาก $L(x,y) = 2500x + 2300y$

ที่จุด A : (0,0) ได้ $L(0,0) = 0$

ที่จุด B : (0,6) ได้ $L(0,6) = 2500(0) + 2300(6) = 13,800$

ที่จุด C : (2,6) ได้ $L(2,6) = 2500(2) + 2300(6) = 18,800$

ที่จุด D : (4,3) ได้ $L(4,3) = 2500(4) + 2300(3) = 16,900$

ที่จุด E : (6,0) ได้ $L(6,0) = 2500(6) + 2300(0) = 15,000$

จะเห็นว่าจุด (x,y) ที่ให้ค่าสูงสุดคือจุด (2,6) คือ $x = 2,\ y = 6$ นั่นคือ โรงงานควรผลิตสับปะรดกระป๋องใหญ่วันละ 2 ลังและผลิตกระป๋องเล็กวันละ 6 ลัง จึงจะได้กำไรสูงสุด