

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.1

ข้อ 1

- 1.1) $A = \{ \text{เมษายน, มิถุนายน, กันยายน, พฤศจิกายน} \}$
- 1.2) $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$
- 1.3) $C = \{a, e, i, o, u\}$
- 1.4) $D = \{ \text{กุมภาพันธ์} \}$
- 1.5) $E = \{ \text{สีแดง, สีขาว, สีน้ำเงิน} \}$
- 1.6) $F = \{ \text{คณะวิทยาศาสตร์, คณะศึกษาศาสตร์, คณะนิติศาสตร์, คณะบริหารธุรกิจ, คณะเศรษฐศาสตร์, คณะมนุษยศาสตร์, คณะรัฐศาสตร์} \}$
- 1.7) $G = \{1, 2\}$
- 1.8) $H = \emptyset$

ข้อ 2

- 2.1) A มี 3 อีลีเมนต์ คือ 1, 5 และ 7
- 2.2) B มี 2 อีลีเมนต์ คือ 1 และ $\{1\}$
- 2.3) C มี 1 อีลีเมนต์คือ 123
- 2.4) D มี 3 อีลีเมนต์ คือ 2, $\{2, 3\}$ และ $\{3\}$
- 2.5) E มี 4 อีลีเมนต์ คือ 12, 3, 456 และ 7
- 2.6) F มี 2 อีลีเมนต์ คือ 12 และ 21
- 2.7) G มี 2 อีลีเมนต์ คือ 0 และ 1

2.8) H มี 4 ฮิลเบิร์ต คือ 1, 2, {2} และ 12

2.93 I มี 2 ฮิลเบิร์ต คือ 4 และ 5

2.10) J มี 0 ฮิลเบิร์ต คือ ไม่มีฮิลเบิร์ตเลย

ข้อ 3

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 3.1) ถูก | 3.2) ถูก | 3.3) ผิด | 3.4) ผิด |
| 3.5) ถูก | 3.6) An | 3.7) ถูก | 3.8) In |
| 3.9) ผิด | 3.10) ถูก | 3.11) In | 3.12) ถูก |
| 3.13) ถูก | 3.14) ผิด | 3.15) ถูก | 3.16) ผิด |
| 3.17) ถูก | 3.18) In | 3.19) ผิด | 3.20) ถูก |

ข้อ 4

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 4.1) ถูก | 4.2) ผิด | 4.3) ผิด | 4.4) ผิด |
| 4.5) ผิด | 4.6) ผิด | 4.7) ผิด | 4.8) ผิด |
| 4.9) ถูก | 4.10) ผิด | 4.11) ถูก | 4.12) ถูก |
| 4.13) An | 4.14) ผิด | 4.15) ผิด | 4.16) ถูก |
| 4.17) ถูก | 4.18) ผิด | 4.19) ถูก | 4.20) ถูก |

ข้อ 5

5.1) จำนวนสับเซตของ $A = 2^0 = 1$ เซต (เพราะว่า A เป็นเซตเปล่า ดังนั้น จำนวนฮิลเบิร์ตในเซต A จึงเท่ากับ 0)

สับเซตของ A คือ { } นั่นเอง

5.2) จำนวนสับเซตของ A = 2¹ = 2 เซต คือ

B₁ = { } B₂ = { a }

5.3) จำนวนสับเซตของ C = 2² = 4 เซต คือ

C₁ = { } C₂ = { a }

C₃ = { {b, c} } C₄ = { a, {b, c} }

5.4) จำนวนสับเซตของ D = 2³ = 8 เซต คือ

D₁ = { } D₂ = { a }

D₃ = { b } D₄ = { c }

D₅ = { a, b } D₆ = { a, c }

D₇ = { b, c } D₈ = { a, b, c }

ข้อ ๖

6.1) { 1 }

6.2) { } = ∅

6.3) { 1, 2, { 3 }, { 2,3 } }

6.4) { 1, { 2 } , 3, 2 }

6.5) { 1, 2 }

6.6) { 1, 2 }

6.7) { 1,2, { 3 } , { 2,3 } }

6.8) { 1, 2 }

6.9) { 2, { 3 } , { 2,3 } }

6.10) = ∅

6.11) { 1 }

6.12) { 2 }

6.13) { { 3 } , { 2,3 } }

6.14) ∅

6.15) { 2 }

6.16) ∅

6.17) { { 2 } , 3, 2 }

6.18) ∅

6.19) { { 2 } , 3 }

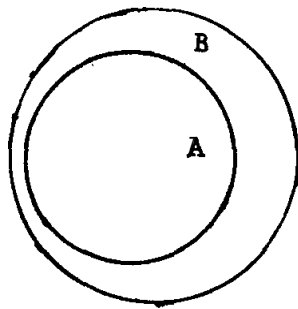
6.20) ∅

ข้อ 7

- | | | |
|------------|-----------|-----------|
| 7. 1) ผิด | 7. 2) ถูก | 7. 3) ผิด |
| 7. 4) ถูก | 7. 5) ถูก | 7. 6) ผิด |
| 7. 7) ถูก | 7. 8) ถูก | 7. 9) ผิด |
| 7. 10) ถูก | | |

ข้อ 8

$A \subseteq B$ เราสามารถเขียนแผนภาพแทนเซตได้เป็น



ดังนั้นเราจึงได้ว่า

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 1) ผิด | 2) ถูก | 3) ถูก | 4) ผิด |
| 5) ถูก | 6) ผิด | | |

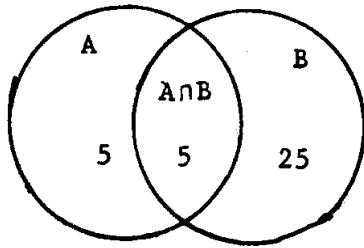
ข้อ 9

ให้ A แทนเซตของนักเรียนที่ได้รับรางวัลเรียนดี ซึ่งมี 10 คน

B แทนเซตของนักเรียนที่ได้รับรางวัลมารยาทดี ซึ่งมี 30 คน

ดังนั้นเซตของนักเรียนที่ได้รับรางวัลทั้งสองรางวัล ก็คือ $A \cap B$ มี 5 คน

เราสามารถเขียนภาพแทนเซตได้เป็น



โดยขั้นแรกเขียน $A \cap B$ (ซึ่งเท่ากับ 5 ก่อน)

- 1) โดยที่ A มี 10 คน ดังนั้น $A - (A \cap B) = 10 - 5 = 5$ คน
นั่นคือ นักเรียนที่ได้รับรางวัลเรียนดีเพียงอย่างเดียวมี 5 คน
- 2) และโดยที่ B มี 30 คน ดังนั้น $B - (A \cap B) = 30 - 5 = 25$
นั่นคือ นักเรียนที่ได้รับรางวัลมารยาทดีเพียงอย่างเดียวมี 25 คน
- 3) นักเรียนทั้งหมดที่ได้รับรางวัล มี $5 + 5 + 25 = 35$ คน
- 4) โดยที่นักเรียนทั้งหมดมี 80 คน และได้รับรางวัลทั้งหมด 35 คน
ดังนั้น คนที่ไม่ได้รับรางวัลมี $80 - 35 = 45$ คน

ข้อ 10

ให้ A แทนเซตของนักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์ ซึ่งมี 80 คน

B แทนเซตของนักเรียนที่ชอบวิทยาศาสตร์ ซึ่งมี 65 คน

C แทนเซตของนักเรียนที่ชอบภาษาอังกฤษ ซึ่งมี 55 คน

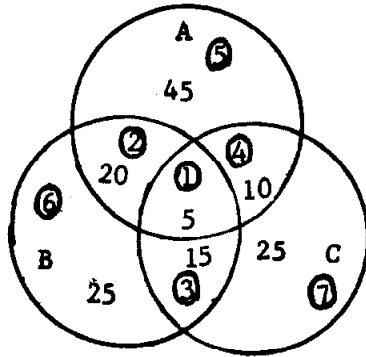
ดังนั้น $B \cap C$ หมายถึงเซตของนักเรียนที่ชอบทั้งวิทยาศาสตร์ และภาษาอังกฤษ ซึ่งมี 20 คน

$A \cap B$ หมายถึงเซตของนักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ ซึ่งมี 25 คน

$A \cap C$ หมายถึงเซตของนักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์ และภาษาอังกฤษ ซึ่งมี 15 คน

$(A \cap B) \cap C$ หมายถึง เซ็ตของนักเรียนที่ชอบทั้งสามวิชา ซึ่งมี 5 คน

เราสามารถเขียนภาพแทนเซตต่าง ๆ ได้ดังนี้



เราทราบว่า $(A \cap B) \cap C$ หรือส่วนที่ ① = 5 และทราบว่า $A \cap B = 25$
ดังนั้นส่วนที่ ② จึงได้เท่ากับ $25 - 5 = 20$

เราทราบว่า $B \cap C = 20$ ดังนั้นส่วนที่ ③ จึงได้เท่ากับ $20 - 5 = 15$

เราทราบว่า $A \cap C = 15$ ดังนั้นส่วนที่ ④ จึงได้เท่ากับ $15 - 5 = 10$

เราทราบว่า $A = 80$ ดังนั้นส่วนที่ ⑤ จึงได้เท่ากับ $80 - (20 + 5 + 10) = 45$

เราทราบว่า $B = 65$ ดังนั้นส่วนที่ ⑥ จึงได้เท่ากับ $65 - (20 + 5 + 15) = 25$

เราทราบว่า $C = 55$ ดังนั้นส่วนที่ ⑦ จึงได้เท่ากับ $55 - (10 + 5 + 15) = 25$

ลองทดสอบว่า จำนวนต่าง ๆ สอดคล้องกับที่โจทย์กำหนดไหม ?

จะเห็นว่า เซ็ต $A = 45 + 20 + 5 + 10 = 80$

$$B = 25 + 20 + 5 + 15 = 65$$

$$C = 25 + 10 + 5 + 15 = 55$$

$$B \cap C = 5 + 15 = 20$$

$$A \cap B = 20 + 5 = 25$$

$$A \cap C = 10 + 5 = 15$$

$$(A \cap B) \cap C = 5$$

เป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด

ดังนั้นจากแผนภาพจะได้ว่า

- 1) จำนวนนัก เรียนทั้งหมดมี 200 คน ดังนั้นนัก เรียนที่ไม่ชอบวิชาใด เลยในสามวิชานี้คือ
 $200 = (45 + 20 + 5 + 10 + 25 + 15 + 25)$
 $= 200 - 145 = 55$ คน
- 2) นักเรียนที่ชอบวิชาคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียวเท่านั้น มี 45 คน
- 3) นักเรียนที่ชอบวิชาเดียววิชา เดียวเท่านั้น มี $45 + 25 + 25 = 95$ คน
- 4) นักเรียนที่ชอบ 2 วิชา เท่านั้น มี $20 + 10 + 15 = 45$ คน
- 5) นักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, แต่ไม่ชอบภาษาอังกฤษ มี $45 + 20 + 25 = 90$ คน

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.2

ข้อ 1

1.1) ให้ p แทนข้อความ "แดงเป็นชานา"

q แทนข้อความ "แดงต้องทำงานหนัก"

ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ "ถ้าแดงเป็นชานา แล้ว แแดงต้องทำงานหนัก" คือ

$$p \Rightarrow q$$

1.2) ให้ p แทนข้อความ "แดงเป็นชานา"

q แทนข้อความ "แดงเป็นชาวสวน"

ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ "แดงเป็นชานาหรือชาวสวน" คือ $p \vee q$

- 1.3) ให้ p แทนข้อความ 3 เป็นเลขคู่
q แทนข้อความ 4 เป็นเลขคี่

ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ "3 เป็นเลขคู่ และ 4 เป็นเลขคี่" คือ $p \wedge q$

- 1.4) ให้ p แทนข้อความ 2 เป็นเลขคู่

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "2 เป็นเลขคู่หรือ 2 ไม่เป็นเลขคู่" คือ $p \vee \sim p$

- 1.5) ให้ p แทนข้อความ $2^2 = 4$

q แทนข้อความ $(-2)^2 = 4$

r แทนข้อความ $2 = -2$

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้า $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$ แล้ว

$2 = -2$ " คือ $(p \wedge q) \Rightarrow r$

- 1.6) ให้ p แทนข้อความ $a = b$

q แทนข้อความ $a^2 = b^2$

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้า $a = b$ แล้ว $a^2 = b^2$ " คือ $p \Rightarrow q$

- 1.7) ให้ p แทนข้อความ $3^2 = 9$

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ $3^2 = 9$ และ $3^2 \neq 9$ คือ $p \wedge \sim p$

- 1.8) ให้ p แทนข้อความ $3^2 = 9$

q แทนข้อความ $3^2 = 10$

ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ " $3^2 = 9$ และ $3^2 = 10$ " คือ $p \wedge q$

1.9) ให้ p แทนข้อความ เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

q แทนข้อความ มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน"

คือ $p \rightarrow q$

1.10) ให้ p แทนข้อความ 4 เป็นจำนวนคู่

q แทนข้อความ 4^2 เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้า 4 เป็นจำนวนคู่แล้ว 4^2 จะเป็นจำนวนคู่"

คือ $p \rightarrow q$

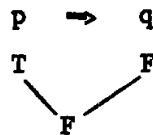
ข้อ 2

2.1) ให้ p แทนข้อความ $2 + 3 = 5$ (เป็นจริง)

q แทนข้อความ คนย่อมมีหาง (เป็นเท็จ)

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้วคนย่อมมีหาง"

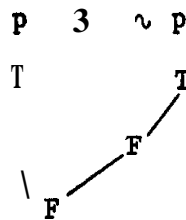
คือ $p \rightarrow q$



นี่คือ ข้อความ "ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว คนย่อมมีหาง" เป็นเท็จ

2.2) ให้ p แทนข้อความ $2 + 3 = 5$ (เป็นจริง)

ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ "ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว $2 + 3 \neq 5$ คือ $p \rightarrow \sim p$



นั่นคือ ข้อความ "ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว $2 + 3 \neq 5$ " เป็นเท็จ

2.3) เป็นจริง 2.4) เป็นจริง 2.5) เป็นจริง

2.6) เป็นเท็จ 2.7) เป็นจริง 2.8) เป็นจริง

2.9) เป็นเท็จ

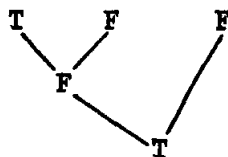
2.10) ให้ p แทนข้อความ $2 + 2 = 4$ (เป็นจริง)

q แทนข้อความ $1 + 2 = 5$ (เป็นเท็จ)

r แทนข้อความ $2 + 3 = 8$ (เป็นเท็จ)

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้า $2 + 2 = 4$ และ $1 + 2 = 5$ แล้ว $2 + 3 = 8$ คือ $(p \wedge q) \Rightarrow r$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$



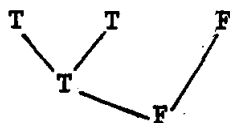
นั่นคือ ข้อความ "ถ้า $2 + 2 = 4$ และ $1 + 2 = 5$ แล้ว $2 + 3 = 8$ เป็นจริง

ข้อ 8 กำหนดให้ p,q เป็นจริง (T) และ r,s เป็นเท็จ (F)

3.1) ตอบ เป็นเท็จ

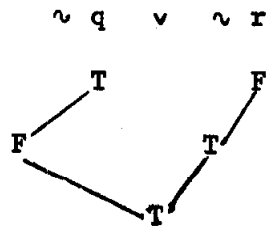
แนวทางการพิจารณา

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$



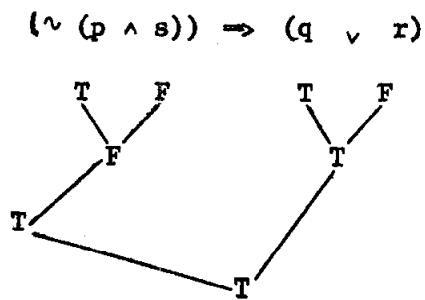
3.2) ตอบ เป็นจริง

แนวทางการพิจารณา



3.3) ตอบ เป็นจริง

แนวทางการพิจารณา



3.4) เป็นเท็จ

3.5) เป็นจริง

3.6) เป็นเท็จ

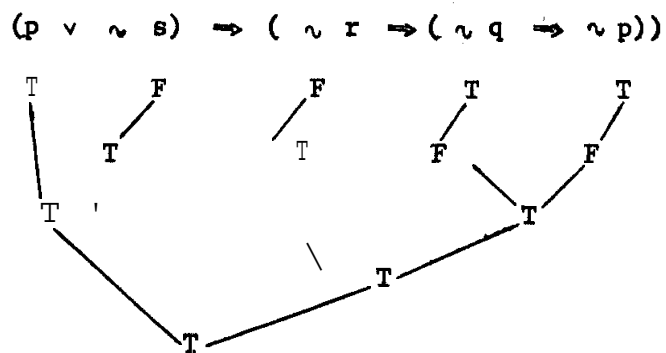
3.7) เป็นจริง

3.8) เป็นจริง

3.9) เป็นจริง

3.10) ตอบ เป็นจริง

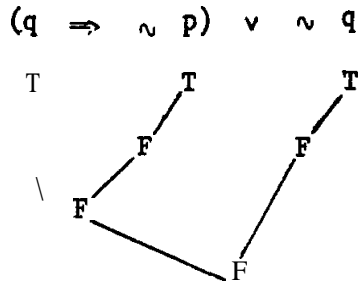
แนวทางการพิจารณา



ข้อ 4

4.1) จาก $p \wedge q$ เป็นจริง แสดงว่า p ต้องเป็นจริง, q ต้องเป็นจริง (ตามตารางค่า เชื่อม " \wedge ")

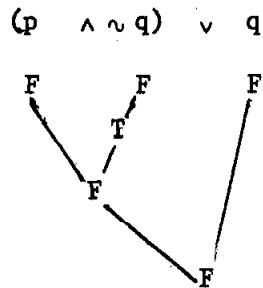
พิจารณา



ดังนั้น ข้อความ $(q \Rightarrow \sim p) \vee \sim q$ เป็นเท็จ

4.2) ให้ $p \vee q$ เป็นเท็จ แสดงว่า p ต้องเป็นเท็จ, q ต้องเป็นเท็จ

พิจารณา

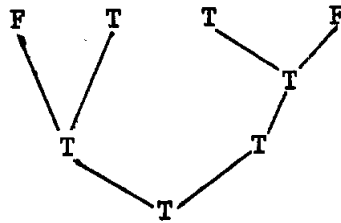


นั่นคือ ข้อความ $(p \wedge \sim q) \vee q$ เป็นเท็จ

4.3) ให้ $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ แสดงว่า p ต้องเป็นจริง, q ต้องเป็นเท็จ

พิจารณา

$$(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee \sim q)$$



นั่นคือ ข้อความ $(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee \sim q)$ เป็นจริง

4.4) เป็นจริง

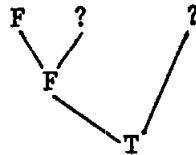
4.5) เป็นจริง

ข้อ 5

5.1) ตอบ เป็นจริง

พิจารณา

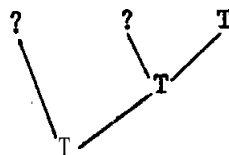
$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$



5.2) ตอบ เป็นจริง

พิจารณา

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$



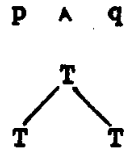
5.3) เป็นจริง

5.4) เป็นจริง

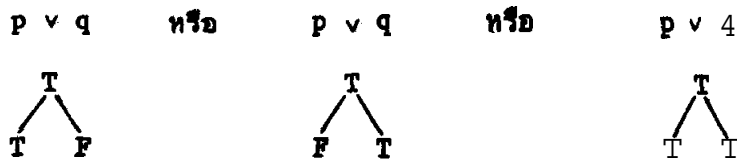
5.5) เป็นจริง

ข้อ ๕

6.1) ตอบ p เป็น T, q เป็น T
แนวพิจารณา



6.2) ตอบ p เป็นจริง หรือ เท็จก็ได้
แนวพิจารณา



6.3) p เป็นจริง, q เป็นเท็จ

6.4) p เป็นจริง, q เป็นเท็จ, r เป็นเท็จ

6.5) p เป็นจริง, q เป็นเท็จ, r เป็นเท็จ, s เป็นจริง

ข้อ 7

7.1) ตอบ จำเป็นต้องเป็นจริง

แนวพิจารณา $p \Rightarrow q$ เป็นจริง โดยที่ p เป็นจริง
ดังนั้น q จะต้องเป็นจริงด้วย

7.2) ตอบ จำเป็นต้องเป็นเท็จ

แนวพิจารณา $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ โดยที่ p เป็นจริง
ดังนั้น q จำเป็นต้องเป็นเท็จ

7.3) ตอบ ไม่จำเป็น อาจเป็นจริง หรือ เท็จก็ได้

แนวทอณา $p \vee q$ เป็นจริง โดยที่ p เป็นจริง แล้ว
ดังนั้น q จะเป็นจริงหรือเท็จก็ได้

7.4) จำเป็นต้องเป็นจริง

7.5) จำเป็นต้องเป็นเท็จ

ข้อ 8

8.1) $p \rightarrow \sim p$

p	$\sim p$	$p \rightarrow \sim p$
T	F	F
F	T	T

6.2) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

(1) p	(2) q	(3) $p \rightarrow q$	(4) $\sim p$	(5) $\sim p \vee q$	(6) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ช่อง (3) ได้จาก ช่อง (1) กับช่อง (2) เชื่อมด้วย " \rightarrow "

ช่อง (4) ได้จาก ช่อง (1) โดย " \sim "

ช่อง (5) ได้จาก ช่อง (4) กับช่อง (2) เชื่อมด้วย " \vee "

ช่อง (6) ได้จาก ช่อง (3) กับช่อง (5) เชื่อมด้วย " \rightarrow "

8.3) $(p \vee \sim p) \rightarrow q$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$(p \vee \sim p) \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

ช่อง (3) ได้จาก ช่อง (1) โดย " \sim "

ช่อง (4) ได้จาก ช่อง (1) กับ ช่อง (3) เชื่อมด้วย " \vee "

ช่อง (5) ได้จาก ช่อง (4) กับ ช่อง (2) เชื่อมด้วย " \rightarrow "

8.4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

ข้อ (4) ได้จาก ข้อ (2) กับข้อ (3) เชื่อมด้วย " \Rightarrow "
ข้อ (5) ได้จาก ข้อ (1) กับข้อ (4) เชื่อมด้วย " \Rightarrow "

ข้อ 9

จากที่ทำมาแล้วในข้อ 8 เราจะได้ว่า

- 9.1) ไม่เป็น Tautology 9.2) เป็น Tautology
9.3) ไม่เป็น Tautology 9.4) ไม่เป็น Tautology
9.5) เป็น Tautology

ข้อ 10

- 10.1) ให้ p แทนข้อความ $a + b = 4$
ดังนั้น สัญลักษณ์แทนข้อความ " $a + b = 4$ หรือ $a + b \neq 4$ " ก็คือ
 $p \vee \sim p$ และเป็น Tautology
- 10.2) ให้ p แทนข้อความ "แดงขยัน"
 q แทนข้อความ "แดงทำงานหนัก"
ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้าแดงขยันแล้วแดงขยันทำงานหนักหรือแดงขยัน
ขยัน" คือ $p \Rightarrow (p \vee q)$ และเป็น Tautology
- 10.3) ให้ p แทนข้อความ "แดงขยัน"
 q แทนข้อความ "แดงร่ำรวย"

ดังนั้น สัญลักษณ์ แทนข้อความ "ถ้าแดงขยับและแดงรำรวยแล้วแดงยอมขยับหรือรำรวย"

คือ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

พิจารณาตารางแสดงค่าความจริงของ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ข้อ (3) ได้จาก ข้อ (1) กับข้อ (2) เชื่อมด้วย " \wedge "

ข้อ (4) ได้จาก ข้อ (1) กับข้อ (2) เชื่อมด้วย " \vee "

ข้อ (5) ได้จาก ข้อ (3) กับข้อ (4) เชื่อมด้วย " \Rightarrow "

จากตารางเราจะได้ว่า $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ เป็น Tautology

นั่นคือ ข้อความ "ถ้าแดงขยับและแดงรำรวยแล้วแดงยอมขยับหรือรำรวย" เป็น

Tautology

เจดยแบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.3

ข้อ 1

จาก ถ้านายดำกินส้มแล้ว นายดำจะไม่เป็นหวัด

แต่นายดำไม่กินส้ม

สรุป นายคำจะเป็นหวัด

ตอบ เป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้อง

แนวการพิจารณา

ให้ p แทนข้อความ "นายคำกินส้ม"

q แทนข้อความ "นายคำไม่เป็นหวัด"

ดังนั้น การสรุปตามโจทย์ ข้างบนก็คือ

จาก $p \Rightarrow q$

กับ $\sim p$

สรุป $\sim q$

เราจะพิจารณาข้อความ

$((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$ ว่าเป็น Tautology หรือไม่ ?

โดยพิจารณาจากตารางค่าความจริงต่อไปนี้

P	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$	$\sim q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

ซึ่งจะเห็นว่า ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$ ไม่เป็น Tautology

ดังนั้น การสรุปข้างต้น จึงเป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้อง

ข้อ ๒

จาก ถ้าฝนตกแล้วน้ำท่วมกรุงเทพฯ ฯ และ ถ้าน้ำท่วมกรุงเทพฯ ฯ แล้วจระเข้ย่อมติดขัด

สรุป ถ้าฝนตกแล้วจระเข้ย่อมติดขัด

ตอบ เป็นการสรุปที่ถูกต้อง

แนวการพิจารณา

ให้ p แทนข้อความ "ฝนตก"

q แทนข้อความ "น้ำท่วมกรุงเทพฯ ฯ"

r แทนข้อความ "จระเข้ย่อมติดขัด"

ดังนั้น ข้อความตามใจทยข้างบน คือ

จาก $p \Rightarrow q$ และ $q \Rightarrow r$

สรุป $p \Rightarrow r$

เราเขียนสรุป ข้อความดังกล่าวได้เป็น

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

เราจะพิจารณาว่า ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ เป็น

Tautology หรือไม่ ?

ถ้าเป็น Tautology ก็แสดงว่า ข้อความข้างต้นเป็นการสรุปที่ถูกต้อง

ถ้าไม่เป็น Tautology ก็แสดงว่า ข้อความข้างต้น เป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้อง

พิจารณา ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ โดยดูจาก

ตารางแสดงค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

ซึ่งจะเห็นว่า ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ เป็น Tautology

ดังนั้น การสรุปข้างต้นจึงเป็นการสรุปที่ถูกต้อง

ข้อ 3 เป็นการสรุปที่ถูกต้อง

ข้อ 4 เป็นการสรุปที่ถูกต้อง

ข้อ 5 เป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้อง

เฉลยแบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.4

ข้อ 1

จากยูนิเวอร์ส คือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ สำหรับประโยคเปิด $P(x)$ ต่อไปนี้ จงพิจารณา
ดูว่า เซต $\{x \mid P(x)\}$ ประกอบด้วยอะไรบ้าง ? จงเขียนเซตนั้น ๆ โดยการแจงอีลีเมนต์

1.1) $P(x)$ คือ $x^2 - 3x + 0$

วิธีพิจารณา จากโจทย์ เราจะ เห็นว่า $P(x)$ คือ $x^2 > 0$ จะพิจารณาว่า
ฮิสเมนต์ใดบ้างที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ซึ่ง เมื่อนำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$
เป็นจริง

$$\text{จาก } P(x) \text{ คือ } x^2 > 0$$

$$\text{ถ้าแทน } x = 1 \therefore P(x) \text{ คือ } 1^2 > 0 \quad \text{จริง}$$

$$x = 2 \therefore P(x) \text{ คือ } 2^2 > 0 \quad \text{จริง}$$

$$x = 3 \therefore P(x) \text{ คือ } 3^2 > 0 \quad \text{จริง}$$

$$x = 4 \therefore P(x) \text{ คือ } 4^2 > 0 \quad \text{จริง}$$

$$x = 5 \therefore P(x) \text{ คือ } 5^2 > 0 \quad \text{จริง}$$

จะเห็นว่าตัวแปร x ที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ซึ่งนำมาแทนในประโยคเปิด $P(x)$
แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง มี $1, 2, 3, 4, 5$

$$\text{ดังนั้น } \{ x | P(x) \} \text{ ก็คือ } \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

1.2) $P(x)$ คือ $x^2 + 5x - 6 = 0$

วิธีพิจารณา เราจะหาตัวแปร x ที่สอดคล้องกับประโยคเปิด $P(x)$ อาจทำได้
โดยการแทนค่า ตัวแปร x ด้วยบรรดาฮิสเมนต์ในยูนิเวอร์ส หรืออาจทำได้โดยการแก้สมการ
หาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการที่โจทย์กำหนดให้ก็ได้ คือ

$$\text{จาก } x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x+6)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -6, 1$$

นั่นคือ ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 5x - 6 = 0$ คือ $x = -6, 1$ แต่จะเห็นว่า -6 ไม่ได้อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ส่วน 1 นั้น อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ดังนั้น เซตของตัวแปร x ที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ที่สอดคล้องกับประโยคเปิด $P(x)$ คือ 1 เท่านั้น

ดังนั้น $\{x \mid P(x)\}$ ก็คือ $\{1\}$

1.3) $P(x)$ คือ $4x + 1 = x + 3$

วิธีพิจารณา

ในทำนองเดียวกับข้อ 1.2 เราสามารถหาค่าตัวแปร x โดยการแก้สมการและโดยวิธีแทนค่าตัวแปร

วิธีที่ 1 หาค่าตัวแปร x ที่สอดคล้องกับ $4x + 1 = x + 3$ โดยการแก้สมการ

จาก $4x + 1 = x + 3$

$$4x - x = 3 - 1$$

$$3x = 2$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

นั่นคือค่าของ x ที่สอดคล้องกับ $P(x) : 4x + 1 = x + 3$ ก็คือ $\frac{2}{3}$

ค่าเดียว ซึ่งไม่ได้อยู่ในยูนิเวอร์ส

ดังนั้น $\{x \mid P(x)\} = \emptyset$ (เซตเปล่า)

หมายความว่า ไม่มีอีลีเมนต์ใด ๆ เลยที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ที่สอดคล้องกับ $P(x)$

วิธีที่ 2 หาค่าตัวแปร x ที่สอดคล้องกับประโยคเปิด $P(x) : 4x + 1 = x + 3$

โดยการนำอีลีเมนต์ทุกตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส มาแทนลงใน $P(x)$ แล้วดูว่า ตัวแปร x ตัวใดบ้างที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง แล้วจึงนำเอาบรรดา x เหล่านั้นมาเขียนเป็น $\{x \mid P(x)\}$

	จาก $P(x)$	คือ $4x + 1 = x + 3$	
แทน $x = 1$	$\therefore P(1)$	คือ $4(1) + 1 = 1 + 3$	ไม่จริง
$x = 2$	$\therefore P(2)$	คือ $4(2) + 1 = 2 + 3$	ไม่จริง
$x = 3$	$\therefore P(3)$	คือ $4(3) + 1 = 3 + 3$	ไม่จริง
$x = 4$	$\therefore P(4)$	คือ $4(4) + 1 = 4 + 3$	ไม่จริง
$x = 5$	$\therefore P(5)$	คือ $4(5) + 1 = 5 + 3$	ไม่จริง

ดังนั้น ไม่มี ตัวแปร x ใดเลย ที่อยู่ใน ยูนิเวิร์ส ที่นำมาแทนค่าใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\{x | P(x)\} = \phi = \{ \}$ (เซตเปล่า)

1.4) $P(x)$ คือ $x + 1 < 5$

วิธีพิจารณา

	จาก $P(x)$	คือ $x + 1 < 5$	
แทน $x = 1$	$\therefore P(1)$	คือ $1 + 1 < 5$	จริง
$x = 2$	$\therefore P(2)$	คือ $2 + 1 < 5$	จริง
$x = 3$	$\therefore P(3)$	คือ $3 + 1 < 5$	จริง
$x = 4$	$\therefore P(4)$	คือ $4 + 1 < 5$	ไม่จริง
$x = 5$	$\therefore P(5)$	คือ $5 + 1 < 5$	ไม่จริง

ดังนั้น เซตของบรรดาตัวแปร x ที่สอดคล้องกับประโยคเปิด $P(x)$ คือแทนลงใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง ได้แก่ 1,2,3

ดังนั้น $\{x | P(x)\}$ คือ $\{1,2,3\}$

1.5) $P(x)$ คือ $x + x = 2x^2$

วิธีพิจารณา จะกระทำการหาค่า x โดยการแก้สมการ

$$\text{จาก } x + x = 2x^2$$

$$\therefore 2x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0, 1$$

นั่นคือ ตัวแปร x ที่สอดคล้องกับ $P(x) : x + x = 2x^2$ มี 2 ค่า คือ 0 กับ 1 โดย 1 อยู่ใน ยูนิเวอร์ส แต่ 0 ไม่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส

ดังนั้น $\{ x | P(x) \}$ คือ $\{ 1 \}$

ข้อ 2

จาก ยูนิเวอร์ส $= \{ 1, 2, 3 \}$ สำหรับ $P(x)$ ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า $\forall x P(x)$ เป็นจริงหรือเท็จ

2.1) $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$

ตอบ $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ

แนวการพิจารณา จาก $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$ เราจะแทนตัวแปร x ด้วย อีลีเมนต์ ต่าง ๆ ใน ยูนิเวอร์ส ลงในประโยคเปิด $P(x)$ แล้วดูว่า $P(x)$ เป็นจริง ทุกค่า ของ x ไหม ? ถ้าเป็นจริงก็จะกล่าวได้ว่า $\forall x P(x)$ เป็นจริง ถ้ามีบางค่าของ x ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ ก็จะกล่าวได้ว่า $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ

	จาก $P(x)$	คือ $x + 1 < 4$	
เมื่อแทน $x = 1$	$\therefore P(1)$	คือ $1 + 1 < 4$	เป็นจริง
$x = 2$	$\therefore P(2)$	คือ $2 + 1 < 4$	เป็นจริง
$x = 3$	$\therefore P(3)$	คือ $3 + 1 < 4$	เป็นเท็จ

ดังนั้น จะเห็นว่า มีฮิสเมนต์บางตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส คือ 3 เมื่อนำมาแทนตัวแปร x แล้ว ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ

2.2) $P(x)$ คือ $x + 1 > 0$

ตอบ $\forall x P(x)$ เป็นจริง

แนวทางการพิจารณา

	จาก $P(x)$	คือ $x + 1 > 0$	
แทน $x = 1$	$\therefore P(1)$	คือ $1 + 1 > 0$	จริง
$x = 2$	$\therefore P(2)$	คือ $2 + 1 > 0$	จริง
$x = 3$	$\therefore P(3)$	คือ $3 + 1 > 0$	จริง

ดังนั้น จะเห็นว่า สำหรับทุก ๆ ฮิสเมนต์ใน ยูนิเวอร์ส เมื่อนำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริงทั้งหมด

ดังนั้น $\forall x P(x)$ เป็นจริง

2.3) เป็นเท็จ

2.4) เป็นเท็จ

2.5) เป็นเท็จ

ข้อ ๓

สำหรับแต่ละ $P(x)$ ในโจทย์ข้อ ๒ จงพิจารณาว่า $\exists x \supset P(x)$ เป็นจริงหรือเท็จ

3.1) $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$

ตอบ $\exists x \supset P(x)$ เป็นจริง

แนวการพิจารณา จาก $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$ เราจะแทนตัวแปร x ด้วย
บรรดาฮิสต์เมนต์ใน ยูนิเวอร์ส ลงใน $P(x)$ แล้วพิจารณาว่ามีฮิสต์เมนต์ (อย่างน้อย 1 ตัว
อาจมีหลายตัวก็ได้) ที่แทนตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริงไหม ๒ ถ้ามีก็กล่าวได้ว่า
 $\exists x \supset P(x)$ เป็นเท็จ ถ้าไม่มีเลยก็กล่าวได้ว่า $\exists x \supset P(x)$ เป็นเท็จ

จาก $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$

แทน $x = 1 \dots \therefore P(x)$ คือ $1 + 1 < 4$ **จริง**

เมื่อเราพบว่า มีฮิสต์เมนต์อย่างน้อย 1 ตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส (ในที่นี้มี 1 กับ 2)
ที่นำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \supset P(x)$ **เป็นจริง**

3.2) $P(x)$ คือ $x + 1 > 0$

ตอบ $\exists x \supset P(x)$ **เป็นจริง**

แนวการพิจารณา จาก $P(x)$ คือ $x + 1 > 0$

แทน $x = 1 \dots \therefore P(1)$ คือ $1 + 1 > 0$ **จริง**

เมื่อพบว่า มีฮิสต์เมนต์อย่างน้อย 1 ตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส (ในที่นี้คือ 1 นอกจาก
นั้นยังมี 2 และ 3 อีก) ที่นำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \supset P(x)$ **เป็นจริง**

3.3) $P(x)$ คือ $4x + 1 = x + 3$

ตอบ $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นเท็จ

แนวทางการพิจารณา

	จาก	$P(x)$	คือ	$4x + 1 = x + 3$	
แทน	$x = 1$	\therefore	$P(1)$	คือ $4(1) + 1 = 1 + 3$	เป็นเท็จ
	$x =$	\therefore	$P(2)$	คือ $4(2) + 1 = 2 + 3$	เป็นเท็จ
	$x = 3$	\therefore	$P(3)$	คือ $4(3) + 1 = 3 + 3$	เป็นเท็จ

เราพบว่า ไม่มี ซิสเต็มใดเลยที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส ที่นำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง (คือ ทุกซิสเต็มใน ยูนิเวอร์ส เมื่อนำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้ว ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จทั้งหมด)

ดังนั้น $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นเท็จ

3.4) เป็นจริง

3.5) เป็นจริง

ข้อ 4

ให้ ยูนิเวอร์ส เป็นเซตของจำนวนเต็ม หรือยูนิเวอร์สคือ $\{---, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ---\}$ สำหรับแต่ละ $P(x)$ ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า $\forall x P(x)$ เป็นจริงหรือเท็จ

4.1) $P(x)$ คือ $x > 0$

ตอบ $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ

แนวทางการพิจารณา

	จาก	$P(x)$	คือ	$x > 0$	
เมื่อแทน	$x = -1$	\therefore	$P(-1)$	คือ $-1 > 0$	เป็นเท็จ

จะพบว่า มีอีลิมেন্টบางตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส เมื่อนำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ (ในที่นี้มี $-1, -2, -3, \dots$)

ดังนั้น $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ

4.2) $P(x)$ คือ $x^2 + 1 > 0$

ตอบ $\forall x P(x)$ เป็นจริง

แนวการพิจารณา จะพบว่า สำหรับทุก ๆ อีลิมেন্টใน ยูนิเวอร์ส เมื่อเรานำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริงทั้งหมด

- คือ แทน $x = -1$ ได้ $P(-1)$ คือ $(-1)^2 + 1 > 0$ **จริง**
- แทน $x = -2$ ได้ $P(-2)$ คือ $(-2)^2 + 1 > 0$ **จริง**
- unu $x = 0$ ได้ $P(0)$ คือ $(0)^2 + 1 > 0$ **จริง**
- unu $x = 1$ ได้ $P(1)$ คือ $(1)^2 + 1 > 0$ **จริง**

ฯลฯ

ดังนั้น $\forall x P(x)$ เป็นจริง

4.3) เป็นเท็จ

4.4) เป็นเท็จ

4.5) เป็นเท็จ

ข้อ 5

สำหรับแต่ละ $P(x)$ ในข้อ 4 จงพิจารณาว่า $\exists x P(x)$ เป็นจริงหรือเท็จ

5.3) $P(x)$ คือ $x > 0$

ตอบ $\exists x P(x)$ เป็นจริง

แนวการพิจารณา

จาก $P(x)$ คือ $x > 0$ เราจะแทนตัวแปร x ด้วย บรรดาอีลีเมนต์ใน
ยูนิเวอร์ส ลงใน $P(x)$ แล้วพิจารณาว่า มีอีลีเมนต์ที่แทนตัวแปร x ลงใน $P(x)$ แล้วทำ
ให้ $P(x)$ เป็นจริงไหม ? (ถ้ามีต้องมียอย่างน้อย 1 อีลีเมนต์) ถ้ามีก็กล่าวว่า $\exists x \uparrow P(x)$
เป็นจริง ถ้าไม่มีเลย ก็กล่าวว่า $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นเท็จ

จาก $P(x)$ คือ $x > 0$

แทน $r = 2$. \therefore $P(2)$ คือ $2 > 0$ จริง

ฯลฯ

ดังนั้น $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นจริง

5.2) $P(x)$ คือ $x^2 + 1 > 0$

ตอบ $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นจริง

แนวการพิจารณา

จาก $P(x)$ คือ $x^2 + 1 > 0$

แทน $x = 1$. \therefore $P(1)$ คือ $1^2 + 1 > 0$ จริง

ฯลฯ

ดังนั้น $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นจริง

5.3) $P(x)$ คือ $x + x = x$

ตอบ $\exists x \uparrow P(x)$ เป็นจริง

แนวทางการพิจารณา

จาก $P(x)$ คือ $x+x = x$

แทน $x = 0$ ∴ $P(0) = 0+0 = 0$ **จริง**

ดังนั้น $\forall x \rightarrow P(x)$ **เป็นจริง**

5.4) $P(x)$ คือ $x^2 < 0$

ตอบ $\exists x \rightarrow P(x)$ **เป็นเท็จ**

แนวทางการพิจารณา

จาก $P(x)$ คือ $x^2 < 0$

แทน $x = -1$ ∴ $P(-1)$ คือ $(-1)^2 < 0$ **เป็นเท็จ**

แทน $x = -2$ ∴ $P(-2)$ คือ $(-2)^2 < 0$ **เป็นเท็จ**

แทน $x = 0$ ∴ $P(0)$ คือ $0^2 < 0$ **เป็นเท็จ**

แทน $x = 1$ ∴ $P(1)$ คือ $1^2 < 0$ **เป็นเท็จ**

ฯลฯ

เราจะพบว่า ไม่มีฮิสเมนต์ใดเลยที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส (คือจำนวนเต็ม) ที่แทน ตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x \rightarrow P(x)$ เป็นเท็จ

5.5) $P(x)$ คือ $x \neq x$

ตอบ $\forall x \rightarrow P(x)$ เป็นเท็จ