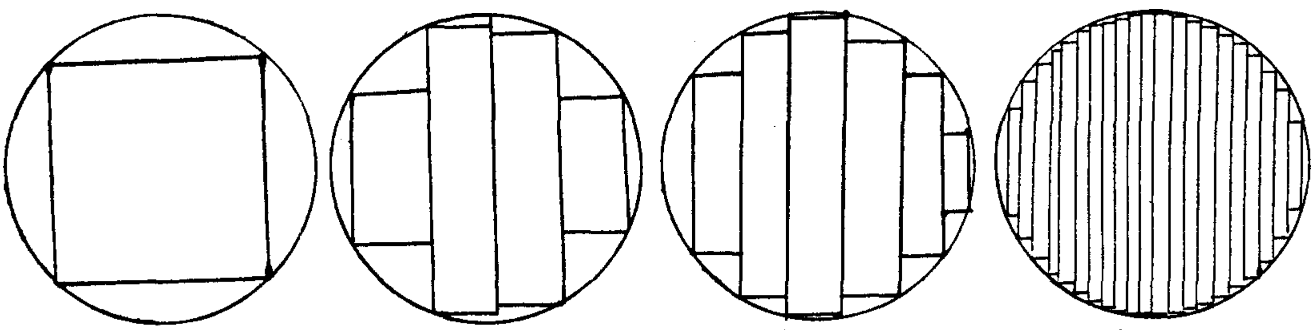
บทที่ 8

แคลคูลัสเบื้องต้น

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ซึ่งแบ่งได้เป็นสองภาคใหญ่ ๆ คือ ภาคแรกเรียกว่า Differential Calculus ซึ่งกล่าวถึงการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเมื่อกำหนดฟังก์ชันมาให้ (คือหาอนุพันธ์เมื่อกำหนดฟังก์ชันมาให้) และการประยุกต์ไปใช้ในด้านต่าง ๆ อีกภาคหนึ่งเรียกว่า Integral Calculus ซึ่งกล่าวถึงการหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงมาให้ (คือหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้) และการประยุกต์ไปใช้ในด้านต่าง ๆ การศึกษาทั้งสองภาคนั้น เราอาจจะอธิบายได้ด้วย ลิมิต (limit) ซึ่งจะกล่าวต่อไป

8.1 ลิมิต (limit)

ลิมิตของสิ่งใด ๆ หมายถึงค่าขีดจำกัดของสิ่งนั้น ๆ เท่าที่สามารถจะเป็นไปได้ เช่น ถ้าเราพิจารณาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลมวงหนึ่ง จะเห็นว่าเราสามารถแบ่งเส้นรอบวงออกเป็นส่วน ๆ เพื่อสร้างสี่เหลี่ยมขึ้นในวงกลมได้มากมาย แล้วก็หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปนั้น ๆ ดังรูป



(1) (2) (3) (4)

จะพบว่าไม่ว่าจะสร้างสี่เหลี่ยมในวงกลมสักกี่รูปก็ตาม ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ เหล่านั้นก็ย่อมมีค่าไม่มากกว่าพื้นที่ของวงกลมเสมอ ถ้าเราให้ A เป็นพื้นที่ของวงกลม, V เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม เรากล่าวได้ว่า " A เป็นค่าขีดจำกัดของ V " คือพื้นที่วงกลมนี้จะเป็นค่าขีดจำกัดของพื้น ที่ของสี่เหลี่ยมทั้งหลายที่อยู่ภายในวงกลมนั้น" นั่นเอง

อนึ่ง จะเห็นว่า ถ้า V ยิ่งมากขึ้น $A - V$ ก็ยิ่งเข้าใกล้ 0 มากขึ้นทุกทีด้วย

8.1.1 ค่าลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ ซึ่งมี x เป็นตัวแปร ถ้าค่า x มีค่าเข้าใกล้ a (แต่ไม่เท่ากับ a) แล้วค่าของ $f(x)$ ก็ยิ่งเข้าใกล้ A เข้าทุกที เราเรียก "ค่า A ว่าเป็นค่าขีดจำกัด หรือเป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a " เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

อ่านว่า "ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a มีค่าเท่ากับ A " หรือ " A เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x ย่างเข้าสู่ A "

หรือบางที เราอาจจะพบ สัญลักษณ์เป็น

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

อ่านว่า "ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าใกล้อนันต์ (infinity) เป็น A " หรือ $f(x)$ มีลิมิตเป็น A เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์" หรือ " A เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ (infinity)" ก็ได้ หมายความว่าเมื่อค่าของ x ยิ่งมากขึ้น ค่าของ $f(x)$ ก็ยิ่งเข้าใกล้ A เข้าทุกที

พิจารณาค่า $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์จากตาราง 8.1.1

x	1	2	10	100	1,000,000	...
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\overline{2}$	$\frac{1}{10}$	$\overline{100}$	$\overline{1,000,000}$	...

ตาราง 8.1.1

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่ามากขึ้นนั้น f(x) จะมีค่าน้อยลง และพบว่าเมื่อ x ยิ่งมีค่ามากขึ้นนั้น f(x) ก็ยิ่งเข้าใกล้ 0 เข้าทุกที ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าค่าลิมิตของ f(x) เป็น 0 เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

8.1.2 นิยามของลิมิต

<u>นิยามที่ 8.1.1</u> $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ หมายความว่าไม่ว่าจะให้เลขบวก ε ใด ๆ

(คือ ε > 0)มา จะสามารถหาจำนวนจริง δ ซึ่งทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ เสมอ เมื่อ $x > \delta$

นิยามที่ 8.1.2 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ หมายความว่าไม่ว่าจะให้เลขบวก ε ใด ๆ มา

จะสามารถหาจำนวนจริง δ ซึ่งทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ เสมอเมื่อ $0 < |x - a| < \delta$

(หมายเหตุ " ε " อ่านว่า epsilon และ δ อ่านว่า "delta")

การพิจารณาค่าลิมิตจากนิยามลิมิตนี้ค่อนข้างยุ่งยากและสับสนแต่เราสามารถพิจารณาหาค่าลิมิตได้โดยง่ายถ้าอาศัยทฤษฎีบทซึ่งว่าด้วยลิมิตต่อไปนี้มาช่วย คือ

8.1.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตบางทฤษฎี

ทฤษฎีบทที่ 8.1.1 ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = A$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ แล้ว

1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

$= A + B$

2) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

$= A - B$

3) $\lim_{x \to a} ((f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \lim_{x \to a} g(x)$

$= AB$

4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

$= \frac{A}{B}$ (เมื่อ $B \neq 0$)

ทฤษฎีบทที่ 8.1.2 ถ้า $f(x) = C$ (C เป็นค่าคงที่) แล้ว

$\lim_{x \to a} f(x) = C$

ทฤษฎีบทที่ 8.1.3 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว

$\lim_{x \to a} f(x) = a$

8.1.4 การพิจารณาหาค่าลิมิต

ตัวอย่างที่ 8.1.1 จงหาค่า $\lim_{x + 2} 5$

วิธีทำ จะได้ว่า $\lim_{x \to 2} 5 = 5$ (จากทฤษฎีที่ 8.1.2)

ตัวอย่างที่ 8.1.2 จงหาค่า $\lim_{x \to 2} 5x$

วิธีทำ $\lim_{x \to 2} 5x = \lim_{x \to 2} 5 \lim_{x \to 2} x$ (ทฤษฎีที่ 8.1.1ข้อ 3)

$= (5) \lim_{x \to 2} x$ (ทฤษฎีที่ 8.1.2)

$= (5)\ (2) = 10$ ษฎี 8.1.3)

ข้อสังเกต คล้ายกับว่าเราแทน $x = 5$ ลงใน $f(x)$ นั่นเอง

นั่นคือ $\lim_{x \to 2} 5x = 5(2) = 10$

ตัวอย่างที่ 8.1.3 จงหาค่า $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 2)$

วิธีทำ $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 2) = (\lim_{x \to 3} x)\ (\lim_{x \to 3} x)$

$- (\lim_{x\to3} 4)\ (\lim_{x\to3} x) + \lim_{x\to3} 2$

$= (3)\ (3) - (4)\ (3) + 2$

$= 9 - 12 + 2 = -1$

ข้อสังเกต คล้ายกับว่าเราแทน $x = 2$ ลงใน $f(x)$ นั่นเอง

นั่นคือ $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 2 = 3^2 - 4(3 + 2$

$= 9 - 12 + 2 = -$

ดังนั้นเพื่อความสะดวกและรวดเร็ว เวลาเราหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a ก็จะแทนค่า x ด้วย a ลงไปในฟังก์ชันเลย(ถ้าแทนแล้วมีค่าเป็นจำนวนจริง (exist)) แต่พึงระลึกเสมอว่าค่าที่แท้จริงของ x ไม่ได้เท่ากับ a แต่มีค่าใกล้ ๆ กับ a เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 8.1.4 จงหาค่า $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 4x - 5)$

วิธีทำ $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 4x - 5) = 3(2)^2 + 4(2) - 5$

$= 12 + 8 - 5 = 15$

ตัวอย่างที่ 8.1.5 จงหา $\lim_{x \to 0} (3x^2 + 2x)$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0} (3x^2 + 2x) = 3(0)^2 + 2(0) = 0$

ตัวอย่างที่ 6.1.6 จงหาค่า $\lim_{x \to 0} \frac{3x3 + 2x^2 - x}{4x}$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{4x} = \frac{3(0)^2 + 2(0)^2 - 0}{4(0)}$

$= \frac{0}{0}$

ซึ่งใช้ไม่ได้เพราะส่วนมีค่าเป็น 0 (does not exist)

เราพิจารณาฟังก์ชัน $\frac{3x^3 + 2x^2 - x}{4x} = \frac{x(3x^2 + 2x - 1)}{4x}$

$= \frac{3x^2 + 2x - 1}{4}$ (ถ้า $x \neq 0$)

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x^2 + 2x - 1)}{4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

ข้อสังเกต ในที่นี้จะได้ว่า ณ.ที่ $x = 0$ พอดีไม่สามารถหาค่าลิมิตได้ แต่ขณะที่ x มีค่าใกล้ ๆ กับ 0 ค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ จะเป็น $-\frac{1}{4}$

ดังนั้นในการหาค่าลิมิตฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าแทนค่า $x = a$ ลงใน $f(x)$ แล้วมีค่าไม่เป็นจำนวนจริง (ไม่ exist) คืออาจจะได้ว่ามีส่วนเป็นศูนย์ (0) เป็นต้น ให้พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ นั้น ๆ ในรูปอื่นคือเปลี่ยนแปลง $f(x)$ ให้อยู่ในรูปใหม่ แล้วหาค่าลิมิตของ $f(x)$ ใหม่นั้น ๆ

ตัวอย่างที่ 8.1.7 จงหาค่า $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x + 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

$$= \lim_{x + 3} x + 3$$

$$= 3 + 3 = 6$$

แสดงว่า ณ.ที่ $x = 3$ ค่าลิมิตของ $f(x)$ ไม่ exist แต่ถ้า x มีค่าใกล้ ๆ กับ 3 ค่าลิมิตจะเป็น 6 นักศึกษาอาจแทนค่า x ที่มีค่าใกล้ ๆ กับ 3 ลงใน $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ จะได้

ดังตาราง 8.1.2

x	1	2	2.5	2.8	2.91	2.99	2.999	2.99999
$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	4	5	5.5	5.8	5.9	5.99	5.999	5.99999

ตาราง 8.1.2

ตัวอย่างที่ 8.1.8 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2 - 2x - 6)}{(x + 2)}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x - 4)}{(x + 2)}$

$$= \lim_{x \to -2} x - 4$$

$$= -2 - 4 = -6$$

ตัวอย่างที่ 8.1.9 จงหา $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{x^2}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{x^2} = (\lim\limits_{x \to \infty} 5)(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x})(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x})$

$$= (5)(0)(0)$$

$$= 0$$

ตัวอย่างที่ 8.1.10 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + x}{3x^2 - 5}$

แนวการคิด ในการทำปัญหาในกรณีที่ x ย่างเข้าสู่ ∞ นี้จะต้องใช้ความรู้ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ มาช่วยพิจารณาดังนั้นปัญหาแบบนี้จะต้องทำโดยจัดให้อยู่ในรูปเศษส่วนเสียก่อน โดยเอา x ที่มีกำลังมากที่สุดหารตลอดทั้งเศษและส่วนแล้วจึงหาค่าออกมา (จะแทน x ด้วย ∞ เลยทีเดียวไม่ได้เพราะจะไม่สามารถบอกได้ว่าค่าลิมิตของมันคืออะไร)

วิธีทำ จาก $\lim_{x + -} \frac{6x^2 + x}{3x^2 - 5}$

เอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{5}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 6 + \lim_{x \to \infty} (\frac{1}{x})}{\lim_{x \to \infty} 3 - (\lim_{x \to \infty} 5)(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x})(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{6 + 0}{3 - 5(0)\ (0)}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + x}{3x^2 - 5} = 2$$

ตัวอย่างที่ 8.1.11 จงหาค่า $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 5x - 6}{7x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 5x + 7}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 5x - 6}{7x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 5x + 7}$

เอา x^4 หารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} - \frac{6}{x^4}}{7 + \frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}} = \frac{5 - (0) - (0) - (0)}{7 + (0) + (0) - (0) + (0)}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 5x - 6}{7x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 5x + 7} = \frac{5}{7}$$

ตัวอย่างที่ 8.1.12 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + x - 5}{4x^3 + 9x^2 - 5x + 8}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + x - 5}{4x^3 + 9x^2 - 5x + 8}$

เอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{4 + 0 - 0 + 0} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + x - 5}{4x^3 + 9x^2 - 5x + 8} = 0$$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 8.1

1. จงหาค่า

1.1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 8)$

1.2) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 9)$

1.3) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x + 5)$

1.4) $\lim\limits_{x \to -2} (x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 5)$

1.5) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3x - 6)^2$

1.6) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x^2 - 16)}{(x + 4)}$

1.7) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 - 5x + 6)}{x - 2}$

1.8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + 8x}{4x^2 + 3x}$

1.9) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x^2 - 5x + 6)}{6x^2 + 10}$

1.10) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{10x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5}{2x^4 + 3x^3 - 4x^2}$

1.11) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2h + 5xh^2 + h^3}{5xh + 5h^2}$

1.12) $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{x^2h + 5xh^2 + h^3}{5xh + 5h^2 + 3xh^3}$

1.13) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^3 + bx^2 - C}{dx^4 + e}$

1.14) $\lim\limits_{h \to a} \dfrac{h^4 - a^4}{h^2 - a^2}$

2. ถ้า $f(x) = x$

จงหา $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

3. ถ้า $f(x) = 3x^2$

จงหา $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

8.2 อนุพันธ์ (Derivative) ของฟังก์ชัน

จุดมุ่งหมายอย่างหนึ่งของอนุพันธ์ ก็คือการหาอัตราการแปรค่าของตัวแปรค่าในฟังก์ชัน เมื่อกำหนดฟังก์ชันมาให้ เช่น จาก $y = f(x)$ เราจะศึกษาว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปนั้น y จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วย "อัตรา" เท่าใด ซึ่งมีประโยชน์ในการประยุกต์ใช้กับสิ่งต่าง ๆ ได้มากมาย

เช่นในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาว่าในขณะที่รถยนต์แล่นไปตามทางสายตรงด้วยระยะทาง y ก.ม. ในเวลา x ชม. เมื่อ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่า y ก็ย่อมแปรเปลี่ยนไปตาม x ในที่นี้อัตราการแปรค่าของ y ก็คือ "อัตรา" การเพิ่มระยะทาง ต่อหน่วยเวลาที่เรียกว่า "ความเร็ว" นั่นเอง หรือจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพลเมืองกับเวลาว่าจำนวนพลเมือง y มีค่าแปรเปลี่ยนไปตามเวลา x อย่างไรในที่นี้อัตราการแปรค่าหรืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ก็คือ "อัตราการเพิ่มของพลเมืองต่อหนึ่งหน่วยเวลา" เราจะเรียก "อัตรา" นี้ว่า "อัตราการเพิ่มของพลเมือง" เป็นต้น

8.2.1 **อัตราการแปรค่าเฉลี่ย** (average rate)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อ X มีค่าเปลี่ยนไป h ($h \neq 0$) คือเปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + h$ นั้น ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ ไป เป็น $f(x + h)$ ดังนั้นค่าของ y d เปลี่ยนแปลงไปก็คือ $f(x + h) - f(x)$ และ จะ เรียกอัตราส่วน $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$; ɪ "อัตราแปรค่าเฉลี่ย" ของ y เมื่อเทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$

ตัวอย่างที่ 8.2.1 ถ้า $y = x^3$ จงคำนวณหาอัตราแปรค่าเฉลี่ยของ y ในช่วง $x = 1$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x3$

อัตราแปรค่าเฉลี่ยของ y ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ในที่นี้ $X = 1$, และ $x + h = 3$ นั่นคือ $h = 2$

$$\therefore \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{(3)^3 - (1)^3}{2} = 4$$

๘.๒.๒ อัตราแปรค่าชั่วขณะ (instanteneous rate)

ถ้าเราให้ช่วงในการคำนวณอัตราการแปรค่าเฉลี่ยคือ h มีความยาวน้อยลงจนมีค่าใกล้ศูนย์ อัตราแปรค่าเฉลี่ยจะมีค่าใกล้ค่าลิมิตค่าหนึ่ง ซึ่งจะเรียกว่า "อัตราการแปรค่าชั่วขณะ" ของ y เขียนแทนด้วย

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ อัตราแปรค่าชั่วขณะนี้ขึ้นอยู่กับค่า x

ไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่า h แต่อย่างใด ? อนึ่ง ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกอัตราการแปรค่าชั่วขณะนี้ว่า "อนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชัน f ที่ x"

๘.๒.๓ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ให้ f เป็นฟังก์ชันโดย $y = f(x)$

จะใช้ สัญลักษณ์ $f'(x)$ เขียนแทน "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x"

(อ่าน $f'(x)$ ว่า "เอฟไพรน์เอ็กซ์") คือ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อ่านว่า $f'(x)$ เท่ากับค่าลิมิตของ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ (0)

หมายเหตุ บางทีก็ใช้ สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่า ดีวาย บาย ดีเอ็กซ์) หรือ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ y' แทน $f'(x)$

ตัวอย่างที่ ๘.๒.๒ ให้ $f(x) = 3x^2$ จงหา $f'(X)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

และ $f(x) = 3x^2$

$\therefore f(x+h) = 3(x+h)^2$

$$= 3x^2 + 6hx + 3h^2$$

ดังนั้น $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h)$$

$$= 6x$$

ตัวอย่างที่ 8.2.8 ให้ $f(x) = x^2 + 2x$ จงหา $f'(x)$ ณ.ที่จุด $x = 3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 2x$

$$f(x + h) = (x + h)^2 + 2(x + h)$$

$$= x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h + 2$$

$$\therefore f'(x) = 2x+2$$

ณ.ที่ $x = 3$

$$\therefore f\ (3) = 2(3) + 2$$

$$= 8$$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 8.2

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ. ที่จุดกำหนดให้

   1.1) $f(x) = 2x^2 - 3x$ ณ. $x = 2$

   1.2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ณ. $x = 1$

2. วัตถุ ชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรง กำหนดให้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป x วินาที วัตถุชิ้นนี้ อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทาง $f(x) = x^2 + 4x + 5$ จงหาความเร็ว ของวัตถุชิ้นนี้ หลังจากที่มันได้เคลื่อนที่ไปแล้ว 10 วินาที

8.3 สูตรเบื้องต้นสำหรับใช้ในการหาอนุพันธ์

การหาค่าอนุพันธ์โดยใช้นิยามเกี่ยวกับลิมิตที่กล่าวมาแล้วนั้น ค่อนข้างยุ่งยากสับสนและไม่ค่อยรวดเร็ว ซึ่งฟังก์ชันยิ่งซับซ้อนมากเท่าไร การหาอนุพันธ์ของมันก็ยิ่งซับซ้อนและยุ่งยากมากขึ้นเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้การหาอนุพันธ์ทำได้โดยรวดเร็ว เราจะใช้สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ซึ่งสูตรแต่ละสูตรนี้ก็พิสูจน์ได้โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ที่ว่า $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ แต่ในที่นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์และสูตรเหล่านี้เป็นเพียงสูตรเบื้องต้นเท่านั้น

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = C$ แล้ว

$f'(x) = 0$ (C เป็นค่าคงที่ใด ๆ)

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว

$f'(x) = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = c\ g(x)$ แล้ว

$f'(x) = c\ g'(x)$

สูตรที่ 4 ถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว

$f'(x) = nx^{n-1}$ (เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ)

สูตรที่ 5 ถ้า $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ แล้ว

$$f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

สูตรที่ 6 ถ้า $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ แล้ว

$$f'(x) = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x)$$

สูตรที่ 7 ถ้า $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ และ $f_2(x) \neq 0$ แล้ว

$$f'(x) = \frac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$$

หมายเหตุ จากสูตรทั้ง 7 นั้น ถ้าเราใช้ สัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ หรือ $\dfrac{df(x)}{dx}$ แทน $f'(x)$

อาจจะเขียนแต่ละสูตรให้สั้น ๆ ได้ตามลำดับดังนี้

สูตรที่ 1 $\dfrac{dc}{dx} = 0$

สูตรที่ 2 $\dfrac{dx}{dx} = 1$

สูตรที่ 3 $\dfrac{d}{dx} cg(x) = c \dfrac{d\, g(x)}{dx}$

สูตรที่ 4 $\dfrac{dx^n}{dx} = \quad n-1$

สูตรที่ 5 $\dfrac{d}{dx} (f_1(x) + f_2(x)) = \dfrac{d}{dx} f_1(x) + \dfrac{d}{dx} f_2(x)$

สูตรที่ 6 $\dfrac{d}{dx} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = f_1(x) \dfrac{d}{dx} f_2(x) + f_2(x) \dfrac{d}{dx} f_1(x)$

สูตรที่ 7 $\dfrac{d}{dx} \left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \dfrac{f_2(x) \dfrac{d}{dx} f_1(x) - f_1(x) \dfrac{d}{dx} f_2(x)}{(f_2(x))^2}$

เมื่อ $f_2(x) \; f \; 0$

ตัวอย่างที่ 8.3.1 ให้ $f(x) = 4x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d\,4x}{dx} = 4\frac{dx}{dx}$ (สูตรที่ 3)

$= 4$ (สูตรที่ 2)

ตัวอย่างที่ 8.3.2 ให้ $y = 3x^2 + 2x - 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x - 5)$

$= \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d5}{dx}$ (สูตรที่ 5)

$= \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - 0$ (สูตรที่ 1)

$= 3\frac{dx^2}{dx} + 2\frac{dx}{dx}$ (สูตรที่ 3)

$= 3\frac{dx^2}{dx} + 2$ (สูตรที่ 2)

$= 3(2x^{2-1}) + 2$ (สูตรที่ 4)

$= 6x + 2$

หมายเหตุ โดยปกติ เวลาทำโจทย์ไม่จำเป็นต้องบอกสูตรหรือชี้แจง เหตุผลอนุโลมให้ทำได้เลย

ตัวอย่างที่ 8.3.3 ให้ $f(x) = x^2 + 2x$ จงหา $f'(x)$ หรือ $\frac{d\,f(x)}{dx}$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 2x$

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 2x)$

$= \frac{dx^2}{dx} + \frac{d\,2x}{dx}$

$= 2x + 2$

ตัวอย่างที่ 8.3.4 ให้ $f(x) = 3x5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 10$

จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 10$

$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} 3x^5 - \frac{d}{dx} 2x^4 + \frac{d}{dx} x^3 - \frac{d}{dx} x^2 + \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx} 10$$

$$= 3 \frac{dx^5}{dx} - 2 \frac{dx^4}{dx} + \frac{dx^3}{dx} - \frac{dx^2}{dx} + \frac{dx}{dx} - 0$$

$$= 3(5x^{5-1}) - 2(4x^{4-1}) + (3x^{3-1}) - (2x^{2-1}) + 1$$

$$= 15x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

ตัวอย่างที่ 8.3.5 ให้ $y = x^2 + x^{\frac{3}{2}} - 4x5 - x + 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^2 + x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} - x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} - \frac{d}{dx} 4x^{\frac{1}{2}} - \frac{dx}{dx} + \frac{d5}{dx}$$

$$= 2x^{2-1} - \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2} - 1} - 4 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2} - 1}\right) - 1 + 0$$

$$= 2x + \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$$

ตัวอย่างที่ 8.3.6 ให้ $y = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $y = 3x^{-2} + 2x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3 \frac{dx^{-2}}{dx} + 2 \frac{dx^{-1}}{dx} + 2 \frac{dx^{-\frac{1}{2}}}{dx} - \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3(-2x^{-2-1}) + 2(-1x^{-1-1}) + 2(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}) - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= -6x^{-3} - 2x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-6}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ตัวอย่างที่ 8.3.7 ให้ $f(x) = x^3 (x^2 - 1)$

วิธีทำ อาจทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 โดยใช้สูตรผลคูณ (สูตรที่ 6)

จาก $f(x) = x^3 (x^2 - 1)$

สมมุติให้ $f_1(x) = x^3$ และ $f_2(x) = (x^2 - 1)$

$$\therefore \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 (x^2 - 1))$$

$$= x^3 \frac{d}{dx}(x^2 - 1) + (x^2 - 1)\frac{d}{dx}x^3$$

$$= x^3 (2x - 0) + (x^2 - 1)(3x^2)$$

$$= 2x^4 + 3x^4 - 3x^2$$

$$= 5x^4 - 3x^2$$

วิธีที่ 2 ทำแบบธรรมดา

จาก $f(x) = x^3 (x^2 - 1)$

$$= x^5 - x^3$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^5 - \frac{d}{dx} x^3$$

$$= 5x^4 - 3x^2$$

ตัวอย่างที่ 8.3.8 ให้ $y = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 - 1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x \neq 1$

วิธีทำ จาก $y = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 - 1}$ (ใช้สูตรที่ 7 โดยให้ $f_1(x) = 3x^2+2x$

และ $f_2(x) = x^3 - 1$)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + 2x}{x^3 - 1}\right)$$

$$= \frac{(x^3 - 1)\frac{d}{dx}(3x^2 + 2x) - (3x^2 + 2x)\frac{d}{dx}(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 - 1)\left(3\frac{dx^2}{dx} + 2\frac{dx}{dx}\right) - (3x^2 + 2x)\left(\frac{dx^3}{dx} - \frac{d1}{dx}\right)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 - 1)(6x + 2) - (3x^2 + 2x)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 + 2x^3 - 6x - 2 - 9x^4 - 6x^3}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{-3x^4 - 4x^3 - 6x - 2}{(x^3 - 1)^2}$$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 8.3

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 4 - 5x$

2. $f(x) = 2x - 3x^2$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

4. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

5. $f(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = \sqrt{3x} + 3\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x^5} + 5x^6$

7. $f(x) = \dfrac{6}{x^{\frac{-1}{3}}} + \dfrac{5}{x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{4}{x} + 3$

8. $f(x) = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x} - 3$

9. $f(x) = (x - 4)^2$

10. $f(x) = x^3(x^2 + x - 5)$

11. $f(x) = (x - 1)(x^3 - x)$

12. $f(x) = (4x^2 - 2x3)(3x^4 + 2x)$

13. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$

8.4 การอินทิเกรต (Integration)

อาจกล่าวได้ในเบื้องต้นว่าการอินทิเกรตเป็นกระบวนการตรงกันข้ามกับอนุพันธ์ กล่าวคือ จะหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้

ถ้า F เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีอนุพันธ์เป็น $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้วจะเรียก $F(x)$ ว่าเป็นพรีมิทีฟ (Primitive) ของ $f(x)$

<u>ตัวอย่าง</u> เช่น x^4, $x^4 + 2$, $x^4 - 3$, $x^4 + C$ (เมื่อ C เป็นค่าคงที่)

ต่างก็ เป็น primitive หรือ เป็นค่าอินทิกรัลของ $4x^3$ ซึ่งจะ เห็นว่า

1) $\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3$

2) $\frac{d}{dx} (x^4 + 2) = 4x3$

3) $\frac{d}{dx} (x^4 - 3) = 4x^3$

4) $\frac{d}{dx} (x^4 + C) = 4x^3$

อาจกล่าวโดยทั่ว ๆ ไปว่า x^4 t C เป็น primitive ของ $4x^3$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ นั่นเอง

นั่นคือ $F(x) = x^4 + C$

ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ ดังนี้

$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C$$

โดยทั่ว ๆ ไป ใช้ สัญลักษณ์

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

เมื่อ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งมีอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ และ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ

อ่าน $\int f(x)\,dx$ ว่า "อินทิกรัลของ f (x) dx" (อินทิกรัลของ เอฟ เอ็กซ์ ดี เอ็กซ์)

เครื่องหมาย $\int$ เรียกว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล (Integral sign) และจะ เรียก f(x) ว่า อินทิแกรน (Integrand)

สูตรเบื้องต้นสำหรับการอินทิเกรต

สูตรที่ 1 $\int dx = x + C$

สูตรที่ 2 $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ **เมื่อ** $n \neq -1$

สูตรที่ 3 $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

สูตรที่ 4 $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ **เมื่อ** C เป็นค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 8.4.1 1 จงหา $\int 4dx$

วิธีทำ $\int 4dx = 4\int dx$ (จากสูตรที่ 4)

$= 4x + C$ (สูตรที่ 1)

ตัวอย่างที่ 8.4.2 จงหา $\int x^5\,dx$

วิธีทำ $\int x^5\,dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + c$

$= \dfrac{x^6}{6} + c$

ตัวอย่างที่ 8.4.3 จงหา $\int (3x^2 - 2x)\,dx$

วิธีทำ $\int (3x^2 - 2x)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2x\,dx$

$= 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx$

$$= 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2\right)$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right)$$

$$= x^3 + 3C_1 - x^2 - 2C_2$$

$$= x^3 - x^2 + (3C_1 - 2C_2)$$

$$= x^3 - x^2 + C$$

(โดยที่ c เป็นค่าคงที่ซึ่งเขียนแทน $3C_1 - 2C_2$)

หมายเหตุ ดังนั้นในขณะที่กำลังหาอินทิกรัลแต่ละเทอมเรายังไม่จำเป็นต้องใส่ค่าคงที่ $C_1, C_2, \ldots$ จะมาใส่เป็น C ตัวเดียวในตอนสุดท้ายเลย เช่นในตัวอย่างต่อ ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 8.4.4 จงหา $\int (15x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx$

วิธีทำ

$$\int (15x^4-8x^3+3x^2-2x+1)\,dx = \int 15x^4dx - \int 8x^3dx + \int 3x^2dx - \int 2xdx + \int dx$$

$$= 15\int x^4dx - 8\int x^3dx + 3\int x^2dx - 2\int xdx + \int dx$$

$$= 15\left(\frac{x^{4+1}}{4+1}\right) - 8\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) - 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + x + C$$

$$= 3x^5 - 2x4 + x^3 - x^2 + x + C$$

ตัวอย่างที่ 8.4.5 จงหา $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + x\right)\,dx$

วิธีทำ $\int(3x^{-3}+2x^{-2}+x)\,dx = \int 3x^{-3}dx + \int 2x^{-2}dx + \int x\,dx$

$$= 3\int x^{-3}dx + 2\int x^{-2}dx + \int xdx$$

$$= 3\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + 2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

$$= -\frac{3}{2}x^{-2} - 2x^{-1} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x} + C$$

$$= \frac{x^4 - 3 - 4x}{2x^2} + C = \frac{x^4 - 4x - 3}{2x^2} + C$$

ตัวอย่างที่ 8.4.6 จงหา $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}\right) dx$

วิธีทำ $\int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{2}\, dx - \int 3x^{-\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{3}{2}\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) - 3\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right) + C$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) - 3\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 6x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + C$$

ตัวอย่างที่ 8.4.7 จงหา $\int (2x^3+3\sqrt{x} - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 5)\, dx$

วิธีทำ $\int (2x^3+3x^{\frac{1}{2}}-4x^{-5}+2x^{-\frac{3}{2}} + 5)\, dx$

$$= \int 2x^3dx + \int 3x^{\frac{1}{2}}dx - \int 4x^{-5}dx + \int 2x^{-\frac{3}{2}}dx + \int 5dx$$

$$= 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + 3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) - 4\left(\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right) + 2\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right) + 5x + C$$

$$= \frac{x^4}{2} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{-4} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 5x + C$$

$$= \frac{x^4}{2} + 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5x + C$$

ตัวอย่างที่ 8.4.8 จงหา $\int (x^3 - 2)^2\, dx$

วิธีทำ $\int (x^3 - 2)^2\, dx = \int (x^6 - 4x^3 + 4)\, dx$

$$= \int x^6 dx - \int 4x^3 dx + \int 4\, dx$$

$$= \frac{x^7}{7} - \frac{4x^4}{4} + 4x + c$$

$$= \frac{x^7}{7} - x^4 + 4x + C$$

ตัวอย่างที่ 8.4.9 จงหา $\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2}\, dx$

วิธีทำ

$$\int \left(\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2}\right) dx = \int \frac{x^4}{x^2}\, dx - \int \frac{x^2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \int x^2\, dx - \int dx + \int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{x} + C$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 - 3}{3x} + C$$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 8.4

จงหาค่า

1) $\int 5x\, dx$

2) $\int (3 - 2x + 5x^2)\, dx$

3) $\int (5x^4 - 4x3 + 3x^2 - 2x + 1)\, dx$

4) $\int (\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{5} x + 6)\, d\, x$

5) $\int (\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2})\, dx$

6) $\int (\frac{3}{4x5} + \frac{6}{5x^4} - \frac{3}{x^2} + 4)\, dx$

7) $\int (2\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 3x2\sqrt{x})\ dx$

8) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{3\sqrt{x^3}} - \frac{6}{\sqrt{x^5}}\right)\ dx$

9) $\int \left(4x^3 - \frac{4}{x^3} + 4\sqrt{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x^3}} + 4\right)\ dx$

10) $\int (3x^2 - 4)^2\ dx$

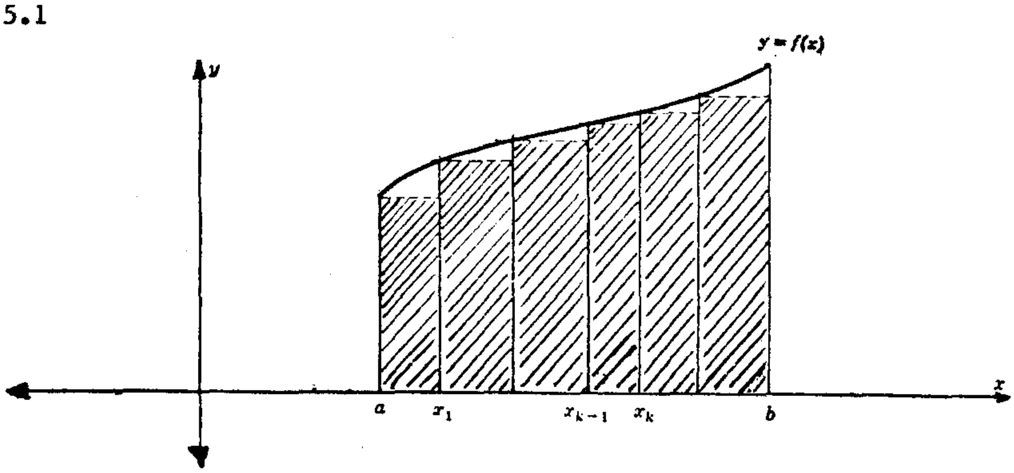
11) $\int (2 - 5x)^3\ dx$

12) $\int \left(\frac{4x^4 + 3x^3 + 2x + 5}{x^3}\right)\ dx$

8.5 อินทิกรัล (Integral)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีความต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ และ $F(x)$ เป็น primitive ของ $f(x)$

แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนด้วยจุด $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ โดย $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$ โดยที่ทำให้ในแต่ละช่วงย่อย ๆ มีความกว้าง Δx โดย $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ เช่น ดังรูป 8.5.1



รูป 8.5.1

และเรียก $\lim_{n \to \infty} \left[f(a)\ \Delta x + f(x_1)\ \Delta x + f(x_2)\ \Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\ \Delta x\right]$

ว่า "อินทิกรัล (Integral) ของ $f(x)$ ในช่วง $[a,b]$" และเขียนแทนค่านี้ด้วย สัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

และถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ สำหรับ

ทุก ๆ ค่าของ x ในช่วง $[a,b]$ แล้วย่อมได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int f(x)\ dx \Big]_a^b = F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

หมายเหตุ เมื่อ a เป็น ค่าลิมิตล่าง (lower limit)

b เป็น ค่าลิมิตบน (upper limit)

ตัวอย่างที่ 8.5.1 จงหาค่าของ $\int_1^2 x^2\ dx$

วิธีทำ

$$\int_1^2 x^2\ dx = \int x^2\ dx \Big]_1^2$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big]_1^2$$

$$= \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ตัวอย่างที่ 8.6.2 จงหาค่า $\int_a^b x3\ dx$

วิธีทำ

$$\int_a^b x^3\ dx = \int x^3\ dx \Big]_a^b$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big]_a^b$$

$$= \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

ตัวอย่างที่ 8.5.3 จงหาค่าของ $\int_1^2 (x^2 + 4)\, dx$

วิธีทำ $\int_1^2 (x^2 + 4)\, dx = \int (x^2 + 4)\, dx \Big|_1^2$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x \Big]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 4(2)\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} + 4(1)\right)$$

$$= \frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} - 4 = \frac{19}{3}$$

ตัวอย่างที่ 8.5.4 จงหาค่า $\int_{-2}^{3} (3 - x)^2\, dx$

วิธีทำ $\int_{-2}^{3} (3 - x)^2 dx = \int_{-2}^{3} (9 - 6x + x^2)\, dx$

$$= \int (9 - 6x + x^2)\, dx \Big]_{-2}^{3}$$

$$= 9x - \frac{6x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{3}$$

$$= 9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{3}$$

$$= \left(9(3) - 3(3)^2 + \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-2) - 3(-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(27 - 27 + \frac{27}{3}\right) - \left(-18 - 12 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 9 + 18 + 12 + \frac{8}{3} = \frac{41}{3}$$

ตัวอย่างที่ 6.6.6 จงหาค่า $\int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)\,dx$

วิธีทำ $\int_1^2 (4x3 - 3x^2 + 2x + 5)\,dx = 4\int_1^2 x^3dx - 3\int_1^2 x^2dx + 2\int_1^2 xdx + \int_1^2 5dx$

$$= \frac{4x^4}{4}\Big]_1^2 - \frac{3x^3}{3}\Big]_1^2 + \frac{2x^2}{2}\Big]_1^2 + 5x\Big]_1^2$$

$$= x^4\Big]_1^2 - x^3\Big]_1^2 + x^2\Big]_1^2 + 5x\Big]_1^2$$

$$= (2^4 - 1^4)-(2^3-1^3)+(2^2-1^2)+(5(2) - 5(1))$$

$$= 15 - 7 + 3 + 5 = 16$$

ตัวอย่างที่ 8.5.6 จงหาพื้นที่ซึ่งปิดล้อมโดยกราฟ

$y = 4-x^2$ กับแกน X

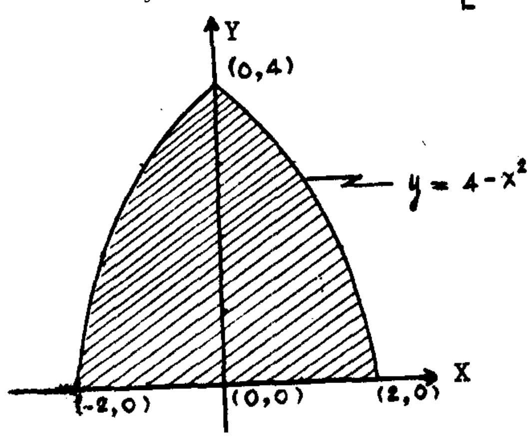
วิธีทำ การหาพื้นที่ซึ่งปิดล้อมโดยกราฟของ $y = 4-x^2$ กับแกน X นั้น

ก่อนอื่นจะต้องหาจุดที่กราฟตัดแกน x โดยแทน $y = 0$ ลงในสมการจะได้

$4-x^2 = 0 \therefore x = \pm 2$

นั่นคือ ตัดแกน X ที่จุด (-2,0) กับ (2,0)

นั่นคือ หาพื้นที่ใต้กราฟ $y = 4-x^2$ ในช่วง $[-2,2]$ ดังรูป 8.5.2



รูป 8.5.2

$\therefore$ พื้นที่ ที่ต้องการคือ $\left|\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx\right|$

โดย $\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \int_{-2}^{2}4dx - \int_{-2}^{2}x^2\,dx$

$= 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$

$= (4(2) - 4(-2)) - (\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3})$

$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

นั่นคือ พื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 4-x^2$ กับแกน X (ส่วนที่แรเงา) เท่ากับ $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 8.5

1. จงหาค่าของ

1.1) $\int_{2}^{4} 5x\,dx$

1.2) $\int_{0}^{3}(3-2x+5x^2)\,dx$

1.3) $\int_{1}^{2}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2})\,dx$

1.4) $\int_{-3}^{2}(3x^2-4)^2\,dx$

1.5) $\int_{1}^{2}\frac{(1+x^2)^2}{x^2}\,dx$

2. จงคำนวณหาพื้นที่ระหว่างเส้นตรง $3x + 2y = 15$ กับแกน X ในช่วง $x = 1$ ถึง $x = 4$

3. จงคำนวณหาพื้นที่ ระหว่างกราฟ $y = x^3 + x^2$ กับแกน X