บทที่ 6
ปัญหาเกี่ยวกับการนับ

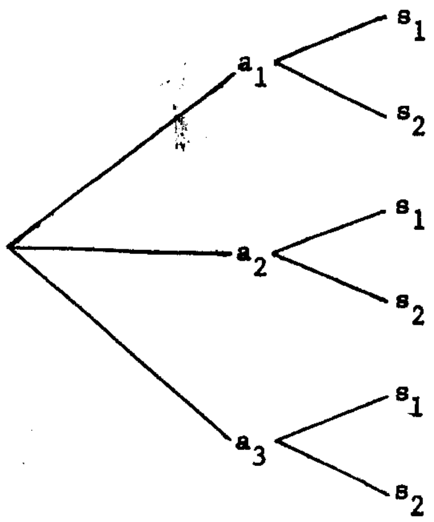
6.1 ปัญหาทั่ว ๆ ไปและหลักการขั้นพื้นฐานเกี่ยวกับการนับ

การนับเป็นสิ่งสำคัญขั้นพื้นฐานอย่างหนึ่งของคณิตศาสตร์ การนับในที่นี้ไม่ได้หมายความถึงนับหนึ่ง, สอง, สาม..., แต่หมายถึงจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ อันอาจจะเป็นการจัดชุดของสิ่งของต่าง ๆ ก็ได้ เช่น การจุดชุดของคน, การจัดชุดของทีมบาสเกตบอลที่จะเข้าแข่งขัน, การจัดสายการแข่งขันกีฬาต่าง ๆ, การจัดชุดอาหารเป็นต้น

ตัวอย่างที่ 6.1.1 มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งจัดชมรมให้นักศึกษาเลือกโดยให้นักศึกษาเลือกชมรมทางวิชาการได้หนึ่งชมรมและชมรมทางกีฬาได้หนึ่งชมรม ถ้ามหาวิทยาลัยมีชมรมทางวิชาการ 3 ชมรม และชมรมทางกีฬา 2 ชมรม นักศึกษาจะมีวิธีเลือกชมรมได้ทั้งหมดกี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีพิจารณา สมมติให้ชมรมทางวิชาการ 3 ชมรมเป็น a_1, a_2, a_3 และสมมติให้ชมรมทางกีฬา 2 ชมรมเป็น s_1, s_2

จะเขียนแผนภาพแสดงการเลือกได้เป็น



จะเห็นว่ามีวิธีเลือกชมรมได้ทั้งหมด 6 วิธี คือ

$(a_1,s_1),(a_1,s_2),(a_2,s_1),(a_2,s_2),(a_3,s_1),(a_3,s_2)$

หรืออาจคิดแบบผลคูณคาร์ทีเซียนก็ได้เป็น

ให้ A เป็นเซ็ตของชมรมทางวิชาการ (ซึ่งมี 3 ชมรม)

$\therefore$ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

B เป็นเซ็ตของชมรมทางกีฬา (ซึ่งมี 2 ชมรม)

$\therefore$ $B = \{s_1, s_2\}$

ซึ่งจะเห็นว่า จำนวนวิธีการเลือกที่เราพิจารณาเป็นคู่ลำดับไว้ข้างบนแล้วนั้นก็คือ อีลีเมนต์ของเซ็ต A × B นั่นเอง

คือจะได้ $A \times B = \{(a_1,s_1),(a_1,s_2),(a_2,s_1),(a_2,s_2),(a_3,s_1),(a_3,s_2)\}$

ดังนั้น จากโจทย์ข้อนี้อาจสรุปได้ว่า

มีวิธีเลือกชมรมทางวิชาการได้ 3 วิธี (เพราะมี 3 ชมรม) สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกชมรมทางวิชาการไปแล้วอาจเลือกชมรมทางกีฬาได้อีก 2 วิธีต่าง ๆ กัน

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกชมรมได้ คือ $3 \times 2 = 6$ วิธี

การคำนวณเพื่อหาคำตอบสำหรับปัญหาต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้นนี้ ถ้าหากมีจำนวนมาก ๆ ก็คงยุ่งยากสับสน เราจึงต้องมาศึกษาหลักการบางอย่าง ซึ่งอาจจะช่วยให้เราคิดคำนวณได้ง่ายสะดวกและรวดเร็วขึ้น

หลักการขั้นพื้นฐานที่ 1

สมมติว่ามีการกระทำสองอย่างต่อเนื่องกันโดยอาจกระทำอย่างที่หนึ่งได้ m วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกกระทำอย่างที่หนึ่งลงไปแล้ว อาจกระทำอย่างที่สองต่อเนื่องกันไปได้ n วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกกระทำทั้งสองอย่างต่อเนื่องกันจะเท่ากับ mn วิธีต่าง ๆ กัน

ตัวอย่างที่ 6.1.2

ถ้าตึก ๆ หนึ่งมีประตูทั้งหมด 3 ประตู จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาคนหนึ่งจะเข้าไปในตึก ๆ นั้นแล้วกลับออกมาโดยไม่ใช้ประตูซ้ำกัน

วิธีพิจารณา เนื่องจากประตูของตึกมีอยู่ 3 ประตู

ขาเข้า นักศึกษาจะมีวิธีเลือกเข้าได้ 3 วิธี

ขาออก นักศึกษาจะต้องไม่ออกทางประตูเดียวกันที่เข้า ฉะนั้นในแต่ละวิธีของขาเข้าไปในตึกนักศึกษาจะมีวิธีเลือกประตูออกได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาจะเข้าไปในตึกนั้นแล้วกลับออกมาโดยไม่ใช้ประตูเดิม คือ $3 \times 2 = 6$ วิธี

หรือจะลองเขียนจำนวนวิธีทั้งหมดดูก็จะได้ว่า

วิธีที่ 1 เข้าประตู 1 ออกประตู 2

วิธีที่ 2 เข้าประตู 1 ออกประตู 3

วิธีที่ 3 เข้าประตู 2 ออกประตู 1

วิธีที่ 4 เข้าประตู 2 ออกประตู 3

วิธีที่ 5 เข้าประตู 3 ออกประตู 1

วิธีที่ 6 เข้าประตู 3 ออกประตู 2

ซึ่งจะมีทั้งหมด 6 วิธี นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.1.3

ถ้าตึก ๆ หนึ่งมีประตูทั้งหมด 3 ประตู จงหาจำนวนวิธีที่นักศึกษาคนหนึ่งจะเข้าไปแล้วกลับออกมา<u>โดยใช้ประตูซ้ำกันได้</u>

วิธีพิจารณา เนื่องจากประตูตึก มี 3 ประตู

ขาเข้า นักศึกษามีวิธีเลือกประตูเข้าได้ 3 วิธี

ขาออก นักศึกษาจะมีวิธีเลือกประตูออกได้อีก 3 วิธี เพราะเลือกออกประตูเดิมได้ (ใช้ประตูซ้ำกันได้)

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาจะเข้าไปในตึก ๆ นั้นแล้วกลับออกมาโดยใช้ประตูเดิมได้นั้น คือ $3 \times 3 = 9$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.1.4

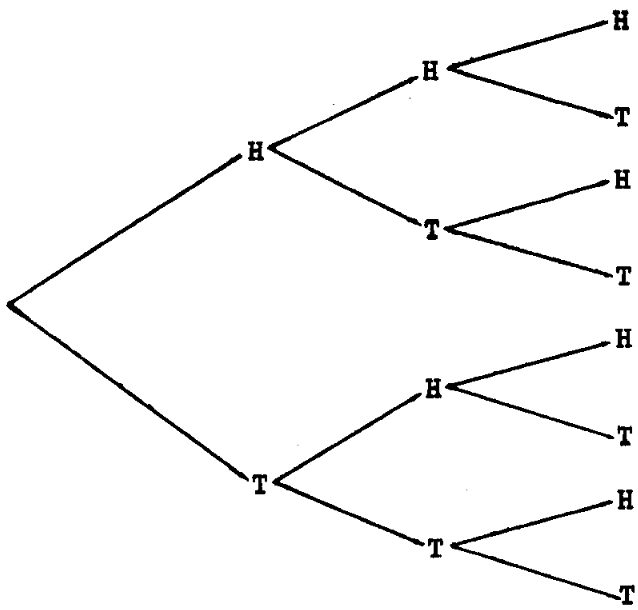
ในการโยนเหรียญบาท 3 เหรียญ จะปรากฏผลทั้งหมดกี่วิธี

วิธีพิจารณา ในการโยนเหรียญบาทแต่ละอันเหรียญอาจออกหัว (H) หรือก้อย (T) ดังนั้นผลที่ได้จากการโยนเหรียญที่ 1 มี 2 วิธี

สำหรับแต่ละวิธีของผลที่ได้จากการโยนเหรียญที่ 1 แล้วการโยนเหรียญที่ 2 อาจได้ผล 2 วิธี คือ หัว (H) กับก้อย (T)

และหลังจากนั้น จำนวนวิธีที่ได้จากการโยนเหรียญที่สามก็มี 2 วิธี เช่นกัน

ดังนั้น ผลที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ จึงมี $2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี ซึ่งอาจเขียนแผนภาพแสดงได้เป็น



จะเห็นว่า วิธีทั้งหมดก็คือ

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

ซึ่งมีทั้งหมด 8 วิธี นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.1.5 ชายหนุ่มคนหนึ่งมีกางเกง 3 ตัว, เสื้อ 4 ตัว อยากทราบว่าชายหนุ่มคนนี้จะมีวิธีแต่งตัวโดยนุ่งกางเกงและสวมเสื้อเหล่านี้ให้ต่าง ๆ กันได้กี่วิธี

วิธีทำ ชายหนุ่มผู้นี้จะมีวิธีเลือกกางเกงนุ่งได้ทั้งหมด 3 วิธี

สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกกางเกงตัวใดตัวหนึ่งแล้ว ยังมีวิธีเลือกเสื้อใส่ได้อีก 4 วิธี

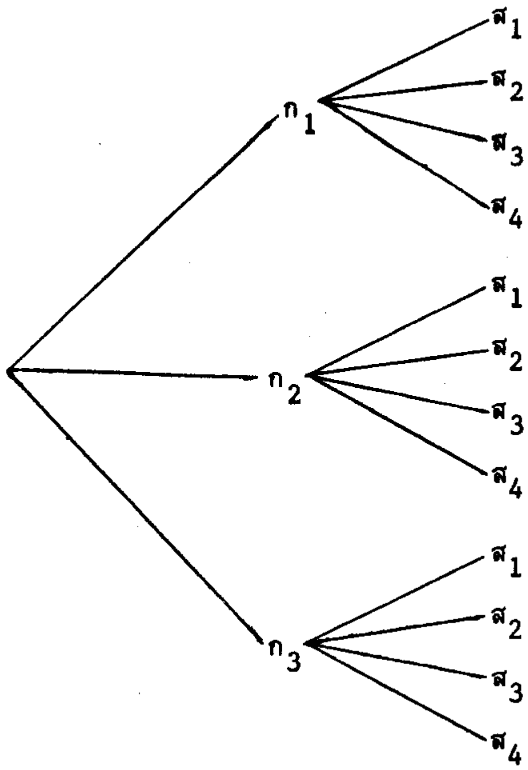
ดังนั้น เขาจะมีวิธีแต่งตัวทั้งหมด $= 3 \times 4$ วิธี

หรือเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

สมมติให้กางเกงทั้ง 3 ตัว คือ ก$_1$, ก$_2$, ก$_3$

และ เสื้อ 4 ตัว คือ ส$_1$, ส$_2$, ส$_3$, ส$_4$

ดังนั้น จะได้



นั่นคือ จำนวนวิธีเลือกทั้ง 12 วิธี มีดังนี้

ก$_1$ส$_1$, ก$_1$ส$_2$, ก$_1$ส$_3$, ก$_1$ส$_4$, ก$_2$ส$_1$, ก$_2$ส$_2$, ก$_2$ส$_3$, ก$_2$ส$_4$, ก$_3$ส$_1$, ก$_3$ส$_2$, ก$_3$ส$_3$, ก$_3$ส$_4$

หลักการขั้นพื้นฐานที่ 2

ถ้ามีการกระทำหลาย ๆ อย่างต่อเนื่องกันและสามารถเลือกกระทำอย่างที่ 1 ได้ m_1 วิธี

สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกกระทำอย่างที่ 1 แล้ว มีวิธีที่จะเลือกกระทำอย่างที่ 2 ได้ m_2 วิธี

สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกกระทำอย่างที่ 2 แล้ว มีวิธีที่จะเลือกกระทำอย่างที่ 3 ได้ m_3 วิธี

สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกกระทำอย่างที่ $n - 1$ แล้ว มีวิธีที่จะเลือกกระทำอย่างที่ n ได้ m_n วิธี

ดังนั้นจะมีวิธีทั้งหมดที่จะเลือกกระทำเท่ากับ $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.1.6 ถ้าเมือง A, B, C, D มีถนนติดต่อกันเป็นดังนี้

เมือง A กับเมือง B มีถนนติดต่อกัน 2 สาย

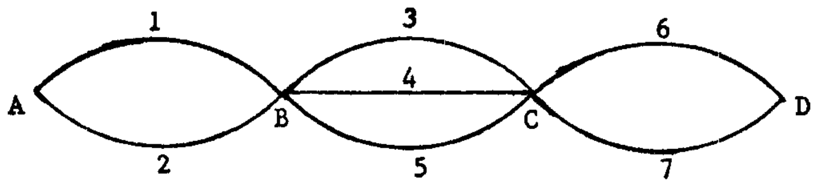
เมือง B กับเมือง C มีถนนติดต่อกัน 3 สาย

เมือง C กับเมือง D มีถนนติดต่อกัน 2 สาย

นายแดงต้องการเดินทางออกจากเมือง A เพื่อที่จะไปเมือง D โดยผ่านเมือง B และ C ดังนั้น จงหาว่า นายแดงจะมีวิธีเลือกเดินทางต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ นายแดงจะมีวิธีเลือกเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B ได้ทั้งหมด 2 วิธี สำหรับแต่ละวิธีที่เลือกเดินทางจาก A ไป B แล้วนั้น จะมีวิธีเลือกเดินทางจาก B ไปยัง C ได้ทั้งหมด 3 วิธี และหลังจากนั้นแล้วก็จะเลือกเดินทางจากเมือง C ไปยังเมือง D ได้อีก 2 วิธี

ดังนั้น นายแดงจะมีวิธีเลือกเดินทางทั้งหมดได้ $2 \times 3 \times 2 = 12$ วิธี ซึ่งสามารถเขียนภาพประกอบได้เป็น



นั่นคือ นายแดงอาจเลือกเดินทางด้วยวิธีต่าง ๆ ดังนี้ คือ

136, 137, 146, 147, 156, 157, 236, 237, 246, 247, 256, 257

แสดงว่านายแดงมีวิธีเลือกเดินทางต่าง ๆ กันได้ 12 วิธี นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.1.7 จะมีจำนวนเลขสามหลัก (หลักร้อย) ทั้งหมดกี่จำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1, 2, 3, 4

วิธีทำ สมมติให้เลขสามหลักนั้น คือ $\boxed{x_1}\boxed{x_2}\boxed{x_3}$

คือ มี x_3 เป็นหลักหน่วย, x_2 เป็นหลักสิบ, x_1 เป็นหลักร้อย

จากเลขที่กำหนดมาให้มี 1,2,3,4

ดังนั้น มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 จากเลขที่กำหนดให้ทั้งหมด 4 ตัว ได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน

มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_2 จากเลขที่กำหนดให้ทั้งหมด 4 ตัว ได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน

มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_3 จากเลขที่กำหนดให้ทั้งหมด 4 ตัว ได้ 4 วิธีต่าง ๆ กัน

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกทั้งหมดเป็น $4 \times 4 \times 4 = 64$ วิธี

นั่นคือ จะมีเลขสามหลักที่ประกอบด้วยเลข 1,2,3,4 ทั้งหมด 64 จำนวน

ตัวอย่างที่ 6.1.8 จะมีเลขสามหลัก (หลักร้อย) ทั้งหมดกี่จำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1,2,3,4 โดยจำนวนเหล่านั้นไม่มีเลขในหลักต่าง ๆ ซ้ำกันเลย

วิธีทำ สมมติให้เลขทั้งสามหลัก นั่นคือ $\boxed{x_1 \mid x_2 \mid x_3}$

ดังนั้น มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_1 จากเลขทั้งหมด ซึ่งมี 4 ตัว ได้ 4 วิธี

มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_2 จากเลขที่เหลืออีก 3 ตัว ได้ 3 วิธี

มีวิธีเลือกเลขมาแทน x_3 จากเลขที่เหลืออีก 2 ตัว ได้ 2 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีทั้งหมด $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี

นั่นคือ จะมีเลขจำนวนสามหลัก ที่ประกอบด้วยเลข 1,2,3,4 โดยในจำนวนเหล่านั้นไม่มีตัวเลขในหลักต่าง ๆ ซ้ำกันเลย ได้ 24 จำนวน

เนื่องจากมีจำนวนวิธีไม่มากนัก เราจึงสามารถเขียนจำนวนเหล่านั้นแสดงประกอบได้ดังนี้

123, 124, 132, 134, 143, 142, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432

ซึ่งจะได้ทั้งหมด 24 จำนวนที่ต่าง ๆ กัน และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกันเลย

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 6.1

1. ประตูเข้าตึก NB.3A มี 4 ประตู และมีประตูทะลุจากตึก NB.3A ไปตึก NB.3B 2 ประตู นักศึกษาคนหนึ่งต้องการจะเดินเข้าตึก NB.3B โดยผ่าน NB.3A เขาจะมีวิธีเดินได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

2. สมมติว่ามีถนนจากกรุงเทพ ฯ ถึง อยุธยาอยู่ 4 สาย จากอยุธยา ถึง สระบุรี 2 สาย จากสระบุรี ถึง นครสวรรค์ 3 สาย จากนครสวรรค์ ถึง ตาก 5 สาย และ จากตาก ถึง เชียงใหม่ 1 สาย จงหาว่าชายคนหนึ่งจะมีวิธีเดินทางจากกรุงเทพ ฯ ไปเชียงใหม่โดยผ่านอยุธยา, สระบุรี, นครสวรรค์ และตาก ได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

3. ห้อง ๆ หนึ่งมีประตูอยู่ 2 ประตู ถ้าจะเข้าห้องโดยเข้าประตูหนึ่งแล้วออกอีกประตูหนึ่งซึ่งไม่ซ้ำกับประตูที่เข้ามา จะมีวิธีเข้าและออกได้ทั้งหมดกี่วิธี

4. นักศึกษาผู้หนึ่งมีกางเกงอยู่ทั้งหมด 4 ตัว และมีเสื้ออยู่ทั้งหมด 3 ตัว จงหาว่า นักศึกษาผู้นี้จะมีวิธีสวมเสื้อและกางเกงเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่ชุด

5. ในการทดสอบท้ายชั่วโมงของวิชา MA 103 มีข้อทดสอบแบบถูกผิด (คือ เลือกตอบว่าจริงหรือเท็จ) อยู่ 5 ข้อ นักศึกษาแต่ละคนที่ทำข้อทดสอบนี้จะมีวิธีตอบข้อสอบชุดนี้ได้ต่าง ๆ กันกี่วิธี (โดยแต่ละคนต้องตอบคำถามทุกข้อ)

6. บริษัทผลิตรองเท้าผู้ชายสำเร็จรูปบริษัทหนึ่ง ผลิตรองเท้าทั้งหมด 6 แบบ แต่ละแบบมี 2 สี และมีขนาดต่าง ๆ กัน 10 ขนาด ถ้าทางบริษัทจะจัดรองเท้าออกโชว์หน้าบริษัทให้ครบทุกแบบ ทุกสี ทุกขนาด เขาจะต้องใช้รองเท้าทั้งหมดกี่คู่

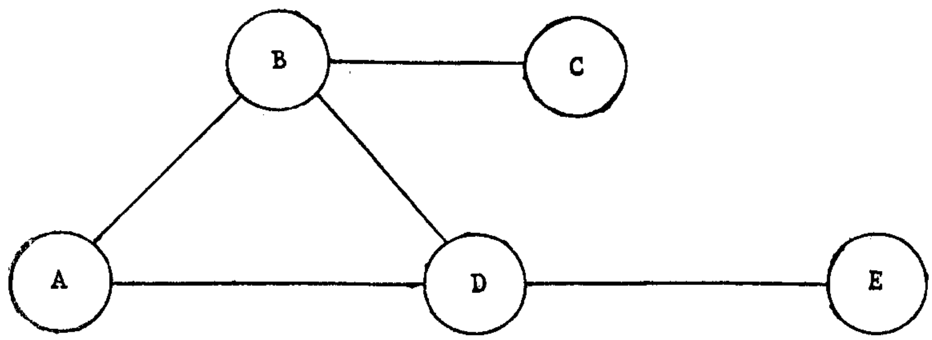
7. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อม ๆ กัน จงหาจำนวนวิธีที่จะได้ผลต่าง ๆ กันทั้งหมด กี่วิธี อะไรบ้าง ?

8. หมายเลขโทรศัพท์ซึ่งประกอบด้วยเลข 7 ตัว และ 3 ตัวแรกเป็น 377 มีได้ทั้งหมดกี่หมายเลข

9. จะมีจำนวนเลขสองหลัก (หลักสิบ) ที่จำนวนที่ประกอบด้วยเลข 3,4,5 หรือ 6 โดยในจำนวนเหล่านั้น ไม่มีเลขในหลักต่าง ๆ ซ้ำกันเลย

10. จะมีจำนวนเลขสามหลัก (หลักร้อย) ที่จำนวนที่ประกอบด้วยเลข 0,1,2,3,4 โดยในจำนวนเลขเหล่านั้นไม่มีเลขในหลักต่าง ๆ ซ้ำกันเลย

11. จากรูป ให้ A. B. C. D. E เป็นเกาะ 5 เกาะ มีสพานเชื่อมติดต่อกันได้ดังรูป ชายคนหนึ่งจะเริ่มเดินทางจากเกาะ A ไปยังเกาะต่าง ๆ โดยไม่ใช้เส้นทางซ้ำกัน เขาจะเดินทางไปถึงจุดสิ้นสุด (คือเดินต่อไปไม่ได้เพราะไม่มีสะพานเชื่อม) ได้ทั้งหมดกี่วิธี อะไรบ้าง?



3.2 n แฟกตอเรียล (n-factorial)

n-factorial หมายถึงผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ n! (อ่านว่า n factorial หรือ factorial n ก็ได้)

นั่นคือ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

หรือเขียนอีกแบบได้ว่า

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

เช่น $1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(หรืออาจเขียนได้ว่า $5! = 5 \times 4!$

$= 5 \times 4 \times 3!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(n+2)! = (n+2)\ (n+1)\ (n)\ (n-1)\ (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

$(n-3)! = (n-3)\ (n-4)\ (n-5) \ldots 3 \times 2 \times 1$

หมายเหตุ เรากำหนดให้ $0! = 1$

ตัวอย่างที่ 6.2.1 จงหาค่าของ $\frac{6!}{3!}$

วิธีทำ $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$

หรือ $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$

ตัวอย่างที่ 6.2.2 จงหาค่า $\frac{10!}{2!\,3!\,7!}$

วิธีทำ $\frac{10!}{2!\,3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!}$

$= \frac{720}{12} = 60$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 จงหาค่าของ $\frac{8!\,6!}{4!\,3!}$

วิธีทำ $\frac{8!\,6!}{4!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4! \times 3!}$

$= 201600$

ตัวอย่างที่ 6.2.4 จงหาค่าของ n เมื่อ $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 6$

วิธีทำ
$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)!}{(n-3)!}$$
$$= n^2-3n+2$$

จากโจทย์เราได้ว่า

$$n^2 - 3n + 2 = 6$$
$$n^2 - 3n - 4 = 0$$
$$(n - 4)(n + 1) = 0$$
$$n = 4, -1$$

จากนิยาม เราให้นิยามเฉพาะเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกไว้เท่านั้น ดังนั้นค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มลบ จึงไม่ใช้

นั่นคือ $n = 4$

ตัวอย่างที่ 6.2.5 จงกระจาย $\frac{n!}{(n-r)!}$ ให้อยู่ในรูปที่ไม่มี factorial เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวกและ $1 \le r \le n$

วิธีทำ
$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$
$$= n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-r+1)$$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 6.2

1. จงหาค่าของ

1.1) $\frac{8!}{4!}$

1.2) $\frac{10!}{12!}$

1.3) $\frac{100!}{98!}$

1.4) $\frac{15!\,12!}{13!\,10!}$

1.5) $\frac{10!}{7!\,2!\,1!}$

1.6) $\frac{5!\,6!}{3!\,4!\,5!}$

1.7) $\frac{n!}{(n-1)!}$

1.8) $\frac{(n+2)!}{n!}$

1.9) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

1.10) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

2. ถ้า $\frac{n!}{(n-1)!} = 6$ จงหาค่า n

3. ถ้า $\frac{(n+2)!}{n!} = 6$ จงหาค่า n

4. ถ้า $\frac{n!}{(n-4)!} = 42 \times \frac{n!}{(n-2)!}$ จงหาค่า n

5. ถ้า $2 \times \frac{n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}$ จงหาค่า n

6. ถ้า $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$ จงหาค่า n

7. จงเขียนแสดงผลคูณเหล่านี้ให้อยู่ในรูป factorial

7.1) $15 \times 14 \times 13 \ldots 3 \times 2 \times 1$

7.2) $10 \times 9 \times 8 \times 7$

7.3) $10 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 4$

7.4) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

7.5) $n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

๖.๓ การแปรลำดับหรือการเรียงลำดับหรือการจัดลำดับ (Permutation)

การจัดลำดับ คือการจัดเรียงลำดับของสิ่งของใด ๆ โดย คำนึงถึง ลำดับที่ ของสิ่งของนั้น ๆ เป็นสำคัญ ในการจัดเรียงลำดับนั้น อาจจัดทีละส่วนหรือทีละทั้งหมดก็ได้

การจัดลำดับมี 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 การจัดลำดับเป็นแนวเส้นตรง (linear permutation) แบ่งเป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้ามีของอยู่ n สิ่งต่าง ๆ กัน ถ้านำมาจัดลำดับทีละ r สิ่ง $(r \leq n)$ โดย ไม่ใช้ซ้ำกัน เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ ${}^{n}P_{r}$ จะมีจำนวนวิธีที่จะจัดลำดับทั้งหมดเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ} \qquad {}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

หมายเหตุ

1) ถ้า $r < n$ แสดงว่าในการจัดลำดับนั้นนำมาจัดทีละส่วน (ส่วนละ r สิ่ง) แต่ ถ้า $r = n$ แสดงว่านำมาจัดทีเดียวทั้งหมดเลย

2) สัญลักษณ์ ${}^{n}P_{r}$ นั้น บางทีอาจเขียนแทนด้วย ${}_{n}P_{r}$ หรือ $P(n,r)$ หรือ P_{r}^{n} ก็ได้

3) ในกรณีที่ $r = n$ จะเขียน ${}^{n}P_{r}$ ได้เป็น ${}^{n}P_{n}$ ซึ่งจะได้ว่า

$${}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

ข้อสังเกต 1) ลองพิจารณาการจัดเรียงลำดับในกรณีที่ $r < n$ คือมีของอยู่ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด แล้วนำมาจัดทีละ r สิ่ง โดย $r < n$ ตำแหน่งที่จะจัดเรียงลำดับจึงมี r ตำแหน่งโดย

ตำแหน่งที่ 1 จะเลือกของมาใส่ได้ n วิธี อะไรก็ได้

ตำแหน่งที่ 2 เมื่อใส่ตำแหน่งที่ 1 ไปแล้ว จะเหลือของ $n-1$ สิ่ง ดังนั้นจึงเลือกของมาใส่ในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เมื่อใส่ตำแหน่งที่ 2 ไปแล้วจะเหลือของอีก $n-2$ สิ่งดังนั้นจึงมีวิธีเลือกของมาใส่ในตำแหน่งที่ 3 ได้ $n-2$ วิธี

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

ตำแหน่งที่ r เมื่อใส่ตำแหน่งที่ $r-1$ ไปแล้วจะมีของเหลืออีก $n-(r-1)$ สิ่ง ดังนั้นจึงมีวิธีเลือกของมาใส่ในตำแหน่งที่ r ได้ $n-(r-1) = n-r+1$ วิธี

ตามหลักการขั้นพื้นฐาน จึงได้ว่า

จะมีวิธีกระทำอย่างนี้ได้ทั้งหมด $n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$ วิธี จากตัวอย่างที่ 6.2.5 เราได้ว่า

$$n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

นั่นคือ $${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2) ในกรณีที่ $r=n$ คือมีของอยู่ n สิ่งต่าง ๆ กันแล้วนำมาจัดทีละ n สิ่ง (คือทีเดียวทั้งหมดเลย) ย่อมได้

ตำแหน่งที่ 1 เหมือนตำแหน่งที่ 1 ของข้อสังเกต 1)

ตำแหน่งที่ 2 เหมือนตำแหน่งที่ 2 ของข้อสังเกต 1)

ตำแหน่งที่ 3 เหมือนตำแหน่งที่ 3 ของข้อสังเกต 1)

\- - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - -

ตำแหน่งที่ n เมื่อใส่ตำแหน่งที่ $n-1$ ไปแล้วจะเหลือของอีก $n-(n-1) = 1$ สิ่ง คือ เหลืออีกเพียงสิ่งเดียว ดังนั้นจึงมีวิธีเลือกของมาใส่ในตำแหน่งที่ n ได้ 1 วิธี

จากหลักการขั้นพื้นฐานจึงได้ว่า

เราจะมีวิธีกระทำทั้งหมด $n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$ วิธี

จากนิยามแฟคตอเรียล เราได้ $n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$

นั่นคือ $${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.1 ในรถโดยสารคันหนึ่งมีที่นั่งว่างเรียงกันอยู่ 5 ที่ ถ้ามีผู้โดยสารขึ้นมา 3 คน ผู้โดยสารทั้ง 3 คน นั้นจะมีวิธีเลือกที่นั่งได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 5,\ r = 3$ และจาก $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$\therefore\ {}^5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

นั่นคือ ผู้โดยสารเหล่านั้นจะเลือกที่นั่งได้ทั้งหมด 60 วิธี

หรืออาจพิจารณาว่า

มีที่นั่งทั้งหมด 5 ที่เรียงกัน และมีคนโดยสาร 3 คน

ผู้โดยสารคนที่ 1 มีวิธีเลือกที่นั่งได้ 5 วิธี

ผู้โดยสารคนที่ 2 มีวิธีเลือกที่นั่งได้ 4 วิธี (เพราะเมื่อคนที่ 1 นั่งแล้วจะเหลือที่ว่างอีกเพียง 4 ที่)

ผู้โดยสารคนที่ 3 จะมีวิธีเลือกที่นั่งได้ 3 วิธี (เหตุผลเดียวกัน)

ดังนั้นผู้โดยสารทั้ง 3 จะมีวิธีเลือกที่นั่งได้ทั้งหมดเป็น $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.2 ในรถโดยสารคันหนึ่งมีที่ว่างเรียงกันอยู่ 4 ที่ ถ้ามีผู้โดยสารขึ้นมา 4 คน ผู้โดยสารทั้งหมด 4 คนนั้นจะเลือกที่นั่งได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 4,\ r = 4$

$$\therefore\ {}^4P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = 24$$

นั่นคือ ผู้โดยสารทั้ง 4 คน จะมีวิธีเลือกที่นั่งได้ทั้งหมด 24 วิธี

หรืออาจพิจารณาโดย

เนื่องจากมีที่ว่างทั้งหมด 4 ที่ มีผู้โดยสาร 4 คน

ผู้โดยสารคนที่ 1 จะมีวิธีเลือกที่นั่งได้ 4 วิธี

ผู้โดยสารคนที่ 2 หลังจากคนที่ 1 เลือกที่นั่งแล้ว คนที่ 2 เลือกนั่งได้ 3 วิธี

ผู้โดยสารคนที่ 3 หลังจากคนที่ 2 เลือกที่นั่งแล้ว คนที่ 3 เลือกที่นั่งได้ 2 วิธี

ผู้โดยสารคนที่ 4 หลังจากคนที่ 3 เลือกที่นั่งแล้ว คนที่ 4 เลือกที่นั่งได้ 1 วิธี

ดังนั้นผู้โดยสารทั้ง 4 คนจะมีวิธีเลือกที่นั่งได้ทั้งหมด $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.3 มีหนังสืออยู่ 12 เล่มที่แตกต่างกันจะนำมาจัดเรียงทีละ 3 เล่ม จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 12, r = 3$

$$^{12}P_3 = \frac{12!}{(12-3)!}$$

$$= \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!}$$

$$= 12 \times 11 \times 10 = 1320 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.4 จะมีวิธีจัดคน 1 คนเข้านั่งเก้าอี้ ซึ่งมีวางเรียงกันอยู่ 10 ตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 10, r = 1$

$$\therefore \; ^{10}P_1 = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{10!}{9!}$$

$$= 10 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.5 .5 จะมีวิธีจัดคน 10 คนเข้านั่งเก้าอี้ซึ่งวางเรียงกันอยู่ 10 ตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 10, r = 10$

$$\therefore \; ^{10}P_{10} = 10! = 3,628,800 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.6 จะมีวิธีจัดเลขสองหลักจากเลข 6,7,8,9 ได้กี่วิธีต่าง ๆ กันโดยไม่ใช้เลขซ้ำกัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 4, r = 2$

$$\therefore \; ^{4}P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 12 \text{ วิธี}$$

(จะเห็นว่าเลขเหล่านั้นคือ 67,68,69,76,78,79,86,87,89,96,97,98 ซึ่งมี 12 วิธี)

ตัวอย่างที่ 6.3.7 จะมีวิธีจัดเลขสองหลักให้เป็นจำนวนคู่ จากเลข 6, 7, 8, 9 ได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน โดยไม่ใช้เลขซ้ำกัน

วิธีทำ สมมติเลขสองหลักคือ $\boxed{x_1 \mid x_2}$

อนึ่งเลขจำนวนคู่นั้นต้องลงท้ายด้วยเลขคู่ (คือหลักหน่วยต้องเป็นเลขคู่) ส่วนตัวแรก (หลักสิบ) จะเป็นเลขอะไรก็ได้

ดังนั้น ตำแหน่งที่สอง (หลักหน่วย) คือ x_2 จะมีวิธีเลือกเลขได้ ${}^2P_1 = 2$ วิธี

($\because$ มีเลขคู่อยู่สองตัวคือ 6 กับ 8 จะเลือกมา 1 ตัว จึงมีวิธีเลือก ${}^2P_1$ วิธี)

ตำแหน่งที่หนึ่ง (หลักสิบ) คือ x_1 จะมีวิธีเลือกเลขได้ ${}^3P_1 = 3$ วิธี

($\because$ เมื่อเลือกเลขใส่ตำแหน่งที่สองไป 1 ตัวแล้ว จึงเหลือเลข 3 ตัว ซึ่งมีวิธีเลือกเลขใดก็ได้ไปใส่ในตำแหน่งที่ 1 ได้ ${}^3P_1$ วิธี)

ดังนั้น จึงมีวิธีจัดทั้งหมด ${}^3P_1 \cdot {}^2P_1 = 3 \times 2 = 6$ วิธี (ได้แก่ 76, 78, 96, 98, 86, 68)

กรณีที่ 2 ถ้ามีของอยู่ n สิ่งต่าง ๆ กัน ถ้าเรานำมาจัดลำดับทีละ r สิ่ง $(r \leq n)$ โดยใช้<u>ซ้ำกันได้</u> จะมีวิธีจัดลำดับทั้งหมดได้เท่ากับ n^r วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.8 จะมีวิธีจัดเลขสองหลัก (หลักสิบ) จากเลข 6,7,8,9 ได้กี่วิธีต่าง ๆ กันโดยใช้เลขซ้ำกันได้

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 4, \ r = 2$

$\therefore$ จำนวนวิธีทั้งหมด $= 4^2 = 16$ วิธี

หรืออาจพิจารณาโดย

สมมติเลขสองหลัก เขียนได้เป็น $\boxed{x_1 \mid x_2}$

จะเห็นว่าการจัดเลขมาใส่กระทำได้ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 หลักสิบ คือ x_1 เรามีวิธีเลือกเลขได้ 4 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 หลักหน่วยคือ x_2 เราจะมีวิธีเลือกเลขได้ 4 วิธี (เพราะใช้เลขซ้ำกันได้)

ดังนั้นจะมีวิธีเลือกทั้งหมด ได้ $4 \times 4 = 16$ วิธี

โดยเลขเหล่านั้นคือ 66, 67, 68, 69, 76,77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99 ซึ่งมี 16 จำนวน

ตัวอย่างที่ 6.3.9 จะมีวิธีจัดเลขสองหลักให้เป็นจำนวนคู่จากเลข 6,7,8,9 ได้กี่จำนวนต่าง ๆ กัน

วิธีทำ สมมติเลขสองหลักนั้นเขียนได้เป็น $\boxed{x_1 \mid x_2}$

เนื่องจากจำนวนที่ต้องการคือจำนวนคู่ ดังนั้นเลขในหลักหน่วยคือ x_2 จะต้องเป็นเลขคู่ ส่วนเลขหลักสิบคือ x_1 จะเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ก็ได้

ดังนั้น จึงมีวิธีเลือกเลขมาจัดได้ดังนี้

ตำแหน่งที่ 2 คือ x_2 (หลักหน่วย) จะต้องเลือกเลขคู่ ดังนั้นจึงมีวิธีเลือกเลขมาใส่ 2 วิธี

ตำแหน่งที่ 1 คือ x_1 (หลักสิบ) จะมีวิธีเลือกเลขมาใส่ได้ 4 วิธี (เพราะว่าเลือกเลขมาใช้ซ้ำกันได้)

ดังนั้น จึงมีวิธีทั้งหมด $= 4 \times 2 = 8$ วิธี

โดยเลขเหล่านั้น คือ 66, 68, 76, 78, 86, 88, 96, 98

ตัวอย่างที่ 6.3.10 จะมีวิธีจัดเลขสามหลัก (หลักร้อย) จากเลข 1,2,3,4,5,6,7,8 ได้กี่จำนวนต่าง ๆ กัน โดยใช้เลขซ้ำกันได้

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 8, r = 3$

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดจึงจัดได้ $8^3 = 512$ วิธี

หรืออาจพิจารณาโดย

สมมติเลข 3 หลักนั้นคือ $\boxed{x_1 \mid x_2 \mid x_3}$

ตำแหน่งที่ 1 คือ x_1 มีวิธีเลือกได้ 8 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 คือ x_2 มีวิธีเลือกได้ 8 วิธี (เพราะใช้เลขซ้ำกันได้)

ตำแหน่งที่ 3 คือ x_3 มีวิธีเลือกได้ 8 วิธี (เพราะใช้เลขซ้ำกันได้)

ดังนั้นจึงมีวิธีจัดทั้งหมด $= 8 \times 8 \times 8 = 512$ วิธี

กรณีที่ 3

ถ้ามีของอยู่ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกัน (คือไม่แตกต่างกันทั้งหมด) โดยในจำนวนนี้มี

สิ่งของชนิดที่ หนึ่ง ซ้ำกันอยู่ (เหมือนกัน) m_1 สิ่ง

สิ่งของชนิดที่ สอง ซ้ำกันอยู่ (เหมือนกัน) m_2 สิ่ง

สิ่งของชนิดที่ สาม ซ้ำกันอยู่ (เหมือนกัน) m_3 สิ่ง

- -

สิ่งของชนิดที่ k ซ้ำกันอยู่ (เหมือนกัน) m_k สิ่ง

เราเขียน สัญลักษณ์แทนการจัดลำดับแบบนี้ได้เป็น $\binom{n}{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k}$ โดย $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k = n$

จะได้ว่ามีวิธีจัดทั้งหมดเป็น $\binom{n}{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k}$

$$= \frac{n!}{m_1!\ m_2!\ m_3!\ \ldots\ m_k!} \quad \text{วิธี}$$

ทั้งนี้เพราะในการจัดลำดับของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เรามีวิธีจัด $n!$ วิธี แต่ในกรณีที่มีของเหมือนกันหรือซ้ำกันเป็นชนิด ๆ จำนวนวิธีจึงต้องน้อยลงไป คือ ในจำนวน $n!$ วิธีดังกล่าวจะรวมวิธีการจัดลำดับที่ไม่สามารถเห็นความแตกต่างกัน สำหรับสิ่งของชนิดที่หนึ่งที่เหมือนกันมีได้ถึง $m_1!$ วิธี สำหรับสิ่งของชนิดที่สองที่เหมือนกันได้ถึง $m_2!$ วิธี--- และสำหรับสิ่งของชนิดที่ k ที่เหมือนกันได้ถึง $m_k!$ วิธี

ดังนั้น เราจึงมีวิธีจัดลำดับที่เห็นความแตกต่างกันได้เพียง $\dfrac{n!}{m_1!\ m_2!\ \ldots\ m_k!}$ วิธีเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 6.3.11 มีเลขอยู่ 5 ตัวคือ 1,1,1,3 และ 3 ถ้านำมาจัดแบบแปรลำดับจะได้ทั้งหมดกี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ

ตัวเลขชนิดที่ 1 (คือเลข 1) มีซ้ำกันอยู่ 3 ตัว

ตัวเลขชนิดที่ 2 (คือเลข 3) มีซ้ำกันอยู่ 2 ตัว

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับคือ $\binom{5}{3,\ 2} = \frac{5!}{3!\ 2!}$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1}$$

$= 10$ วิธี

ซึ่งถ้าลองเขียนอีลีเมนต์ทั้งหมดจะได้เป็น

11133, 11331, 13311, 33111, 11313, 13113, 13131, 31311, 31131, 31113

ตัวอย่างที่ 6.3.12 มีลูกบอลอยู่ 10 ลูก เป็นสีแดง 5 ลูก, สีขาว 3 ลูก และสีเขียว 2 ลูก จะมีวิธีนำมาจัดเรียงเป็นแถวได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 10,\ m_1 = 5,\ m_2 = 3,\ m_3 = 2$

$$\therefore \quad \binom{10}{5,\ 3,\ 2} = \frac{10!}{5!\ 3!\ 2!} = 2520$$

ดังนั้นเราจะมีวิธีจัดทั้งหมด 2520 วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.13 มีธงสีแดงอยู่ 2 ธง, สีน้ำเงิน 1 ธง และสีขาว 1 ธง ซึ่งต่างก็มีรูปลักษณะเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเรียงลำดับธงในแนวดิ่ง

วิธีทำ

ในที่นี้ $n = 4,\ m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ m_3 = 1$

$$\therefore \quad \binom{4}{2,\ 1,\ 1} = \frac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = 12$$

ดังนั้นจึงมีวิธีจัดเรียงลำดับได้ทั้งหมด 12 วิธีต่าง ๆ กัน

ตัวอย่างที่ 6.3.14 ถ้ามีคนทั้งหมด 8 คน มีห้องพักอยู่ 4 ห้อง ซึ่งห้องที่หนึ่งพักได้ 3 คน ห้องที่สองพัก 1 คน ห้องที่สามและห้องที่สี่พักได้ห้องละ 2 คน จงหาว่า เราจะมีวิธีจัดคนทั้งหมดเข้าห้องพักได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ในที่นี้ต้องแบ่งคนทั้ง 8 ออกเป็น 4 พวก โดยพวกแรกมี 3 คน, พวกที่ 2 มี 1 คน, พวกที่ 3 และที่ 4 มีพวกละ 2 คน (อนึ่ง คนทั้ง 3 คนหรือ 2 คน ที่จัดให้อยู่ในห้องเดียวกันนั้นจะสลับที่อย่างใดก็ได้ก็คงต้องอยู่ในห้องเดียวกันนั่นเอง จึงคิดแบบจัดของ 4 สิ่งที่เหมือนกัน)

ในที่นี้ $n = 8,\ m_1 = 3,\ m_2 = 1,\ m_3 = 2,\ m_4 = 2$

$$\therefore \quad \binom{8}{3,\ 1,\ 2,\ 2} = \frac{8!}{3!\ \ 1!\ \ 2!\ \ 2!} = 1680$$

ดังนั้น จะมีวิธีจัดคนเข้าห้องพักได้ต่าง ๆ กัน 1680 วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.15 ถ้านำเอาอักษรจากคำว่า "RAMKHAMHAENG" มาจัดเรียงลำดับเสียใหม่จะได้คำใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ ในที่นี้มีอักษรทั้งหมด 12 ตัว $= n$

พวกแรกคือ R มี 1 ตัว $= m_1$

พวกสองคือ A มี 3 ตัว $= m_2$

พวกสามคือ M มี 2 ตัว $= m_3$

พวกสี่ คือ K มี 1 ตัว $= m_4$

พวกห้าคือ H มี 2 ตัว $= m_5$

พวกหกคือ E มี 1 ตัว $= m_6$

พวกเจ็ดคือ N มี 1 ตัว $= m_7$

พวกแปดคือ G มี 1 ตัว $= m_8$

$$\therefore \quad \binom{12}{1,3,2,1,2,1,1,1} = \frac{12!}{1!\ 3!\ 2!\ 1!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 2}$$

$= 19,958,400$

$\therefore$ จะมีวิธีจัดทั้งหมด 19,958,400 วิธี

แบบที่ 2 การจัดลำดับเป็นวงกลม (Circular permutation)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่งต่าง ๆ กันนำมาจัดเรียงลำดับแบบวงกลม ย่อมได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

(ทั้งนี้ เพราะในการจัดลำดับแบบวงกลมนั้น ถ้าจัดครั้งใด ๆ โดยที่ไม่มีผู้ใดสลับที่กันเลย จะถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน เพราะการเรียงลำดับจะไม่ต่างกัน ทั้งนี้ก็เพราะว่าในการจัดแบบวงกลมนี้ หัวแถวจะตั้งต้นที่ตำแหน่งใดของวงกลมก็ได้ ดังนั้นถ้าสิ่งที่เรียงตามกันมานั้นมีลำดับเดียวกันก็ถือว่าเป็นลำดับเดียวกันทั้งสิ้น (เช่น abcd เราถือว่าเหมือนกับ bcda, cdab, dabc ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคิดคำนวณหาวิธีจัดลำดับแบบวงกลมของ n สิ่งนั้นอาจทำได้โดยกำหนดให้ของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วจึงจัดลำดับของสิ่งของที่เหลือ $n-1$ สิ่ง ซึ่งจะได้จำนวนวิธีจัดทั้งหมด $(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$ วิธี นั่นเอง)

ตัวอย่างที่ 6.3.16 จะมีวิธีจัดคน 4 คน เข้านั่งประชุมโต๊ะกลมได้ทั้งหมดกี่วิธี

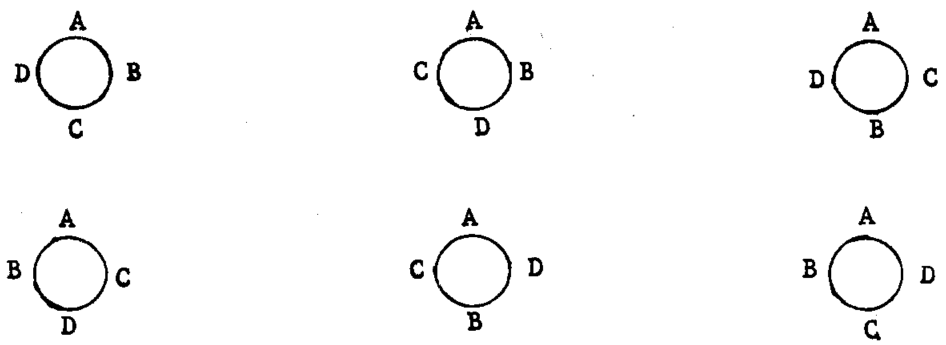
วิธีทำ ในที่นี้ $n = 4$

$\therefore$ จำนวนวิธีจัดคน 4 คน เข้าประชุมโต๊ะกลมได้ $= (4-1)!$

$= 3! = 6$

ซึ่งมีทั้งหมด 6 วิธี นั่นเอง

เขียนรูปได้เป็น (สมมติคนทั้ง 4 คือ A, B, C, D)



ตัวอย่างที่ 6.3.17 มีอักษร A,B,C,D,E และ F นำมาจัดแปรลำดับเป็นวงกลมได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 6$

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับเป็นวงกลมมี $(6-1)! = 5!$

$= 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.3.18 จะมีวิธีจัดชาย 4 คน, หญิง 4 คน นั่งสลับกันรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี

วิธีทำ กำหนดให้ชายคนหนึ่งคงที่

ดังนั้น เหลือชายอีก 3 คนและหญิงอีก 4 คนที่จะนั่งในตำแหน่งต่าง ๆ กัน 7 ตำแหน่ง

แต่เนื่องจากชาย,หญิง ต้องนั่งสลับกัน จึงทำให้ชายมีตำแหน่งที่จะเลือกนั่งได้อีกเพียง 3 ตำแหน่งเพราะหญิงมี 4 ตำแหน่ง

ชาย 3 คน จัดลำดับได้ $3!$ วิธี

หญิง 4 คน จัดลำดับได้ $4!$ วิธี

ดังนั้นจัดชาย 4 คนและหญิง 4 คน นั่งสลับกันได้ $3!\ 4! = 144$ วิธี

(อาจจัดโดยให้หญิงนั่งคงที่ก็ได้)

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 6.3

1. จงหาค่าของ

   1.1) ${}^{10}P_7$

   1.2) ${}^{12}P_{10}$

   1.3) ${}^{100}P_2$

   1.4) ${}^{5}P_1$

   1.5) ${}^{5}P_0$

   1.6) $\binom{6}{3,2,1}$

   1.7) $\binom{8}{2,2,2,2}$

2. ในแถว แถวหนึ่งมีเก้าอี้อยู่ 7 ตัว จะมีวิธีจัดคนเข้านั่งเก้าอี้ได้กี่วิธี ถ้า

   2.1) มีคน 3 คน 2.2) มีคน 5 คน 2.3) มีคน 7 คน

3. จะจัดอักษร 4 ตัวจากคำว่า "EDUCATION" มาเรียงกันใหม่โดยไม่ใช้อักษรซ้ำกัน

แล้วจงหาว่า

3.1) มีกี่วิธีที่มีสระล้วน ๆ

3.2) มีกี่วิธีที่ขึ้นต้นด้วยสระ

3.3) มีกี่วิธีที่ต้องขึ้นต้นด้วยอักษร D

3.4) มีกี่วิธีที่ต้องลงท้ายด้วยอักษร E

3.5) มีกี่วิธีที่ต้องขึ้นต้นด้วยอักษร D และลงท้ายด้วยอักษร E

4. จะมีวิธีจัดอักษร 4 ตัวจากคำว่า "THAI" มาเรียงกันใหม่ได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน โดยใช้อักษรซ้ำกันได้

5. มีธงสีแดง 6 ธง, น้ำเงิน 4 ธง, เขียว 2 ธง ซึ่งต่างก็มีลักษณะเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเรียงลำดับธงในแนวดิ่ง

6. จงหาวิธีการจัดเรียงลำดับอักษรจากคำว่า

6.1) COMMITTEE

6.2) GARANTEE

6.3) SORRY

6.4) งง งวย

7. จะมีวิธีจัดหนังสือสามประเภท โดยประเภทที่หนึ่งมี 5 เล่ม ประเภทที่สองมี 3 เล่ม ประเภทที่สามมี 4 เล่มให้เรียงลำดับกันอยู่บนชั้นหนังสือได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

8. จากโจทย์ข้อ 7 ถ้ากำหนดให้ว่าหนังสือประเภทเดียวกันต้องอยู่ด้วยกันแล้วจะมีวิธีจัดหนังสือทั้งหมดกี่วิธี

9. มีนักเรียนสมัครเล่นแบดมินตัน 5 คน ครูพลศึกษาต้องการจัดเป็นทีม ทีมละ 2 คน โดยมีมือหนึ่งและมือสองจะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

10. ในการแข่งขันครั้งหนึ่งมีนักวิ่งแข่ง 5 คน จงหาว่านักวิ่งแข่งทั้ง 5 คนนั้นจะวิ่งเข้าเส้นชัยได้ต่าง ๆ กันกี่วิธี โดยไม่มีผู้ใดเข้าเส้นชัยพร้อมกันเลย

11. กระบวนการทำสิ่งของชนิดหนึ่งมีขั้นการทำทั้งหมด 6 ขั้นตามลำดับ ถ้ามีการตอบปัญหาเพื่อชิงรางวัลว่าผู้ใดจะเรียงลำดับได้ถูกต้อง จงหาจำนวนวิธีที่ผู้ตอบปัญหาแต่ละคนจะเรียงลำดับขั้นการกระทำสิ่งของชนิดนั้น

12. จะมีเลขจำนวนสามหลัก (หลักร้อย) กี่จำนวนที่ประกอบด้วยเลข 0,1,2,3 โดย

วิธีที่ 1 ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้

วิธีที่ 2 ใช้เลขซ้ำกันได้

และในแต่ละวิธีเหล่านั้น มีกี่จำนวนที่มีค่ามากกว่า 200

13. จะมีวิธีจัดลำดับเลข 6 ตัวจากเลข "323423" ให้ได้จำนวนต่าง ๆ กัน ทั้งหมดกี่วิธี?

14. ในการเดินทางโดยรถไฟของคน 8 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้ง 8 คนนั้นโดยสารในชั้นที่หนึ่ง 2 คน โดยสารชั้นที่สอง 2 คน และโดยสารชั้นที่สาม 4 คน

15. สมมติว่าโรงเรียนแห่งหนึ่งต้องการนำนักเรียน 300 คนไปทัศนศึกษาโดยรถยนต์ 7 คัน ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ ดังนี้

รถยนต์ที่บรรจุนักเรียนได้ 60 คน มี 2 คัน

รถยนต์ที่บรรจุนักเรียนได้ 45 คน มี 2 คัน

รถยนต์ที่บรรจุนักเรียนได้ 30 คน มี 3 คัน

จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดนักเรียน 300 คนให้นั่งรถทั้ง 7 คันนี้

16. ถ้าเราทอดลูกเต๋า 9 ครั้งจะมีจำนวนวิธีที่จะได้แต้มสอง 4 ครั้ง ได้แต้มสาม 2 ครั้ง และได้แต้มห้า 3 ครั้ง ได้กี่วิธี

17. จงหาค่า n เมื่อ

17.1) $2 \times {}^{n}P_2 = 24$

17.2) ${}^{n}P_2 = 72$

17.3) $42 \times {}^{n}P_2 = {}^{n}P_4$

17.4) ${}^{2n}P_2 = 2\,{}^{n}P_2 + 50$

18. จะมีวิธีจัดคน 7 คนเข้าไปนั่งประชุมโต๊ะกลมได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

19. จะมีวิธีจัดเด็ก 8 คน เข้านั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

20. มีคน 8 คน นำมาจัดแปรลำดับแบบวงกลม โดยให้นาย ก กับนาย ข อยู่ติดกัน จะจัดได้กี่วิธี

6.4 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ (Combination) คือการจัดสิ่งของเป็นกลุ่ม ๆ หมู่ ๆ โดยไม่คำนึงถึงลำดับที่ของสิ่งของเหล่านั้น (คือสิ่งของในหมู่หนึ่ง ๆ จะอยู่กันอย่างไรก็ได้) ในการจัดอาจจัดทีละส่วน หรือ จัดทีเดียวทั้งหมดก็ได้

นิยาม ถ้ามีของอยู่ n สิ่งต่าง ๆ กัน แล้วเลือกมาจัดเป็นหมู่ ๆ หมู่ละ r สิ่ง ($r \le n$) โดยเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "${}^{n}C_{r}$"

แล้วจะมีวิธีจัดหมู่ทั้งหมด เท่ากับ $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี

$$\text{นั่นคือ} \qquad {}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

หมายเหตุ

1) สัญลักษณ์ ${}^{n}C_{r}$ บางทีอาจเขียนแทนด้วย $\binom{n}{r}$ หรือ C^{n}_{r} หรือ $C(n,r)$ หรือ nCr ก็ได้

2) ถ้า $r = n$ จะได้ ${}^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$

3) การจัดหมู่ของ n สิ่งโดยมีหมู่ละ r สิ่งหรือ ${}^{n}C_{r}$ นี้ มีความหมายคล้ายกับการหาสับเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ r ตัว จาก เซ็ตที่มีอีลีเมนต์ n ตัว ที่กำหนดมาให้นั่นเอง เพราะอีลีเมนต์ในเซ็ตนั้นจะเรียงอยู่อย่างไรก็ได้ไม่ต้องคำนึงถึงลำดับที่

อนึ่ง เราทราบแล้วว่าการจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดนั้น เราเลือกมาจัดลำดับทีละ r สิ่งจะได้ ${}^{n}P_{r}$ วิธี โดยการจัดลำดับนี้จะคำนึงถึงลำดับที่เป็นสำคัญ ส่วนการจัดหมู่นั้นจะไม่คำนึงถึงลำดับที่ เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าการแปรลำดับ r วิธีนั้นจะเป็นการจัดหมู่เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \text{นั่นเอง}$$

ตัวอย่างที่ 6.4.1 มีนักเรียนทั้งหมด 3 คน จะมีวิธีจัดออกเป็นกลุ่ม ๆ กลุ่มละ 2 คนได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 3, \; r = 2$

$$\therefore \quad {}^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\;1!}$$

$$= 3$$

นั่นคือ มีวิธีจัดหมู่ทั้งหมดได้ 3 วิธีต่าง ๆ กัน

ซึ่งอาจเขียนแสดงได้ดังนี้ (สมมติคนทั้ง 3 คือ ก,ข,ค)

กข, กค, ขค

(แต่ถ้าเราจัดแบบ Permutation จะได้ ${}^{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ วิธี

คือ กข, ขก, กค, คก, ขค, คข)

ตัวอย่างที่ 6.4.2 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 10 ลูก ถ้าเลือกหยิบออกมา 7 ลูก จะมีวิธีหยิบได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 10, \; r = 7$

$${}^{10}C_{7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\;3!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 120 \quad \text{วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกหยิบบอล 7 ลูกจากบอล 10 ลูก มี 120 วิธี

ตัวอย่างที่ 6.4.3 มีอักษรอยู่ 5 ตัว จะนำมาจัดแบบ Combination ได้กี่วิธีโดย

1) จัดหมู่ละ 1 ตัว
2) จัดหมู่ละ 2 ตัว
3) จัดหมู่ละ 3 ตัว
4) จัดหมู่ละ 4 ตัว
5) จัดหมู่ละ 5 ตัว

วิธีทำ จาก $^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

1) $n = 5,\ r = 1 \quad \therefore\ {}^{5}C_{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$ วิธี

2) $n = 5,\ r = 2 \quad \therefore\ {}^{5}C_{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ วิธี

3) $n = 5,\ r = 3 \quad \therefore\ {}^{5}C_{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ วิธี

4) $n = 5,\ r = 4 \quad \therefore\ {}^{5}C_{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$ วิธี

5) $n = 5,\ r = 5 \quad \therefore\ {}^{5}C_{5} = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.4.4 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ ดึงออกทีละ 2 ใบ (แล้วใส่คืน) จะมีวิธีดึงได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 52,\ r = 2$

$$\therefore\ {}^{52}C_{2} = \frac{52!}{2!\,(52-2)!}$$

$$= \frac{52!}{2!\,50!}$$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 1 \times 50!}$$

$= 1326$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.4.5 คณะกรรมการคณะหนึ่งประกอบด้วยกรรมการ 9 คน ในการประชุมแต่ละครั้งจะต้องมีกรรมการเข้าประชุมอย่างน้อย สองในสามจึงจะครบองค์ประชุม ดังนั้นจะมีการประชุมที่ครบองค์ประชุมได้กี่วิธี

วิธีทำ การประชุมที่จะครบองค์ประชุมจะต้องมีกรรมการตั้งแต่ 6 คนขึ้นไป คือ

การประชุมที่ครบองค์ ที่ประกอบด้วยกรรมการ 6 คน มี $^{9}C_{6} = 84$ วิธี

การประชุมที่ครบองค์ ที่ประกอบด้วยกรรมการ 7 คน มี $^{9}C_{7} = 36$ วิธี

การประชุมที่ครบองค์ ที่ประกอบด้วยกรรมการ 8 คน มี $^{9}C_{8} = 9$ วิธี

การประชุมที่ครบองค์ ที่ประกอบด้วยกรรมการ 9 คน มี $^{9}C_{9} = 1$ วิธี

$\therefore$ การประชุมที่ครบองค์ มีได้ $84 + 36 + 9 + 1 = 130$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6.4.6 ข้อสอบวิชาหนึ่งมีทั้งหมด 9 ข้อ กำหนดให้เลือกทำเพียง 7 ข้อ

1) จะมีวิธีที่นักศึกษาจะเลือกทำได้กี่วิธี

2) ถ้ากำหนดว่า ต้องตอบ 4 คำถามแรก เขาจะมีวิธีเลือกทำได้กี่วิธี

3) ถ้ากำหนดว่า จะต้องไม่ตอบคำถามแรก เขาจะมีวิธีเลือกทำได้กี่วิธี

4) ถ้ากำหนดว่า จะต้องตอบคำถามแรกและคำถามสุดท้าย เขาจะมีวิธีเลือกทำได้กี่วิธี

วิธีทำ

มีข้อสอบ 9 ข้อ เลือกทำ 7 ข้อ

$\therefore$ ในที่นี้ $n = 9, \quad r = 7$

$$\therefore \quad ^{9}C_{7} = \frac{9!}{7!\,(9-7)!} = \frac{9!}{7!\;2!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2 \times 1} = 36$$

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จะเลือกทำข้อสอบ 7 ข้อ จาก 9 ข้อ วิธีเลือกทำทั้งหมด 36 วิธี

2) โจทย์ กำหนดว่า ต้องตอบ 4 คำถามแรก ดังนั้นจึงมีโอกาสเลือกทำข้ออื่น ๆ อีก 3 ข้อ จากคำถามที่เหลืออีก 6 ข้อ

ดังนั้น จึงมีวิธีที่จะเลือกทำได้ $^6C_3 = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกทำข้อสอบ 7 ข้อจาก 9 ข้อโดยต้องทำ 4 ข้อแรก มีวิธีเลือกกระทำได้ 20 วิธี

3) โจทย์กำหนดว่า ต้องไม่ตอบ คำถามแรก ดังนั้นจึงต้องเลือกทำจากคำถามที่เหลืออีก 8 ข้อ โดยต้องเลือกทำ 7 ข้อ

ดังนั้นจึงมีวิธีที่จะเลือกทำได้ $^8C_7 = \frac{8!}{7!\ 1!} = 8$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะเลือกทำข้อสอบ 7 ข้อ จากข้อสอบ 9 ข้อ โดยไม่ทำข้อแรก มีวิธีเลือกกระทำได้ 8 วิธี

4) โจทย์กำหนดว่าต้องตอบคำถามแรกและคำถามสุดท้าย ดังนั้นจึงมีคำถามเหลือให้เลือกอีก 7 ข้อ โดยเขาต้องเลือกทำอีก 5 ข้อ

ดังนั้น จึงมีวิธีที่จะเลือกทำได้ $^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21$ วิธี

ดังนั้นเราจึงมีวิธีเลือกกระทำได้ 21 วิธี

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 6.4

1. จงหาค่าของ

1.1) $^{10}C_7$

1.2) $^{10}C_3$

1.3) $^{20}C_{18}$

1.4) $^{10}C_{10}$

1.5) ^nC_n

2. จะมีวิธีจัดคน 6 คน ออกเป็นกลุ่ม ๆ กลุ่มละ 2 คนได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

3. จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย ชาย 3 คน หญิง 2 คน จากผู้ชายทั้งหมด 8 คน ผู้หญิง 5 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี?

4. จะมีวิธีที่ครูจะเลือกนักเรียน 3 คนหรือมากกว่านั้นจากนักเรียนทั้งหมด 6 คน ได้กี่วิธี

5. หญิงสาวคนหนึ่งมีเพื่อนสนิท 8 คน

   5.1) จะมีวิธีเลือกเชิญเพื่อน 5 คน มาร่วมรับประทานอาหารด้วยกันได้กี่วิธี

   5.2) ในจำนวนเพื่อนทั้ง 8 นั้นมี 2 คนที่แต่งงานแล้ว ดังนั้นเขาจะมีวิธีเลือกเชิญเพื่อนมา 6 คน โดยจะต้องเชิญคนที่แต่งงานแล้วมาด้วย เขาจะมีวิธีเชิญได้กี่วิธี?

6. ในการสอบวิชาหนึ่ง มีข้อสอบ 10 ข้อ ให้เลือกทำ 5 ข้อ

   6.1) จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบนี้ได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

   6.2) จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี ถ้าเขาต้องตอบ 2 คำถามแรก

   6.3) จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี ถ้าเขาต้องตอบ 2 คำถามจาก 5 คำถามแรก

   6.4) จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี ถ้าเขาต้องตอบอย่างน้อย 4 คำถามจาก 5 คำถามแรก

7. มีจุดในระนาบอยู่ 6 จุด คือ A,B,C,D,E,F และไม่มี 3 จุดใด ๆ ที่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

   7.1) จะลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดใด ๆ ได้กี่เส้น

   7.2) จะมีสามเหลี่ยมกี่รูปที่หาได้จากการลากเส้นเชื่อมจุดเหล่านี้

   7.3) จะมีสี่เหลี่ยมกี่รูปที่หาได้จากการลากเส้นเชื่อมจุดเหล่านี้

8. มีเสื้อสำเร็จรูปสีต่าง ๆ 6 สี ถ้าจะเลือกซื้อ 4 ตัว ตัวละสี จะเลือกซื้อได้กี่วิธีต่าง ๆ กัน

9. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักฟุตบอลอยู่ 15 คน จงหาจำนวนวิธีที่โรงเรียนแห่งนี้จะจัดนักฟุตบอลลงแข่งขัน โดยแต่ละครั้งต้องใช้นักฟุตบอล 11 คน

10. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 9 ลูก คือ สีแดง 4 ลูก, สีดำ 3 ลูก และสีขาว 2 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลออกจากกล่อง 2 ลูก จงหาจำนวนวิธีที่

10.1) ได้บอลสีแดงทั้ง 2 ลูก

10.2) ได้บอลดำทั้ง 2 ลูก

10.3) ได้บอลสีแดง 1 ลูก ดำ 1 ลูก

10.4) ได้บอลสีแดง 1 ลูก ขาว 1 ลูก

10.5) ได้บอลสีดำ 1 ลูก ขาว 1 ลูก

10.6) ได้บอลแดง 1 ลูก

10.7) ได้บอลแดงอย่างน้อย 1 ลูก

11. ถ้าเซ็ต A เป็นเซ็ตที่มี 6 อีลีเมนต์

11.1) จงหา สับเซ็ต ของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 1 อีลีเมนต์

11.2) จงหา สับเซ็ต ของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 2 อีลีเมนต์

11.3) จงหา สับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 4 อีลีเมนต์

11.4) จงหา สับเซ็ตของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 5 อีลีเมนต์

11.5) จงหา สับเซ็ต ของ A ที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 6 อีลีเมนต์

12. จงหาค่าของ n จาก

12.1) ${}^{n}C_{4} = {}^{n}C_{2}$

12.2) ${}^{n}C_{2} = {}^{12}C_{10}$

12.3) ${}^{n+1}P_{3} = {}^{n}P_{4}$

12.4) ${}^{n+1}C_{3} = 7\,{}^{n}C_{2}$

6.5 การกระจายแบบ Binomial, Trinomial และ Multinomial

6.5.1 การกระจายแบบ Binomial (Binomial expansions)

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$$(x+y)^n = {}^nC_0x^{n-0}\ y^0 + {}^nC_1x^{n-1}\ y^1 + {}^nC_2x^{n-2}\ y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 +$$

$$+ \dots + {}^nC_kx^{n-k}\ y^k + \dots + {}^nC_nx^{n-n}\ y^n$$

และจะเรียกการกระจายนี้ว่า "การกระจายแบบ Binomial"

ข้อควรจำ

$${}^nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ข้อสังเกต

1) เมื่อกระจาย $(x+y)^n$ จะได้ทั้งหมด n+1 เทอม

2) เทอมแรกที่เป็น ${}^nC_0x^{n-0}\ y^0$ อาจเขียนสั้น ๆ เป็น x^n

   และเทอมสุดท้าย ${}^nC_nx^{n-n}\ y^n$ อาจเขียนสั้น ๆ เป็น y^n

3) กำลังของ x จะเริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0 และ

   กำลังของ y จะเริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 1 จนถึง n

4) ในแต่ละเทอมของการกระจายกำลังของ x และ y บวกกันย่อมได้เท่ากับ n เสมอ

5) การหาสูตรการกระจายของ $(x+y)^n$ ข้างต้นนั้น มาจาก

   $(x+y)^n = (x+y)\ (x+y)\ \dots\ (x+y)$ คูณกัน n วงเล็บ

   โดยถ้าเรานำเอา x มาจากทุกวงเล็บมาคูณกัน (ทั้ง n วงเล็บ) และไม่นำ y มาเลย เทอมนี้จะเกิดขึ้นได้วิธีเดียว

ดังนั้นจะได้เทอม x^n

- ถ้าเรานำเอา y จาก 1 วงเล็บมาคูณกับ x จาก n-1 วงเล็บที่เหลือจะได้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-1} y$ เทอมเช่นนี้เกิดได้ ${}^nC_1$ วิธี ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จากวงเล็บใดก็ได้ใน n วงเล็บนั้น จึงได้เทอมเป็น ${}^nC_1\ x^{n-1}\ y$

- ถ้านำเอา y จาก 2 วงเล็บมาคูณกับ x จาก n-2 วงเล็บที่เหลือจะได้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-2}\ y^2$ เทอมเช่นนี้เกิดได้ ${}^nC_2$ วิธี ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จากสองวงเล็บใด ๆ ก็ได้ใน n วงเล็บ นั้น ดังนั้น จึงได้เทอมเป็น ${}^nC_2\ x^{n-2}\ y^2$

  - - - - - - - - - - - - - ฯลฯ - - - - - - - - - - - - -

- ถ้านำ y จาก k วงเล็บมาคูณกับ x จาก n-k วงเล็บที่เหลือจะให้เทอมที่มีรูปเป็น $x^{n-k}\ y^k$ เทอม เทอมเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ ${}^nC_k$ วิธี
  ทั้งนี้เพราะเราจะเลือก y จาก k วงเล็บใด ๆ ก็ได้ใน n วงเล็บนั้น
  ดังนั้นจึงได้เทอมเป็น ${}^nC_k\ x^{n-k}\ y^k$

  - - - - - - - - - - - ฯลฯ - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- ถ้านำเอา y จากทุกวงเล็บมาคูณกัน (ทั้ง n วงเล็บ) และไม่นำ x มาเลย จะได้เทอมที่มี y^n เทอมเช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว
  ดังนั้นจะได้เทอมเป็น y^n

เมื่อหาครบทุกเทอมที่อาจจะเป็นไปได้หมดแล้ว ก็นำเอาเทอมต่าง ๆ มาบวกกัน ผลที่ได้จึงกลายเป็นการกระจาย $(x+y)^n$

คือ $$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1\ x^{n-1}\ y + {}^nC_2\ x^{n-2}\ y^2 + {}^nC_3 x^{n-3}\ y^3 + \ldots$$
$$\ldots + {}^nC_k x^{n-k}\ y^k + \ldots + {}^nC_{n-1}\ x^{n-1}\ y + y^n$$

6) เทอมทั่วไปของการกระจาย $(x+y)^n$ คือ

$${}^nC_k\ x^{n-k}\ y^k$$

โดยเทอมนี้เป็นเทอมที่ $k+1$ ดังนั้นเวลาจะหาเฉพาะเทอมใดเทอมหนึ่งของการกระจาย จึงได้ว่า

เทอมที่ $k+1$ คือ $\quad {}^{n}C_{k}\, x^{n-k}\, y^{k}$

แล้วแทนค่า n และ k ก็จะได้เทอมที่ต้องการ

7) จากสูตรการกระจาย $(x+y)^{n}$ อาจเขียนสั้น ๆ ได้เป็น

$(x+y)^{n}$ = ผลบวกของเทอมในรูป ${}^{n}C_{k}\, x^{n-k}\, y^{k}$

เมื่อ k มีค่าเป็น $0,1,2,3, \ldots, n$

ถ้าใช้ สัญลักษณ์ $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ แทนผลบวกของ $a_0+a_1+a_2+ \ldots + a_n$

ดังนั้น สูตรการกระจาย $(x+y)^{n}$ จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\boxed{(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_{k}\, x^{n-k}\, y^{k}}$$

8) การหาสัมประสิทธิ์ของเทอม $x^{k_1} y^{k_2}$ ในการกระจาย $(x+y)^{n}$ ที่โจทย์กำหนดมาให้ จะได้เทอม

$$\frac{n!}{k_1!\; k_2!}\, x^{k_1}\, y^{k_2} \qquad \text{โดย} \qquad k_1 + k_2 = n$$

แล้วกระจายให้อยู่ในเทอมที่มี $x^{k_1}\, y^{k_2}$ ก็จะได้สัมประสิทธิ์ของ $x^{k_1}\, y^{k_2}$ ตามที่โจทย์ต้องการ โดย k_1, k_2, หาได้โดยการเทียบกับเทอมที่โจทย์กำหนดมาให้

ตัวอย่างที่ 6.5.1 จงกระจาย $(x+y)^{6}$

วิธีทำ จาก Binomial expansions จึงได้ว่า

$$(x+y)^{6} = {}^{6}C_{0}\, x^{6-0}\, y^{0} + {}^{6}C_{1}\, x^{6-1}\, y + {}^{6}C_{2}\, x^{6-2}\, y^{2} + {}^{6}C_{3}\, x^{6-3}y^{3}$$

$$+ {}^{6}C_{4}\, x^{6-4}\, y^{4} + {}^{6}C_{5}\, x^{6-5}\, y^{5} + {}^{6}C_{6}\, x^{6-6}\, y^{6}$$

$$= \frac{6!}{0!\,6!}x^6 + \frac{6!}{1!\,5!}x^5y + \frac{6!}{2!\,4!}x^4y^2 + \frac{6!}{3!\,3!}x^3y^3$$

$$+ \frac{6!}{4!\,2!}x^2y^4 + \frac{6!}{5!\,1!}xy^5 + \frac{6!}{6!\,0!}y^6$$

$\therefore\ (x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

ตัวอย่างที่ ๖.๕.๒ จงกระจาย $(3a-2b)^4$

วิธีทำ จากสูตร $(x+y)^n = {}^nC_0\,x^{n-0}\,y^0 + {}^nC_1\,x^{n-1}\,y^1 + {}^nC_2\,x^{n-2}y^2+\ldots$

$$\ldots + {}^nC_n\,x^{n-n}\,y^n$$

ในที่นี้ $x = 3a,\ y = -2b,\ n = 4$

$\therefore\ (3a-2b)^4 = {}^4C_0\,(3a)^{4-0}\,(-2b)^0 + {}^4C_1(3a)^{4-1}\,(-2b)$

$+ {}^4C_2(3a)^{4-2}(-2b)^2 + {}^4C_3(3a)^{4-3}\,(-2b)^3 + {}^4C_4(3a)^{4-4}\,(-2b)^4$

$$= \frac{4!}{0!\,4!}(3a)^4 + \frac{4!}{1!\,3!}(3a)^3(-2b) + \frac{4!}{2!\,2!}(3a)^2(-2b)^2$$

$$+ \frac{4!}{3!\,1!}(3a)(-2b)^3 + \frac{4!}{4!\,0!}(-2b)^4$$

$$= (81a^4) + (4)\,(27a^3)\,(-2b)+(6)(9a^2)(4b^2) +$$

$$+ 4(3a)(-8b^3) + (16b^4)$$

$\therefore\ (3a-2b)^4 = 81a^4 - 216a^3b + 216a^2b^2 - 96ab^3 + 16b^4$

ตัวอย่างที่ ๖.๕.๓ จงกระจาย $(2-x)^4$

วิธีทำ ในที่นี้ $x = 2,\ y = (-x),\ n = 4$

$$\therefore\ (2-x)^4 = {}^4C_0\ 2^{4-0}(-x)^0 + {}^4C_1 2^{4-1}(-x)^1 + {}^4C_2 2^{4-2}\ (-x)^2$$

$$+ {}^4C_3 2^{4-3}(-x)^3 + {}^4C_4 2^{4-4}(-x)^4$$

$$= \frac{4!}{0!\,4!}(2)^4 + \frac{4!}{1!\,3!}\,2^3(-x) + \frac{4!}{2!\,2!}\,2^2(-x)^2$$

$$+ \frac{4!}{3!\,1!}2(-x)^3 + \frac{4!}{4!\,0!}\,(-x)^4$$

$$= 16+(4)(8)(-x) + (6)(4)(x)^2 + (4)(2)(-x^3) + x^4$$

$$= 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$$

ตัวอย่างที่ 6.5.4 จงคำนวณหาค่าประมาณของ $(.99)^6$ โดยใช้ทศนิยมสามตำแหน่ง

วิธีทำ ในที่นี้ให้ $x = 1,\ y = -.01,\ n = 6$

$\therefore$ จึงได้ $(.99)^6 = (1-.01)^6$

$$= {}^6C_0(1)^{6-0}(-.01)^0 + {}^6C_1(1)^{6-1}(-.01)^1 +$$

$${}^6C_2(1)^{6-2}(-.01)^2 + \ldots$$

$$= \frac{6!}{0!\,6!}\,(1) + \frac{6!}{1!\,5!}(-.01) + \frac{6!}{2!\,4!}$$

$$(-.01)^2 + \ldots$$

$$= 1 + (6)(-.01) + 15(.0001) + \ldots$$

$$= 1 - .06 + .0015 + \ldots$$

$\therefore\ (.99)^6 = 0.941$ (ใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

ตัวอย่างที่ 6.5.5 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b ในการกระจายของ $(3a-2b)^4$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของการกระจาย $(3a-2b)^4$ คือ ${}^4C_k(3a)^{4-k}(-2b)^k$

ในที่นี้ k คือกำลังของ b ซึ่งเทียบกับเทอมที่มี a^3b เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดให้ b มีกำลังเป็น 1 ดังนั้น $k = 1$

แทนค่าในเทอมทั่วไป จะได้ ${}^4C_1(3a)^{4-1}\ (-2b)^1$

$$= \frac{4!}{1!\,3!}\,(27a^3)\ (-2b)$$

$$= -216\ a^3b$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^3b คือ -216

ตัวอย่างที่ 6.5.6 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b^5 จากการกระจาย $(2a-b)^8$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของการกระจาย $(2a-b)^8$ คือ ${}^8C_k(2a)^{8-k}(-b)^k$

เทียบกับเทอมที่มี a^3b^5 เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดได้ว่า $k = 5$ (คือกำลังของ b)

แทนค่า k ในเทอมทั่วไปจึงได้เทอมที่มี a^3b^5 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$ {}^8C_5(2a)^{8-5}(-b)^5 = \frac{8!}{5!\,3!}\,(2a)^3\ (-b)^5$$

$$= (56)(8a^3)(-b^5)$$

$$= -448\ a^3b^5$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ a^3b^5 คือ -448

ตัวอย่างที่ 6.5.7 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^4 จากการกระจาย $(a+3)^6$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของ $(a+3)^6$ คือ ${}^6C_k a^{6-k}\ 3^k$ เทียบกับเทอมที่มี a^4 เป็นแฟคเตอร์ พิจารณาแต่ k เราจะได้ $6-k = 4$ นั่นคือ $k = 2$

แทนค่า k ในเทอมทั่วไปจึงได้เทอมที่มี a^4 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$^6C_2(a)^{6-2}(3)^2 = \frac{6!}{2!\,4!}\ (a)^4\ (3)^2$$

$$= (15)\ (a)^4\ (9)$$

$$= 135\ a^4$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ a^4 คือ 135

ตัวอย่างที่ 6.5.8 จงหาสัมประสิทธิ์ของ $x^6\ y^6$ จากการกระจาย $(x^2+y^3)^5$

วิธีทำ เทอมทั่วไปคือ $^5C_k\ (x^2)^{5-k}\ (y^3)^k = {}^5C_k\ x^{10-2k}\ y^{3k}$

เทียบกับเทอมที่มี $x^6\ y^6$ เป็นแฟคเตอร์ (จากโจทย์)

จะได้ว่า $10 - 2k = 6$ และ $3k = 6$

นั่นคือ $k = 2$

แทนค่า k ในเทอมทั่วไป

$$^5C_2\ x^{10-4}\ y^6 = \frac{5!}{2!\,3!}\ x^6\ y^6 = 10\ x^6y^6$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ $x^6\ y^6$ คือ 10

6.5.2 การกระจายแบบ Trinomial

ในทำนองเดียวกันกับที่ได้พิจารณามาแล้วในเรื่อง binomial expansions ถ้าต้องการกระจาย $(x+y+z)^n$ เราทำได้โดยพิจารณาว่าเทอมใดจะปรากฏขึ้นในผลคูณ

$(x+y+z)^n = (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\ \ldots\ (x+y+z)$ คูณกัน n วงเล็บ

ในกรณีนี้จะได้เทอมต่าง ๆ ในรูป $x^{k_1}\ y^{k_2}\ z^{k_3}$ โดย $k_1+k_2+k_3 = n$ เทอมเหล่านี้ได้มาจากการคูณ x จาก k_1 วงเล็บ, คูณ y จาก k_2 วงเล็บ และ คูณ z จาก k_3 วงเล็บ

ได้ $\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \dfrac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}$ วิธี

ดังนั้นจึงมีเทอม $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$ อยู่ $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$ เทอม

ดังนั้นเมื่อกระจาย $(x+y+z)^n$ ก็จะได้

$(x+y+z)^n =$ ผลบวกของเทอมในรูป $\dfrac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$

โดย k_1, k_2, k_3 เป็นจำนวนเต็ม $0, 1, 2, \ldots, n$

และ $k_1+k_2+k_3 = n$

หรืออาจเขียนเป็น สัญลักษณ์ได้เป็น

$$(x+y+z)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

ตัวอย่างที่ 6.5.9 จงกระจาย $(x+y+z)^3$

วิธีทำ $(x+y+z)^n =$ ผลบวกของเทอมในรูป $\dfrac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$

โดย k_1, k_2, k_3 อาจเป็น $0, 1, 2, 3$ และ $k_1+k_2+k_3=3$

เราอาจหาค่า k_1, k_2, k_3 ได้กรณีต่าง ๆ ดังนี้

(1) k_1	(2) k_2	(3) k_3	(4) $\frac{3}{k_1!\ k_2!\ k_3!}$
0	0	3	1
0	1	2	3
0	2	1	3
0	3	0	1
1	0	2	3
1	1	1	6
1	2	0	3
2	0	1	3
2	1	0	3
3	0	0	1

$$(x+y+z)^n = 1x^0y^0z^0+3x^0y^1z^2+3x^0y^2z^1+1x^0y^3z^0$$

$$+\ 3x^1y^0z^2+6x^1y^1z^1+3x^1y^2z^0+3x^2y^0z^1$$

$$+\ 3x^2y^1z^0+1x^3y^0z^0$$

$$\therefore\ (x+y+z)^n = z^3+3yz^2+3y^2z+y^3+3xz^2+6xyz+3xy^2+3x^2z+3x^2y+x^3$$

$$= x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$$

ข้อสังเกต

1) ในการหาค่า k_1, k_2, k_3 ต่าง ๆ กันนั้นเราอาจยึดหลักโดยถ้า $n = 3$ และค่า k_1, k_2, k_3 ที่อาจเป็นไปได้คือ 0,1,2,3

ช่องที่ 1 (k_1) เขียน 0 เรียงลงมา 4 ตัว
เขียน 1 เรียงลงมา 3 ตัว
เขียน 2 เรียงลงมว 2 ตัว
เขียน 3 เรียงลงมา 1 ตัว

ช่องที่ 2 (k_2) ในการเรียงชุดต่อไป เขียนเลข 0,1,2,3 เรียงลงมาเรื่อย ๆ เป็นชุดๆโดยให้ตัดเอาตัวที่มีค่ามากที่สุดออกก่อนทุกครั้งจึงได้เป็น 0,1,2,3 แล้วก็ตัด 3 ออก ได้เป็น 0,1,2 ตัด 2 ออกเป็น 0,1 ตัด 1 ออกได้เป็น 0

ช่องที่ 3 (k_3) เขียนเลขกลับกันเป็น 3,2,1,0 เรียงลงมาเป็นชุด ๆ เรื่อย ๆ โดย ในการเรียงชุดถัดไปและให้ตัดตัวที่มีค่ามากที่สุดออกก่อนทุกครั้ง จึงได้เป็น 3,2,1,0 ตัด 3 ออก ได้เป็น 2,1,0 ตัด 2 ออกได้เป็น 1,0 ตัด 1 ออกได้เป็น 0

ช่องที่ 4 แทนค่า k_1,k_2,k_3 ในแต่ละกรณีลงใน $\frac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}$ แล้วกระจายหาค่าออกมา

ในกรณีที่ r มีค่ามากกว่า 3 ก็จะยึดถือการหาค่า k_1,k_2,k_3 ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด เช่นเดียวกับแบบที่กล่าวมาแล้ว เช่น ถ้ากระจาย $(x+y+z)^4$ ค่า k_1,k_2,k_3 ที่อาจเป็นไปได้ คือ k_1,k_2,k_3 ต้องเป็นเลข 0,1,2,3 หรือ 4 และ $k_1+k_2+k_3 = 4$. คือ

k_1	k_2	k_3
0	0	4
0	1	3
0	2	2
0	3	1
0	4	0
1	0	3
1	1	2
1	2	1
1	3	0
2	0	2
2	1	1
2	2	0
3	0	1
3	1	0
4	0	0

2) เทอมทั่วไปของการกระจาย $(x+y+z)^n$

คือ $$\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} \quad x^{k_1}\ y^{k_2}\ z^{k_3}$$

ซึ่งใช้สำหรับหาสัมประสิทธิ์ของเทอมใด ๆ

ตัวอย่างที่ 6.5.10 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2bc^3 จากการกระจาย $(2a-3b+c)^6$

วิธีทำ เทอมทั่วไป ของ $(2a-3b+c)^6$ คือ

$$\frac{6!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}\ (2a)^{k_1}\ (-3b)^{k_2}\ (c)^{k_3}$$

เทียบกับเทอมที่กำหนดซึ่งมี a^2bc^3 เป็นแฟคเตอร์ ซึ่งจะเห็นว่ากำลังของ a คือ 2, กำลังของ b คือ 1 และกำลังของ c คือ 3 จึงได้ว่า

$k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 3$

แทนค่า k_1, k_2, k_3 ที่ได้ ลงในเทอมทั่วไป

$$\therefore\quad \frac{6!}{2!\ 1!\ 3!}\ (2a)^2\ (-3b)^1\ (c)^3 = \frac{6\times5\times4\times3!}{2\times3!}\ (4a^2)(-3b)(c^3)$$

$$= -360\ a^2bc^3$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2bc^3 ก็คือ -360

ตัวอย่างที่ 6.5.11 จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2b^3 จากการกระจาย $(3+2a+b)^7$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของ $(3+2a+b)^7$ คือ $\frac{7!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}(3^{k_1})(2a)^{k_2}(b)^{k_3}$

เทียบกำลังกับโจทย์จะได้ $k_2 = 2,\ k_3 = 3$

แต่ $k_1+k_2+k_3 = 7$ ดังนั้น $k_1 = 2$

แทนค่า k_1, k_2, k_3 ลงในเทอมทั่วไปจะได้

$$\frac{7!}{2!\ 2!\ 3!}\ (3)^2\ (2a)^2\ (b)^3 = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{2\times2\times3!}\ (9)(4a^2)(b^3)$$

$$= 7560\ a^2b$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2b คือ 7560

ตัวอย่างที่ 6.5.12 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(1+2x+x^2)^3$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของ $(1+2x+x^2)^3$ คือ $\frac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!}(1)^{k_1}(2x)^{k_2}(x^2)^{k_3}$

$$= \frac{3!}{k_1!\ k_2!\ k_3!} (1)^{k_1}\ 2^{k_2}\ x^{k_2+2k_3}$$

เทียบกับเทอมที่มี x^4 เป็นแฟคเตอร์ที่โจทย์กำหนดมาให้

∴ จะได้ว่า $k_2 + 2k_3 = 4$

และ $k_1 + k_2 + k_3 = 3$

โดยที่ k_1, k_2, k_3 เป็น $0, 1, 2, 3$

โดยการทดลองจะพบว่า เราได้

$k_1 = 1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 2$

และ $k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1$

ดังนั้นเทอมซึ่งมี x^4 เป็นแฟคเตอร์ คือ

$$\frac{3!}{1!\ 0!\ 2!} (1)^1 (2x)^0 (x^2)^2 + \frac{3!}{0!\ 2!\ 1!} (1)^0 (2x)^2 (x^2)^1$$

$$= 3x^4 + 3(4x^2)(x^2) = 15x^4$$

∴ สัมประสิทธิ์ของ x^4 คือ 15

6.5.3 การกระจายแบบ Multinomial

ในทำนองเดียวกับการกระจายแบบ binomial และ Trinomial จึงอาจกล่าวได้ว่า

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้ากระจาย $(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n$ แล้วจะได้

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ldots k_p!} (x_1)^{k_1}(x_2)^{k_2}\ldots$$
$$\ldots(x_p)^{k_p}$$

เราเรียกสูตรข้างบนสำหรับ $p \geq 3$ ว่า Multinomial expansions

ตัวอย่างที่ ๖.๕.๑๓ ในการกระจาย $(2a+b-c+3d)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ $a^2b^3c^4d$

วิธีทำ จากเทอมทั่วไปของ $(2a+b-c+3d)^{10}$ คือ

$$\frac{10!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!}(2a)^{k_1}(b)^{k_2}(-c)^{k_3}(3d)^{k_4}$$

เทียบกับเทอมที่มี $a^2b^3c^4d$ เป็นแฟคเตอร์ตามที่โจทย์กำหนด

จะได้ว่า $k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4,\ k_4 = 1$

(โดย k_1 คือกำลังของ a, k_2 คือกำลังของ b, k_3 คือกำลังของ c, k_4 คือกำลังของ d)

แทนค่า k_1, k_2, k_3, k_4 ที่ได้ลงในเทอมทั่วไป จะได้

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 4!\ 1!}(2a)^2(b)^3(-c)^4(3d)^1 = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4!}{2\times3\times2\times4!} \quad (4a)^2(b)^3(c)^4(3d)$$

$$= 151,200\ \ a^2b^3c^4d$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $a^2b^3c^4d$ คือ 151,200

ตัวอย่างที่ ๖.๕.๑๔ จงหาสัมประสิทธิ์ของ abcde จากการกระจาย $(a+b+c+d+e)^5$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของ $(a+b+c+d+e)^5$ คือ $\dfrac{5!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!\ k_5!}a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}d^{k_4}e^{k_5}$

เทียบกับเทอมที่มี abcde เป็นแฟคเตอร์จากที่โจทย์กำหนดให้

ได้ $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1,\ k_4 = 1,\ k_5 = 1$

$$\therefore \quad \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!}\ a^1b^1c^1d^1e^1 = (5\times4\times3\times2\times1)\ abcde$$

$$= 120\ abcde$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ abcde คือ 120

ตัวอย่างที่ ๖.๕.๑๕ จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2bcde^3 จากการกระจาย

$$(a+2b+3c+d-e+6)^{10}$$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของ $(a+2b+3c+d-e+6)^{10}$

คือ $$\frac{10!}{k_1!\ k_2!\ k_3!\ k_4!\ k_5!\ k_6!}(a)^{k_1}(2b)^{k_2}(3c)^{k_3}(d)^{k_4}(-e)^{k_5}(6)^{k_6}$$

เทียบกับเทอมที่มี a^2bcde^3 เป็นแฟคเตอร์จะได้ว่า

$k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1,\ k_4 = 1,\ k_5 = 3$

และจะได้ว่า $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6 = 10$ ดังนั้น $k_6 = 2$

แทนค่าในเทอมทั่วไป จะได้

$$\frac{10!}{2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 3!\ 2!}\ (a)^2(2b)^1(3c)^1(d)^1(-e)^3(6)^2$$

$$= -32,659,200\ a^2bcde^3$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ a^2bcde^3 คือ $-32,659,200$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 6.5

1. จงกระจาย

1.1) $(3a+2b)^4$ 1.3) $(a^2-2)^4$

1.2) $(\frac{a}{2} - b)^5$ 1.4) $(a + \frac{2}{a})^3$

2. ในการกระจาย $(x-3)^8$ เทอมที่ไม่มี x ร่วมอยู่ด้วยเลยมีค่าเท่ากับเท่าไร?

3. ในการกระจาย $(a-b)^9$ จงหาเทอมที่มี a^4b^5 อยู่ด้วย

4. จงคำนวณหาค่าของ $(1.02)^5$ (ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

5. ในการกระจาย $(x-3y)^7$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4y^3

6. ในการกระจาย $(\frac{a}{2} - b)^5$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^3b^2

7. ในการกระจาย $(2 - b)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ b^7

8. ในการกระจาย $(2x^3-2y^2)^5$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^9y^4

9. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^6 จากการกระจาย $(x^3-2)^5$

10. ในการกระจาย $(2a-b+c+3d)^6$ จงหา

10.1) สัมประสิทธิ์ของ a^6 10.3) สัมประสิทธิ์ของ ab^4c

10.2) สัมประสิทธิ์ของ a^2b^4 10.4) สัมประสิทธิ์ของ a^2bc^2d

11. ในการกระจาย $(3-x+2y-3z)^8$ จงหา

11.1) สัมประสิทธิ์ของ x^6y^2

11.2) สัมประสิทธิ์ของ x^3y^2z

11.3) เทอมที่ไม่มี x, y, z อยู่ด้วยเลย

12. ในการกระจาย $(a-2b+3c)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^5b^4c