บทที่ 3

ระบบจำนวนจริง (Real Number System)

3.1 คุณสมบัติเบื้องต้น

ระบบจำนวนจริงเป็นระบบคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย

1. เซ็ต เซ็ตหนึ่งคือเซ็ต R และเรียกอีลีเมนต์แต่ละตัวของเซ็ท R นี้ว่า "จำนวนจริง" (real number)

2. ความสัมพันธ์หนึ่งอย่าง คือความสัมพันธ์ " < " (อ่านว่าน้อยกว่า) โดยสำหรับ x กับ y ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า x กับ y มีความสัมพันธ์ " < " ต่อกันคือ " $x < y$" แล้วอ่านว่า "x น้อยกว่า y"

3. ไบนารีโอเปอร์เรชั่น 2 อย่าง คือ "+" (บวก) กับ "x" (คูณ) โดยถ้า x กับ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว เราเรียก x+y ว่าเป็นผลบวกของ x กับ y ซึ่งก็เป็นจำนวนจริงด้วย และเรียก x×y ว่าเป็นผลคูณของ x กับ y (มักเขียนเป็น xy) ซึ่งก็เป็นจำนวนจริงด้วย เช่นกัน

<u>ในระบบจำนวนจริงนี้มีคุณสมบัติ</u>เบื้องต้นดังต่อไปนี้

1) สำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ

$x + y = y + x$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการสลับที่การบวก" คือกล่าวได้ว่า "ในการบวกจำนวนจริงสองจำนวน เมื่อสลับที่กันระหว่างจำนวนทั้งสองนั้นแล้ว ผลบวกก็ยังคงเท่าเดิม" เช่น $2 + 3 = 3 + 2$

2) สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

$(x+y)+z = x + (y+z)$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการจัดหมู่ของการบวก" คือกล่าวได้ว่า "ในการบวกจำนวนสามจำนวน จะบวกสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อนก็ได้ ผลบวกจะเท่าเดิม" หรือถ้ามีจำนวนจริงตั้งแต่สี่จำนวนขึ้นไป เมื่อนำมาบวกกันจะแบ่งพวกการบวกอย่างไรก็ได้ ผลลัพท์เหมือนกัน

, & $(2+3) + 4 = 2 + (3+4)$

3) ในเซ็ต R มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง

$x + 0 = x = 0 + x$ ทุก ๆ จำนวนจริง x

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "เอกลักษณ์การบวก" คือมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริง มี 0 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เอาไปบวกกับจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามผลลัพท์ก็ยังคงเป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นเสมอ" เช่น

$2 + 0 = 2 = 0 + 2$

4) สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะมีจำนวนจริง - x ซึ่ง

$x + (-x) = 0 = (-x) + x$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "อินเวอร์ส (inverse) การบวก "ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีจำนวนจริงจำนวนจริงจำนวนหนึ่งซึ่งเมื่อนำไปบวกกับจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่งแล้วได้เอกลักษณ์การบวก" จะเรียกจำนวนจริงนี้ว่า อินเวอร์สของจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่ง เช่น

$2 + (-2) = 0 = (-2) + 2$

เรียก -2 ว่า เป็นอินเวอร์สของ 2 หรืออาจ เรียกว่า 2 ก็เป็นอินเวอร์สของ - 2

5) สำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ

$xy = yx$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่าในการคูณจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ เมื่อสลับที่กันระหว่างจำนวนทั้งสองนั้นแล้วผลคูณก็ยังคงเดิม เช่น $2 \times 4 = 4 \times 2$

6) สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

$(xy)z = x(yz)$

เรียกว่า "คุณสมบัติการจัดหมู่การคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่าในการคูณจำนวนจริงสามจำนวนใด ๆ จะคูณสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อน แล้วนำไปคูณกับจำนวนที่สามก็ได้ผลคูณเท่าเดิม เช่น

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)$$

7) ในเซ็ต R มีจำนวนจริง $1 (\neq 0)$ ซึ่ง

$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

เรียก 1 ว่า "เอกลักษณ์ของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่า "1 เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่คูณกับจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามผลลัพท์จะเป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นเสมอ" เช่น

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$$

8) สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ซึ่ง $x \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{x}$ ซึ่ง

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \frac{1}{x}(x)$$

เรียกว่า "คุณสมบัติอินเวอร์สของการคูณ" ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งซึ่งเมื่อนำไปคูณกับจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่งแล้วได้เอกลักษณ์ของการคูณ" (คือ 1) จะเรียกจำนวนจริงนั้นว่า อินเวอร์สของจำนวนจริงจำนวนนั้น เช่น

$$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2}(2)$$

เรียก $\frac{1}{2}$ ว่าเป็นอินเวอร์สของ 2 หรือเรียก 2 ว่าเป็นอินเวอร์สของ $\frac{1}{2}$ ก็ได้

9) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$x(y+z) = xy + xz$

เรียกคุณสมบัตินี้ว่า "คุณสมบัติการกระจาย" ซึ่งกล่าวได้ว่า "ในระบบจำนวนจริงมีคุณสมบัติการกระจายของการคูณเทียบกับการบวกคือการคูณจำนวนจริงกับผลบวกของจำนวนจริงอีกสองจำนวน ถ้าคูณทีละจำนวนแล้วบวกกันผลคูณที่ได้ก็จะเท่ากัน" เช่น

$$2(1+3) = (2 \times 1) + (2 \times 3)$$

10) ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราจะต้องได้ว่า

$x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

11) สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

กล่าวคือ จากจำนวนจริงสามจำนวน ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สองและจำนวนที่สองน้อยกว่าจำนวนที่สามแล้ว ย่อมได้ว่าจำนวนแรกย่อมน้อยกว่าจำนวนที่สามด้วย เช่น $1 < 4$ และ $4 < 6$ ดังนั้น $1 < 6$

12) สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

เป็นการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน กล่าวคือ จากจำนวนจริงสามจำนวน x,y,z ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สองแล้ว เมื่อนำเอาจำนวนที่สามมาบวกเข้าทั้งสองข้าง ผลบวกของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามก็ยังคงน้อยกว่าผลบวกของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม

เช่น ถ้า $2 < 5$ แล้ว เอา 3 บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้ $2 + 3 < 5 + 3$

13) สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

เป็นการคูณด้วยจำนวนเท่ากันกล่าวคือจากจำนวนจริงสามจำนวน x,y,z ถ้าจำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนที่สอง เมื่อนำเอาจำนวนที่สามซึ่งมากกว่าศูนย์มาคูณเข้าทั้งสองข้าง ผลคูณของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามก็ยังคงน้อยกว่าผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม

เช่น $2 < 5$ และ $0 < 3$ แล้วเอา 3 คูณเข้าทั้งสองข้าง

ดังนั้น $2 \times 3 < 5 \times 3$

14) ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ (Φ คือเซ็ตเปล่า) และ S มีขอบเขตข้างบนแล้ว S ย่อมมีขอบเขตข้างบนต่ำสุด (จะกล่าวในหัวข้อ 3.6)

คุณสมบัติเบื้องต้นทั้ง 14 ข้อนี้ถือว่าเป็นสัจจพจน์เกี่ยวกับระบบจำนวนจริงซึ่งไม่ต้องพิสูจน์

3.2 คุณสมบัติเพิ่มเติม

นอกจากคุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 แล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีคุณสมบัติอื่น ๆ อีกมากมาย ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยอาศัยคุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 ทั้งสิ้น ซึ่งจะนำมากล่าวไว้ในรูปทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 มีจำนวนจริง 0 อยู่เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x+0 = x$ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

ทฤษฎีบทที่ 3.2.2 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมมีจำนวนจริง $-x$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + (-x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.3 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$x0 = 0 = 0x$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.4 สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$(x+y)\ z = xz + yz$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.5 สำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$(-x)\ (-y) = xy$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.6 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$-(-x) = x$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.7 สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด ๆ

ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว ย่อมได้ว่า $y = z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.8 สำหรับจำนวนจริง x,y,z ใด I

ถ้า $x \neq 0$ และ $xy = xz$ แล้ว $y = z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.9 สำหรับจำนวนจริง x,y ใด

ถ้า $xy = 0$ แล้ว ย่อมได้ว่า $x = 0$ หรือ $y = 0$

บทแทรก

ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว เราย่อมได้ว่า $y = 0$

นิยามการลบ ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$x - y = x + (-y)$ อ่าน $x - y$ ว่า x ลบด้วย y

นิยามการหาร ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $y \neq 0$ แล้ว

$\frac{x}{y} = x\left(\frac{1}{y}\right)$ อ่าน $\frac{x}{y}$ ว่า x ส่วน y หรือ x หารด้วย y

ทฤษฎีบทที่ 3.2.10 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ย่อมได้

$x - (y-z) = (x-y) + z$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.11 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{x} = 1$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.12 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1s สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.14 สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด

ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.15 สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ

ถ้า $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.16 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

ถ้า $x < y$ แล้ว $-y < -x$

บทแทรก $x < 0 \Rightarrow 0 < -x$

ทฤษฎีบทที่ 3.2.17 สำหรับ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$

<u>**นิยาม**</u> ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

(๑) $x > y$ หมายความว่า $y < x$ ($x > y$ อ่านว่า x มากกว่า y)

(๒) $x > 0$ เราเรียกว่า x เป็นจำนวนบวก

(๓) $x \leq y$ หมายความว่า $x < y \vee x = y$ (อ่าน $x \leq y$ ว่า x น้อยกว่าหรือเท่ากับ y)

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.2.18**</u> $1 > 0$ (1 เป็นจำนวนบวก)

ทฤษฎีบทที่ 3.2.19 ถ้า x และ y เป็นจำนวนบวกใด ๆ ย่อมได้ว่า $x + y$ เป็นจำนวนบวก

<u>**หมายเหตุ**</u>

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบท ตั้งแต่ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 ถึงทฤษฎีบทที่ 3.2.19 นี้ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้คุณสมบัติเบื้องต้นในหัวข้อ 3.1 และทฤษฎีบทที่ผ่านมาแล้ว ในที่นี้จะยกตัวอย่างการพิสูจน์ให้ดูเพียงทฤษฎีเดียวเท่านั้น ส่วนที่เหลือให้นักศึกษาลองพิสูจน์เองหรือดูจากหนังสือคณิตศาสตร์เบื้องต้นของ รศ.ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติและ ผศ.สุนทร แสวงผล ก็ได้

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.2.3**</u> สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า $x0 = 0 = 0x$

<u>**พิสูจน์**</u>

	$x0 = x0 + 0$	โดยคุณสมบัติข้อ	3
	$= x0 + (x + (-x))$	"	4
	$= (x0 + x) + (-x)$	"	2
	$= (x0 + x1) + (-x)$	"	7
	$= x(0+1) + (-x)$	"	9
	$= x1 + (-x)$	"	3
	$= x + (-x)$	"	7
	$= 0$	"	4
และ	$0x = x0 = 0$	"	5

$\therefore\ x0 = 0 = 0x$

__ตัวอย่าง 3.2.1__ จงหาค่า x ถ้า $3x + 1 < x - 1$

__วิธีทำ__ จาก $3x + 1 < x - 1$ บวกด้วย -1 ทั้งสองข้างจะได้ $3x < x - 2$

เอา $-x$ บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้ $2x < -2$ เอา $\frac{1}{2}$ คูณเข้าทั้งสองข้าง

จะได้ $x < -1$ ดังนั้นคำตอบ คือ $\{ x \mid x < -1 \}$

__แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 3.2__

ให้ x,y,z,t เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้า $xy = xz$ แล้ว $y = z$ เมื่อใด?
2. ถ้า $xy = 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว x จะมีค่าเป็นอะไร ?,
3. ถ้า $xy = 0$ และ $x = 0$ แล้ว y จะมีค่าอย่างไร 2
4. $-(x+y)$ เท่ากับ อะไร ?
5. $(x+y)(z-t)$ เท่ากับ อะไร ?
6. $x \ -(y-z)$ เท่ากับ อะไร ?
7. $x-(y+z)$ เท่ากับ อะไร ?
8. $(\frac{x}{y})(\frac{y}{x})$ เท่ากับ อะไร เมื่อ $x \neq 0,\ y \neq 0$
9. $(\frac{x}{y})(\frac{z}{t}) = \frac{xz}{yt}$ เมื่อใด ?
10. $(x+3)(y+2)$ เท่ากับเท่าไร ?
11. $\frac{xy}{z} + \frac{t}{z}$ เท่ากับ อะไร เมื่อ $z \neq 0$
12. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ เท่ากับ อะไร ?
13. $(\frac{xy \ + xz}{x})$ เท่ากับ อะไร เมื่อ $x \neq 0$

14. $\frac{(x+y)\ (y+z)}{(x+y)} = y + z$ เมื่อใด ?

15. $(x-y)\ (z-t)$ เท่ากับ อะไร ?

16. $(z-y)\ ((x+z) - (z-t))$ เท่ากับ อะไร 9

17. $\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{yz}$ เมื่อใด ?

18. $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \frac{xt}{yz}$ เมื่อใด ?

19. ถ้า $-x < y$ แล้ว $-y$ น้อยกว่าอะไร

20. ถ้า $-y < -x$ แล้ว x น้อยกว่าอะไร

21. ถ้า $z < 0$ แล้ว เอา z คูณ $x < y$ ตลอดแล้วได้อะไร ?

22. ถ้า $z > 0$ แล้ว เอา z คูณ $x < y$ ตลอดแล้วได้อะไร ?

23. ถ้า $x < y < 0$ แล้ว จงเปรียบเทียบระหว่าง $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ และ 0

24. ถ้า $x > y \wedge z > t$ แล้ว จงเปรียบเทียบ $x-t$ กับ $y-z$

25. จงเขียนเศษส่วนที่มีส่วนเป็น $y\ z$ และมีค่าเท่ากับ $\frac{x}{y}$

26. จงเขียนเศษส่วนที่มีส่วนเป็น $xz + yz$ และมีค่าเท่ากับ $\frac{t}{z}$

27. จงหาค่าของ x ถ้า $4x - g < 15$

28. จงหาค่า x ถ้า $7 < 2x - 3$

29. จงหาค่า x ถ้า $5x + 2 < 4x - 3$

30. จงหาค่า x ถ้า $3x - 3 < 5x + 11$

3.3 จำนวนนับ, จำนวนเต็ม, จำนวนตักยะ

จำนวนนับ (Counting numbers) **หรือจำนวนธรรมชาติ** (natural numbers) หรือจำนวนเต็มบวก (positive integers)

การเริ่มเรียนรู้เกี่ยวกับจำนวนนั้น เราเริ่มเรียนรู้เกี่ยวกับการนับเป็นอันดับแรก ดังนั้น จำนวนแรกที่เรารู้จักก็คือ "หนึ่ง" และจำนวนต่อมาก็คงต้องเป็น "สอง" ดังนั้น ตัวเลขที่ค้นพบหรือคิดขึ้นในตอนแรกก็คงเป็นตัวเลขที่แทน หนึ่ง, สอง นั่นเอง เชื่อกันว่ามนุษย์บางเผ่าในสมัยโบราณรู้จักแต่ "หนึ่ง" "สอง" และ "มาก" เท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามมนุษย์เราก็สามารถสร้างระบบจำนวนนับขึ้นใช้จนกระทั่งปัจจุบันเราเรียกจำนวนดังกล่าวว่า จำนวนธรรมชาติ คือ 1,2,3,4,... จำนวน 2,3,4,.... เหล่านี้เราอาจเขียนเป็นผลบวกของ 1 ได้ จึงเรียกจำนวนเหล่านี้อีกชื่อว่า "จำนวนนับ" หรือ บางทีก็เรียกว่า "จำนวนเต็มบวก" และจะใช้ สัญลักษณ์ "N" เขียนแทนเซ็ตของจำนวนนับหรือจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$$N = \{1,2,3,...\}$$

จะพบว่าระบบซึ่งประกอบด้วยเซ็ต N ไบนารีโอเปอร์เรชัน + กับ × และมีความสัมพันธ์ < ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง เราเรียกว่า ระบบจำนวนนับ (Natural number system) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังนี้

ถ้าให้ x,y,z เป็นจำนวนนับใด ๆ แล้ว

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $xy = yx$

4) $(xy)z = x(yz)$

5) $\exists$ $1 \in N$ ซึ่ง $x.1 = x = 1.x$

6) $x(y + z) = xy + xz$

7) x,y เป็นจำนวนนับแล้วจะต้องได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

8) ถ้า $x<y$ และ $y<z$ แล้ว $x<z$

9) ถ้า $x<y$ แล้ว $x+z<y+z$

10) ถ้า $x<y$ แล้ว $xz<yz$

<u>จำนวนเต็ม</u> (integers)

ให้ x เป็นจำนวนใด ๆ จะเรียก x ว่า "เป็นจำนวนเต็ม" (integers) ถ้า

1) x เป็นจำนวนนับ lo จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1,2,3, ...

2) $-x$ เป็นจำนวนนับ คือ จำนวนเต็มลบนั่นเอง ได้แก่ -1,-2,-3,...

3) x เป็น 0

และมักจะใช้ สัญลักษณ์ "I" เขียนแทนเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย ดังนั้น

$$I = \{..., -3, -2, -1, 0,1,2,3,...\}$$

จะพบว่าระบบที่ประกอบด้วยเซ็ต I ไบนารีโอเปอร์เรชั่น + กับ x และมีความสัมพันธ์ < ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง เราเรียกว่า <u>ระบบจำนวนเต็ม</u> ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ให้ x,y,z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1) $x+y=y+x$

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

3) มี $0 \in I$ ซึ่ง $x+0=x=0+x$

4) สำหรับทุก ๆ $x \in I$ จะมี $-x \in I$ ซึ่ง $x+(-x) = 0 = C-x) + x$

5) $xy = yx$

6) $(xy)z = x(yz)$

7) มี $1 \in I$ ซึ่ง $x.1 = x = 1.x$

8) $x\ (y+z) = xy + xz$

9) สำหรับ x,y ใด ๆ เราจะได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

10) ถ้า $x<y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

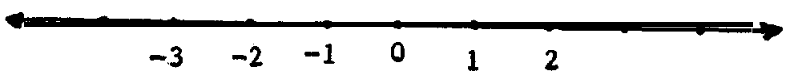
1 1) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

12) ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเต็มเป็นดังนี้ คือ

$$--- < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < ---$$

ซึ่งอาจเขียนแทนจำนวนเต็มต่าง ๆ ลงบนเส้นตรงได้เป็น



รูป 2.3.1

การเขียนแสดงจำนวนเต็มด้วยจุดต่าง ๆ ลงบนเส้นตรงนี้ทำโดยเลือกจุดจุดหนึ่ง เรียกว่าจุด 0 บนเส้นตรง ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกหน่วยความยาวเป็นเท่าไรก็ได้ แล้วเลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางขวาของ 0 ให้แทนจำนวน 1,2,3,... โดยมีความยาวห่างจาก 0 ไปทางขวาเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย,...ตามลำดับและเลือกจุดบนเส้นตรงทางซ้ายของ 0 ให้แทน -1,-2,-3,... โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย,... ตามลำดับดังรูป 2.3.1

จะได้ว่า ถ้า x,y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว "ถ้า $x < y$ แล้ว จุด x ย่อมอยู่ทางซ้ายของ y และในทางกลับกัน ถ้า x อยู่ทางซ้ายของ y แล้ว จะได้ว่า $x < y$ "

จำนวนตักยะ (Rational numbers)

"จำนวนตักยะ" หมายถึง จำนวนจริงที่สามารถเขียนได้เป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มโดยส่วนไม่เท่ากับ 0 หรืออาจกล่าวได้ว่า จำนวนตักยะได้แก่จำนวนต่อไปนี้ คือ

1. จำนวนเต็ม ได้แก่ ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,... เพราะสามารถเขียนแทนจำนวนเต็มแต่ละจำนวนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้โดยมีส่วนเป็น 1 เสมอ (ยกเว้นจำนวนเต็มศูนย์) เช่น $2 = \frac{2}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{5} = \frac{0}{9}$ เป็นต้น

2. จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของเศษส่วนของจำนวนเต็มโดยตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์และไม่เท่ากับ 1 เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{4}$ เป็นต้น

3. จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ (คือทศนิยมรู้จบหรือทศนิยมไม่รู้จบชนิดซ้ำกันนั่นเอง) เช่น 1.14, -3.2, 0.131313...

เราใช้ สัญลักษณ์ "Q" แทนเซ็ตของจำนวนตักยะทั้งหลาย

จะพบว่าระบบที่ประกอบด้วยเซ็ต Q ไบนารีโอเปอเรชัน + กับ × และมีความสัมพันธ์ < ก็เป็นระบบคณิตศาสตร์อีกระบบหนึ่ง เราเรียกว่า<u>ระบบจำนวนตักยะ</u> (Rational number system) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ดังนี้

ให้ x,y,z เป็นจำนวนตักยะใด ๆ จะได้ว่า

1. $x + y = y + x$

2. $(x+y) + z = x +(y+z)$

3. มี $0 \in Q$ ซึ่ง $x + 0 = x = 0 + x$

4. สำหรับทุก ๆ $x \in Q$ จะมี $-x \in Q$ ซึ่ง
   $x +(-x) = 0 = (-x) + x$

5. $xy = yx$

6. $(xy)z = x(yz)$

7. มี $1 \in Q$ ซึ่ง $1.x = x = x.1$

8. สำหรับทุก ๆ $x \in Q$ ถ้า $x \neq 0$ จะมี $\frac{1}{x} \in Q$
   ซึ่ง $x(\frac{1}{x}) = 1 = (\frac{1}{x})\, x$

9. $x(y+z) = xy + xz$

10. สำหรับ x, y ใด ๆ เราจะได้ว่า $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

11. ถ้า x c y และ $y < z$ แล้ว $x < z$

12. ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

13. ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

นอกจากนั้นระบบจำนวนตักยะยังมีคุณสมบัติที่สำคัญสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.2.20 อีกคือ

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.20</u> ถ้า x, y เป็นจำนวนตักยะใด ๆ และ $x < y$ แล้วย่อมมีจำนวนตักยะ z ซึ่ง $x < z < y$

จากทฤษฎีนี้ทำให้ทราบว่าในการเขียนแสดงจำนวนตักยะ ด้วยจุดในเส้นตรงนั้นมีจุดที่แทนจำนวนตักยะอยู่หนาแน่น แต่มีข้อเตือนใจไว้อย่างหนึ่งว่าจุดบนเส้นตรงนี้ไม่ใช่ทุกจุดจะแทนได้ด้วยจำนวนตักยะ ยังมีจุดที่ไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตักยะแต่แทนด้วยจำนวนอื่นคือจำนวนอตักยะ ซึ่งจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 3.6

3.4 **<u>ค่าสัมบูรณ์</u>** absolute value)

<u>นิยาม</u> 2.4.1 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ "ค่าสัมบูรณ์" (absolute value) ของ x เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $|x|$ (อ่านว่า ค่าสัมบูรณ์ของ x)

โดย
$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เช่น $|2| = 2$ เพราะ $2 > 0$ ในที่นี้ $x = 2$ จึงได้ว่า $x > 0$

$|0| = 0$ ในที่นี้ $x = 0$ จึงได้ว่า $x = 0$

$|-2| = -(-2)$ เพราะ $-2 < 0$ ในที่นี้ $x = -2$ จึงได้ว่า $x < 0$

$= 2$

$$\left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น จะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ ย่อมเป็นจำนวน "บวก" หรือ 0 เสมอ

<u>ทฤษฎีบทบางทฤษฎีของค่าสัมบูรณ์</u>

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.4.1</u> สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.4.2</u> สำหรับจำนวนจริง a, x ใด ๆ ถ้า $a > 0$ เราจะได้ว่า

1) ถ้า $|x| \leq a$ แล้วย่อมได้ว่า $-a \leq x \leq a$

2) ถ้า $-a \leq x \leq a$ แล้วก็จะได้ว่า $|x| \leq a$

เช่น $|x| < 2$ เราจะได้ว่า $-2 < x < 2$

ได้ค่าของ x อยู่ระหว่าง -2 กับ 2

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.1</u> จงหาค่าของ x เมื่อ $|x + 1| \leq 5$

<u>วิธีทำ</u> จาก $|x + 1| \leq 5$ ดังนั้นจะได้ว่า $-5 \leq x + 1 \leq 5$

เอา -1 บวกตลอด

$\therefore\ -5 - 1 \leq x + 1 - 1 \leq 5 - 1$

$-6 \leq x \leq 4$

ดังนั้นค่าของ x เมื่อกำหนด $|x + 1| \leq 5$ คือ $-6 \leq x \leq 4$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.๑</u> ให้ $A * \{x \mid 12x - 51 \leq 13\}$ จงหาค่าของ x ใน เซ็ต A

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2x - 5| \leq 13$ จะได้ว่า $-13 \leq 2x - 5\ 4\ 13$

เอา 5 บวกตลอด

$\therefore\ -13 + 5 \leq 2x - 5 + 5 \leq 13 + 5$

$-8 \leq 2x \leq 18$

เอา $\frac{1}{2}$ คูณตลอด

$\therefore\ -4 \leq x \leq 9$

ดังนั้น $A = \{x \mid -4 \leq x \leq 9\}$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.3</u> ให้ $B = \{ x \mid |2x - 5| > 13 \}$ จงหาค่าของ x ในเซ็ต B

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 3.4.2 จะได้ว่า $A = \{ x \mid |2x - 5| \leq 13 \}$

$$= \{ x \mid -4 \leq x \leq 9 \}$$

จะพบว่า B ที่ต้องการก็คือ A

นั่นคือ $B = \{x \mid |2x - 5| > 13\}$

$$= \{x \mid x \notin A \}$$

$$= \{ x \mid x < -4 \wedge x > 9 \}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.4</u> ให้ $\{ B = x \mid |x - 2| < -1 \}$ จงหาค่าของ x ในเซ็ต B

<u>วิธีทำ</u> จากเซ็ต B ที่กำหนดให้จะเห็นว่าไม่มีค่า x ที่เป็นจริง เพราะไม่มีค่า x ใด ๆ ที่ $x - 2$ เป็นลบ (ค่าสัมบูรณ์เป็นบวกหรือศูนย์เสมอ) นั่นคือ $B = \phi$ (เซ็ตเปล่า) เพราะไม่มีค่า x ใด ๆ เลย ที่สอดคล้องกับ $|x - 2| < -1$

หรือถ้าเราลองใช้ทฤษฎีบทที่ 3.4.2 มาพิจารณาก็ได้

จาก $|x - 2| < -1$ จะได้ว่า $-(-1) < x - 2 < -1$

$$1 < x - 2 < -1$$

เอา 2 บวกตลอด

$$1 + 2 < x - 2 + 2 < -1 + 2$$

$$3 < x < 1$$

ซึ่งไม่มีค่า x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ เลยที่สอดคล้องกับ $3 < x < 1$ คือ x ต้องเป็นจำนวนที่มากกว่า 3 และน้อยกว่า 1 ซึ่งไม่มี

ดังนั้น $B = \phi$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.4.3</u> สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

__คุณสมบัติที่น่าสนใจ__ บางประการของค่าสัมบูรณ์

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1) $|x|^2 = x^2$

2) $|x| = |-x|$

3) $|x-y| = |y-x|$

4) $|xy| = |x| \cdot |y|$

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$

6) $xy \leq |x| \cdot |y|$

7) $|x-y| \leq |x| + |y|$

__แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 3.4__

1. จงหาค่าของ

1.1) $|-5|$

1.2) $(-10 + 14|$

1.3) $|-2\ (6)|$

1.4) $|-12| + |5|$

1.5) $|-4| + |-3|$

1.6) $4 - 1-5|$

1.7) $-4 - |-5|$

1.8) $|-4 + 2 - 8|$

2. จงหาค่าของ x เมื่อกำหนดว่า

2.1) $|x| = 4$

2.2) $|x| = 0$

2.3) $|x| = -3$

2.4) $|x-3| = 2$

2.5) $|x| < 2$

2.6) $|x-2| \leq 4$

2.7) $|x| = x+1$

2.8) $|x| = x-1$

3. จงหาค่าของ x ใน เซ็ต A,B, C, D ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

3.1) $A = \{x \mid |x| < 10\}$

3.2) $B = \{x \mid |2x + 7| < 9\}$

3.3) $C = \{x \mid |2x - 3| = 4\}$

3.4) $D = \{x \mid |x - 2| < 0\}$

4. ให้ x,y,z เป็นจำนวนจริงใด ๆ

4.1) ถ้า $x < y$ แล้ว $|x-y| = ?$

4.2) ถ้า $x + y < z$ แล้ว $|x + y - z| = ?$

4.3) ถ้า $x + y < z$ แล้ว $|z - x - y| = ?$

4.4) ถ้า $x < y + z$ แล้ว $|x - y - z| = ?$

4.5) ถ้า $|x-y| = y-x$ แล้ว จงหาความสัมพันธ์ของ x กับ y

4.6) ถ้า $|x-y| = x-y$ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

4.7) ถ้า $|x-y| = 0$ แล้ว จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

3.5 การพิสูจน์โดยวิธีอุปมานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

การพิสูจน์โดยวิธีอุปมานทางคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการพิสูจน์ว่าความสัมพันธ์ $P(n)$ ที่กำหนดมาให้นั้นเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก (จำนวนธรรมชาติ) ทุกจำนวน ถ้าสิ่งต่อไปนี้เป็นจริง คือ

1. เมื่อ $n = 1$ แล้วความสัมพันธ์เป็นจริง

2. เมื่อ $n = k$ เป็นจริงแล้ว $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

การพิสูจน์โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิสูจน์เพื่อที่จะแสดงว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้นั้นเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเปรียบเสมือนกับการขึ้นบันไดที่ทอดจากพื้นดินขึ้นสู่ท้องฟ้า เราจะขึ้นบันไดทีละขั้น คือเริ่มจากขึ้นขั้นที่ 1 ก่อน ต่อไปก็ขึ้นขั้นที่ 2,3,4,... เรื่อย ๆ ไป เราจะขึ้นบันไดถึงขั้นที่เราต้องการได้ถ้า

1.. เราสามารถขึ้นขั้นที่หนึ่งได้

2. เราสามารถไต่จากขั้นหนึ่งไปอีกขั้นหนึ่งได้

ถ้าหากเราสามารถกระทำทั้งสองประการนี้ได้แล้ว เราก็สามารถไต่บันไดไปถึงขั้นที่เราต้องการได้

<u>กระบวนการพิสูจน์</u> โดยอุปมานนั้น กระทำได้ดังนี้

<u>ขั้นที่</u> 1. แสดงว่า ถ้า $n = 1$ แล้ว ข้อความ $P(n)$ ที่กำหนดมาให้นั้นเป็นจริง

<u>ขั้นที่</u> 2. ยอมรับว่า ถ้าข้อความ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว พิสูจน์ว่า มันจะเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $k + 1$ ด้วย

ถ้าเป็นจริงทั้งสองประการนี้แล้ว เราก็สรุปได้ว่า "ข้อความ $P(n)$ นั้นเป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก $(n \varepsilon N)$"

<u>หมายเหตุ</u> ในทางปฏิบัติ มักจะตรวจสอบดูด้วยว่า เมื่อ $n = 2$ หรือ $n = 3$ ข้อความ $P(n)$ นั้นยังเป็นจริงอยู่หรือเปล่า เพราะ $P(n)$ บางข้อความ เมื่อ $n = 1$ เป็นจริง แต่ $n = 2$ หรือ $n = 3$ อาจไม่จริง ก็สรุปได้ว่าไม่เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก แต่ถ้า $n = 2, n = 3$ เป็นจริงก็จะดำเนินการพิสูจน์ในขั้นที่ 2 ต่อไป

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.1</u>

จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>พิสูจน์</u>

1. ให้ $n = 1$

$$\therefore \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

แสดงว่า $n = 1$ เป็นจริง (คือ $P(1)$ เป็นจริง)

2. ยอมรับว่า เมื่อ $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องพิสูจน์ว่า

เมื่อ $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย (คือ $P(k) + P(k + 1)$)

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

เอา $(k + 1)$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\therefore 1 + 2\ t\ 3\ t \dots + k\ t\ (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\ ((k+1)\ t\ 1)}{2}$$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

$\therefore$ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

__ตัวอย่างที่ 3.5.2__ จงพิสูจน์ว่า

$$\cancel{1 \times 3} + 3\ k\ 5 + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

__พิสูจน์__

1. ให้ $n = 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{((2 \times 1)-1)((2 \times 1) + 1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

แสดงว่า $n = 1$ เป็นจริง

2. ยอมรับว่า เมื่อ $n = k$ เป็นจริงแล้ว จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า เมื่อ $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

เอา $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

จะเห็นว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

ดังนั้น $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ เป็นจริง

ทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>**ตัวอย่างที่ 3.5.3**</u> จงพิสูจน์ว่า $2^n > 1+n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวน เต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$

<u>พิสูจน์</u>

1. ให้ $n = 2$

$\therefore\ 2^2 > 1 + 2$

$\therefore\ 4 > 3$

แสดงว่า $n = 2$ เป็นจริง

2. ยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริงแล้วจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $n = k+1$ เป็นจริง

จากการยอมรับว่า $n = k$ เป็นจริง เราได้ว่า

$$2^k > 1 + k$$

เอา 2 คูณตลอด

$$2^k \cdot 2 > 2 + 2k$$

$$\therefore\ 2^{k+1} > 2 + 2k$$

แต่ $2 + 2k > 2 + k$ ($\because$ k เป็นจำนวนเต็มบวก)

$$\therefore\ 2^{k+1} > 2 + k$$

นั่นคือ $2^{k+1} > 1 + (k+1)$

จะเห็นได้ว่า $n = k + 1$ เป็นจริงด้วย

$\therefore\ 2^n > 1 + n$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$n \geq 2$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 3.5

จงพิสูจน์ ข้อความต่อไปนี้ โดยวิธีอุปมานคณิตศาสตร์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
2. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
3. $3 + 6 + 9 + \ldots + 3n = \dfrac{3n(n+1)}{2}$
4. $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n+1)$
5. $5 + 10 + 15 + \ldots + 5n = \dfrac{5n(n+1)}{2}$
6. $6 + 12 + 18 + \ldots + 6n = 3n(n+1)$
7. $5^n \geq 1 + 4n$
8. $3^n \geq 1 + 2n$

3.6 จำนวนอตักยะ

จากการศึกษาเรื่องระบบจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็มและระบบจำนวนศักยะ ซึ่งระบบต่าง ๆ เหล่านี้ ต่างก็เป็นส่วนหนึ่งของระบบจำนวนจริง จะเห็นว่าความสัมพันธ์ $<$ ช่วยจัดจำนวนต่าง ๆ เข้าเป็นลำดับกันและคุณสมบัติข้อที่ 14 ก็กล่าวถึงคุณสมบัติของความสัมพันธ์อันนี้ อนึ่งเพื่อเราจะได้ทำความเข้าใจกับคุณสมบัติข้อที่ 14 ได้อย่างสมบูรณ์จึงต้องมาทำความเข้าใจกับสิ่งต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ก่อน

3.6.1 ขอบเขตของเซ็ต

h18.6.1 **ขอบเขตข้างบน (upper bound) ของเซ็ต**

"ให้ $S \subseteq R$ ถ้า U เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$\forall x \ (x \in S \ 3 \ x \leq U)$

จะเรียก U ว่าเป็นขอบเขตข้างบนของเซ็ต S"

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ อีลีเมนต์ในเซ็ต S จะน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง U เสมอ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า บรรดาจำนวนจริง U ย่อมมากกว่าหรือเท่ากับอีลีเมนต์ในเซ็ต S ทุกตัว แล้วจะเรียกบรรดาจำนวนจริง U เหล่านี้ว่าขอบเขตข้างบนของเซ็ต S

<u>ตัวอย่าง</u> เช่น ให้ $S = \{x \mid x \in R \wedge 3 \leq x \leq 5\}$

จะเห็นว่าเซ็ต S มีค่าอยู่ระหว่างตั้งแต่ 3 ถึง 5 เท่านั้น

ดังนั้น ขอบเขตข้างบนของเซ็ต S ก็คือจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 5 หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่าขอบเขตข้างบนของ S คือ $\{x \mid x \in R \wedge x \geq 5\}$

นิยาม 3.6.2 ขอบเขตข้างบนต่ำสุด (least upper bound) **ของเซ็ต**

ให้ U' เป็นขอบ เขตข้างบนของเซ็ต S และ

$\forall U$ (U เป็นขอบ เขตข้างบนของ $S \Rightarrow U' \leq U$)

จะเรียก U' ว่าเป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S เขียนแทน U' ด้วย สัญลักษณ์ "l.u.b.S"

นั่นคือ สำหรับบรรดาจำนวนจริง U ทั้งหลายที่เป็นขอบเขตข้างบนของเซ็ต S นั้น จะมีอยู่อีลีเมนต์หนึ่งซึ่งมีค่าน้อยที่สุด สมมุติเป็น U' ซึ่งจะเรียก U' ว่าเป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S (l.u.b.S)

เช่น จาก $S = \{x \mid x \in R \wedge 3 \leq x \leq 5\}$

เราทราบว่าขอบเขตข้างบนของ S คือ $\{x \mid x \in R \wedge x \geq 5\}$ ดังนั้น ขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซ็ต S หรือ l.u.b.S ก็คือ 5

<u>**นิยาม 3.6.3 ขอบเขตข้างล่าง**</u> (lower bound) **ของเซ็ต**

"ให้ $S \subsetneq R$ ถ้า L เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$\forall x(x \in S \Rightarrow x \geq L)$

จะเรียก L ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S"

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ อีลีเมนต์ในเซ็ต S ย่อมมากกว่าหรือเท่ากับ L เสมอ หรือกล่าวคือบรรดาจำนวนจริง L นี้ย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับอีลีเมนต์ในเซ็ต S ทุกตัว

และจะเรียกบรรดาจำนวนจริง L เหล่านี้ว่าขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S

เช่น $S = \{x \mid x \in R \wedge 3 \le x \le 5\}$

ซึ่งเซ็ต S มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 5

ดังนั้นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S ก็คือจำนวนจริงใด ๆ ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่า ขอบเขตข้างล่างของ S ก็คือ $\{x \mid x \in R \wedge x \le 3\}$

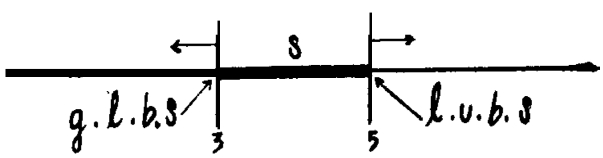
<u>**นิยาม 3.6.4 ขอบเขตข้างล่างสูงสุด**</u> (greatest lower bound) ของเซ็ต

"ให้ L' เป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S และ $\forall L$ (L เป็นขอบเขตข้างล่างของ $S \Longrightarrow L \le L'$) เราจะเรียก L' ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของเซ็ต S เขียนแทน L' ด้วย สัญลักษณ์ "g.l.b.S"

นั่นคือสำหรับบรรดาจำนวนจริง L ทั้งหลายที่เป็นขอบเขตข้างล่างของเซ็ต S นั้น จะมีอยู่อีลีเมนต์หนึ่งซึ่งมีค่ามากที่สุด สมมุติว่าเป็น L' ซึ่งเราจะเรียก L' ว่าเป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของเซ็ต S (g.l.b.S)

เช่น จาก $S = \{x \mid x \in R \wedge 3 \le x \le 5\}$

เราทราบว่าขอบเขตข้างล่างของ S คือ {x | X ε R A X 4 3} ดังนั้น ขอบเขตข้างล่างสูงสุดของ S หรือ g.l.b. S ก็คือ 3 อาจ เขียนรูปประกอบได้ดังรูป 3.6.1



รูป 3.6.1

<u>**3.6.2 จำนวนอตักยะ**</u>

ในระบบจำนวนตักยะ จะหาค่ารากของสมการ $x^2 = 2$ ไม่ได้ เพราะเราไม่สามารถเขียน $\sqrt{2}$ ออกมาเป็นจำนวนในรูปของเศษส่วนที่ทั้งเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มโดย

ส่วนไม่เท่ากับศูนย์ได้ คือไม่มีจำนวนในรูป $\frac{a}{b}$ จำนวนใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2 พอดี($a \in I$, $b \in I$ และ $b \neq 0$)

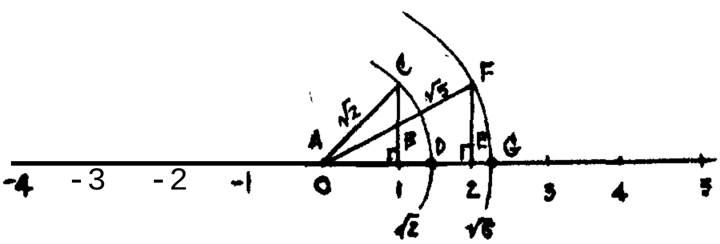
จึงกล่าวว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ (ซึ่งจะแสดงในภายหลัง)

และจะเรียกจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่า <u>จำนวนอตรรกยะ</u> (irrational numbers)

นอกจากนี้ยังมีจำนวนอตรรกยะอีกมากมายเช่น $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, ..., $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ... , $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,...., $1 \pm \sqrt{2}$,..,e,π เป็นต้น

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าเราสามารถเขียนแสดงจำนวนตรรกยะด้วยจุดต่าง ๆ บนเส้นตรงได้อย่างหนาแน่นมากมายก็จริง แต่ก็ยังมีช่องว่างระหว่างจุดเหล่านั้น กล่าวคือ "จุดที่แทนจำนวนตรรกยะมิได้เรียงกันอยู่อย่างต่อเนื่องนั่นเอง" ในบรรดาช่อง โหว่นั้นก็คือจุดซึ่งเขียนแสดงด้วยจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

เช่น จะแสดงถึงจุดที่อยู่ของ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ บนเส้นจำนวนได้ดังรูป 3.6.2



รูป 3.6.2

จากรูปให้ AB,CB,EF ยาวหนึ่งหน่วย AE ยาว 2 หน่วย

$\therefore$ จาก(ความยาว $AC)^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore$ ความยาว AC $= \sqrt{2}$

แล้วเขียนส่วนโค้งให้มีรัศมีเท่ากับ AC มาตัดเส้นตรงที่ D ดังนั้น AD ยาว $\sqrt{2}$ ด้วย, ในทำนองเดียวกัน (ความยาว AF $)^2 = AE^2 + EF^2$

$= 2^2 + 1^2 = 5$

$\therefore$ ความยาว AF = $\sqrt{5}$

แล้วเขียนส่วนโค้งให้รัศมีเท่ากับ AF มาตัดเส้นตรงที่ G ดังนั้น AG ยาว 5 นั่นเอง

<u>หมายเหตุ</u>

1) จาก N คือเซ็ตของจำนวนนับ, I เป็นเซ็ตของจำนวนเต็ม, Q เป็นเซ็ตของจำนวนตรรกยะ เราจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตทั้งสามได้เป็น $N \subseteq I \subseteq Q$

2) ผลรวม (union) ของเซ็ตของจำนวนตรรกยะกับเซ็ตของจำนวนอตรรกยะ เรียกว่า "เซ็ตของจำนวนจริง (คือเซ็ต R)"

3) ส่วนร่วม (intersection) ของเซ็ตจำนวนตรรกยะกับเซ็ตอตรรกยะจะเป็นเซ็ตเปล่า (empty set) นั่นแสดงว่าไม่มีจำนวนจริงจำนวนใดเลยที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

4) เซ็ตของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะต่างก็เป็นสับเซ็ตของเซ็ตของจำนวนจริง

5) นอกจากนี้ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่ง เช่น $\sqrt{-1}$ ซึ่งได้จากการแก้สมการ $x^2+1 = 0$ เราไม่สามารถหาค่าจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับ $x^2+1 = 0$ ได้เลย เพราะกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ นั่นคือ ไม่สามารถบอกได้ว่า $\sqrt{-1}$ เป็นเท่าไร ? จำนวนพวกนี้ไม่ใช่จำนวนจริง เราเรียก "จำนวนจินตภาพ" (imaginary number) ซึ่งอยู่นอกเหนือเนื้อหาในบทนี้จึงไม่กล่าวถึง

<u>ต่อไปจะแสดงว่าไม่มีจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ ที่ $x^2 = 2$</u> (คือ $x = \sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ)

สมมุติว่า x เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งสามารถเขียนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้เป็น $\frac{a}{b}$ (คือ a กับ b ไม่มีตัวประกอบร่วมนอกจาก 1 และ -1 นั่นคือ a หาร b ไม่ลงตัว หรือ b หาร a ก็ไม่ลงตัวด้วย)

ให้ $x = \frac{a}{b} = \sqrt{2} > 0$

$$\therefore \quad (\frac{a}{b})^2 = 2 \quad \text{หรือ} \quad \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\therefore \quad a^2 = 2b^2 \text{ --------------(1)}$$

เนื่องจากทางด้านซ้ายมือ (คือ a^2) หารลงตัวด้วย a

ดังนั้น a จะต้องหารจำนวนทางขวามือ (คือ $2b^2$) ลงตัวด้วย

แต่ a หาร b ไม่ลงตัว

$\therefore$ a ต้องหาร 2 ลงตัว

$\therefore$ $a = 1$ หรือ $a = 2$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $a - 1$, จาก (1) เราได้ว่า

$1^2 = 2b^2$

แต่ $2b^2$ จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ($2b^2 \geq 2$)

$\therefore \quad 1^2 \geq 2$

เป็นไปไม่ได้

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $a - 2$ จาก (1) เราได้

$2^2 = 2b^2$

ดังนั้น $2 = b^2$

แต่ $b^2 = 1$ หรือ $b^2 \geq 4$ เสมอ

$\therefore \quad 2 = 1$ **หรือ** $2 \geq 4$

เป็นไปไม่ได้

จะเห็นว่าทั้งกรณีที่ (1)และ (2) ให้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) ทั้งสองกรณี นั่นคือ $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตักยะ (ซึ่งเรียกว่าจำนวนอตักยะ)

3.6.3 ค่ารากและกำลังของจำนวนจริง

นิยาม 3.6.5 ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a = b^n$ จะเรียก b ว่า "รากที่ n ของ a " (n^{th} root of a) และนิยมเขียนแทน b ด้วย สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$ (คือ $b = \sqrt[n]{a}$) โดยนิยมเขียนแทน $\sqrt[1]{a}$ ว่า a และนิยมเขียนแทน $\sqrt[2]{a}$ ด้วย $\sqrt{a}$

ให้ a,b เป็นจำนวนจริง, และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเขียนได้ว่า

1) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

2) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

นิยาม 3.6.6 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว "กำลังที่ n ของ a " หรือ " a กำลัง n " ได้แก่

$a^n = a.a.... a$ (n แฟคเตอร์)

คุณสมบัติเกี่ยวกับกำลังของจำนวนจริง

ให้ a,b เป็นจำนวนจริง และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก

1) $a^m.a = a^{m+1}$

2) $a^m.a^n = a^{m+n}$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $(a.b)^m = a^m.b^m$

5) $(\frac{a}{b})^m = (\frac{a^m}{b^m})$

6) ถ้า $m \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

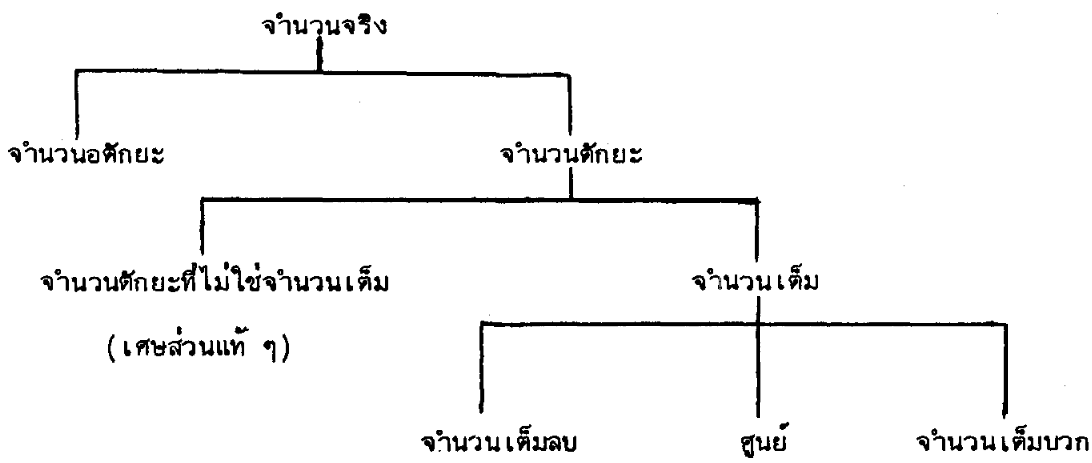
7) ถ้า $a \neq 0$ แล้ว

$$(1) \quad \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{ถ้า } m > n \\ 1 & \text{ถ้า } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{ถ้า } m < n \end{cases}$$

$$(2) \quad a^0 = 1$$

หมายเหตุ คุณสมบัติที่กล่าวมาทั้ง 7 ข้อนี้ถึงแม้ m และ n เป็นจำนวนตักยะ ก็ยังเป็นจริงเสมอ

อนึ่งเซ็ตของจำนวนจริงนั้นสามารถแสดงได้ดังแผนผังต่อไปนี้



3.6.4 เส้นจำนวน (number line)

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งยาวเท่าไรก็ได้และเรียกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงว่าจุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางขวาของ 0 ให้แทน 1,2,3,... โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางขวา (เลือกหน่วยความยาวมีหน่วยเป็นอะไรก็ได้) เป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย,... ตามลำดับ แล้วเลือกจุดบนเส้นตรงซึ่งอยู่ทางซ้ายของ 0 ให้แทน -1,-2,-3,... โดยมีระยะห่างจาก 0 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1 หน่วย, 2 หน่วย,... ตามลำดับ ดังรูป 3.6.3

รูป 3.6.3

ถ้ากำหนดจำนวนจริงใด ๆ มาให้แล้วจะมีจุดบนเส้นตรงนี้เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่แทนจำนวนนั้น ๆ เช่น $-\frac{3}{2}$ จะแทนด้วยจุดทางซ้ายของ 0 ซึ่งอยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง $\frac{3}{2}$ หน่วย เป็นต้น กล่าวคือ จุดทุกจุดบนเส้นตรงนี้ย่อมแทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเสมอ นั่นคือ จะได้เส้นตรงซึ่งจุดแต่ละจุดบนเส้นตรงนี้ถูกใช้แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งได้และเรียกเส้นตรงนี้ว่าเส้นจำนวน (number line)

<u>๓.๖.๕ การเขียนแสดงเซ็ตของจำนวนจริงด้วยภาพบนเส้นจำนวนและช่วง</u>

ช่วง (interval) คือเซ็ตใด ๆ ของจำนวนจริง ซึ่งอีลีเมนต์ของมันเรียงรายกันอยู่อย่างต่อเนื่อง เช่น เซ็ต $S = \{x \mid x \in R \wedge 2 \leq x < 6\}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนช่วง S นี้คือ $[2, 6)$

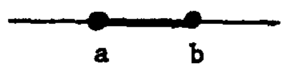
ในขณะเดียวกันจะสามารถแสดงเซ็ต $S = \{x \mid x \in R \wedge 2 \leq x < 6\}$ ได้ด้วยภาพบนเส้นจำนวน คือ

โดยจะเขียนวงกลมทึบ (●) ที่จุดซึ่งแทน 2 เพื่อแสดงว่า 2 เป็นอีลีเมนต์หนึ่งในเซ็ต S ($\because$ $2 \leq x$)ส่วนจุดซึ่งแทน 6 นั้นเราเขียนวงกลมโปร่ง (0) รอบจุดนั้น เพื่อแสดงว่า 6 ไม่เป็นอีลีเมนต์ของเซ็ต S ($\because$ $x < 6$) แล้วเขียน<u>เส้นทึบ</u>เชื่อมระหว่าง 2 กับ 6 เพื่อแสดงว่าตรงนั้นคือเซ็ต S

<u>หมายเหตุ</u> $S = \{x \mid x \in R \wedge 2 \leq x < 6\}$หมายความว่า S เป็นเซ็ตของจำนวนจริง x ซึ่ง x นั้นมากกว่าหรือเท่ากับ 2 แต่ต้องน้อยกว่า 6)

<u>การเขียนแสดงเซ็ตของจำนวนจริงด้วยภาพบนเส้นจำนวนและช่วงแบบต่าง ๆ</u>

เซ็ต	<u>เส้นจำนวน</u>	ช่วง
$S_1 = \{x \mid x \in R \wedge a < x < b\}$		(a,b) เรียกว่าช่วงเปิด
$S_2 = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x < b\}$		$[a,b)$ เรียกว่าช่วงครึ่งเปิดทางขวา

<u>เซ็ต</u>	<u>เส้นจำนวน</u>	<u>ช่วง</u>
$S_3 = \{x \mid x \in R \wedge a < x \leq b\}$		$(a,b]$ เรียกว่าช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย
$S_4 = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$		$[a,b]$ เรียกว่าช่วงปิด
$S_5 = \{x \mid x \in R \wedge x < b\}$		$(-\infty,b)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์
$S_6 = \{x \mid x \in R \wedge x \leq b\}$		$(-\infty,b]$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์
$S_7 = \{x \mid x \in R \wedge a < x\}$		$(a,+\infty)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์
$S_8 = \{x \mid x \in R \wedge a \leq x\}$		$[a,+\infty)$ เรียกว่าช่วงกึ่งอนันต์
$S_9 = \{x \mid x \in R\}$		$(-\infty,+\infty)$ เรียกว่าช่วงอนันต์

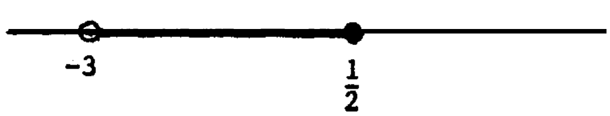
<u>ตัวอย่างที่ ๓.๖.๑</u> จงเขียนช่วงและภาพบนเส้นจำนวนแสดงแทน

$$S = \{x \mid x \in R \wedge -3 < x \leq \frac{1}{2}\}$$

จาก $S = \{x \mid x \in R \wedge -3 < x \leq \frac{1}{2}\}$

ช่วงของเซ็ต S คือ $(-3, \frac{1}{2}]$

เส้นจำนวนที่แทนเซ็ต S คือ



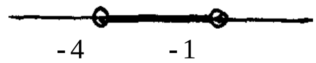
ตัวอย่างที่ 3.6.2 จงเขียนเซ็ตแทนช่วง $(-4,-1)$, $(-\infty,-3)$, $[2,+\infty)$

$(-4,-1)$ หมายถึง $\{x \mid x \in R \wedge -4 < x < -1\}$

$(-\infty,-3)$ หมายถึง $\{x \mid x \in R \wedge x < -3\}$

$[2,+\infty)$ หมายถึง $\{x \mid x \in R \wedge 2 \leq x\}$

ตัวอย่างที่ 3.6.3 จงเขียนภาพบนเส้นจำนวนแทนช่วง $(-4,-1)$, $(-\infty,-3)$ $[2,+\infty)$

ช่วง $(-4,-1)$ คือ 

ช่วง $(-\infty,-3)$ คือ -

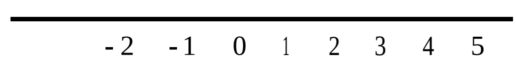
-3

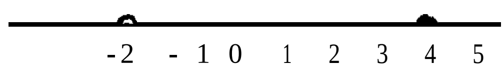
ช่วง $[2,+\infty)$ คือ 

ตัวอย่างที่ 3.6.4 ให้ $A = (1,3)$, $B = (-2,4]$, $C = [3,5)$, $D = [0,5]$

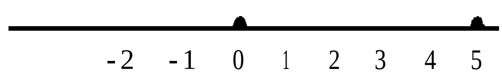
จงหา 1) $A \cup B$ 2) $B \cap D$ 3) $C-B$ 4) $A - D$ 5) $B \cap C$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$A = (1,3) = \{x \mid x \in R \wedge 1 < x < 3\}$ 

$B = (-2,4] = \{x \mid x \in R \wedge -2 < x \leq 4\}$ 

$C = [3,5) = \{x \mid x \in R \wedge 3 \leq x < 5\}$ 

$D = [0,5] = \{x \mid x \in R \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ 

ดังนั้น

1) $A \cup B = (1,3) \cup (-2,4] = (-2,4]$

2) $B \cap D = (-2,4] \cap [0,5] = [0,4]$

3) $C - B = [3,5) - (-2,4] = (4,5)$

4) $A - D = (1,3) - [0,5] = \Phi$

5) $B \cap C = (-2,4] \cap [3,5] = [3,4]$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 3.6

1) จงหาขอบเขตข้างบน, ขอบเขตข้างล่าง, ขอบเขตข้างบนต่ำสุด, ขอบเขตข้างล่างต่ำสุด ของเซ็ต S ต่อไปนี้

1.1) $S = \{x \mid x \in R \wedge -10 \leq x < -5\}$

1.2) $S = \{x \mid x \in R \wedge -2 \leq x \leq 6\}$

1.3) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in N\}$

1.4) $S = \{\frac{1}{n+5} \mid n \in N\}$

1.5) $S = \{\frac{n}{n+2} \mid n \in N\}$

2) จงเขียนภาพบนเส้นจำนวนและช่วงแทนเซ็ตต่อไปนี้

2.1) $\{x \mid x \in R \wedge 2 < x < 3\}$

2.2) $\{x \mid x \in R \wedge -1 < x \leq 4\}$

2.3) $\{x \mid x \in R \wedge 0 \leq x \leq 2\}$

2.4) $\{x \mid x \in R \wedge -3 \leq x < -1\}$

2.5) $\{x \mid x \in R \wedge x < 0\}$

2.6) $\{x \mid x \in R \wedge -2 \leq x\}$

2.7) $\{x \mid x \in R \wedge x \leq -5\}$

2.8) $\{x \mid x \in R \wedge 0 < x\}$

3) จงเขียนเซ็ตแสดงภาพบนเส้นจำนวนของช่วงต่อไปนี้

3.1) $(-1,0)$

3.2) $(-1, +\infty)$

3.3) $(-\infty, -5)$

3.4) $[2,5]$

3.5) $[-2,3)$

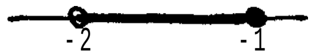
3.6) $[3, +\infty)$

3.7) $(-\infty,4]$

3.8) $(1,2]$

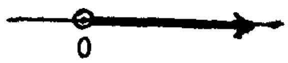
3.9) $(-\infty, +\infty)$

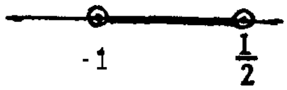
4) จงเขียนช่วงและเซ็ตของภาพบนเส้นจำนวนต่อไปนี้

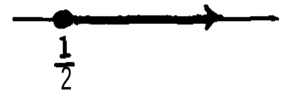
4.1) 

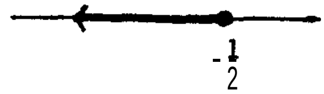
4.2) 

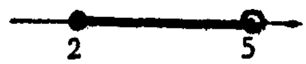
4.3) 

4.4) 

4.5) 

4.6) 

4.7) 

4.8) 

5) ให้ $A = (1,4)$, $B = [3,6]$ จงหา

5.1) $A \cup B$

5.2) $A \cap B$

5.3) $A - B$

5.4) $B - A$

5.5) $A \cup A$

5.6) $B \cap B$

6) จงหาช่วงต่อไปนี้

6.1) $(1,3) \cap [2,3]$

6.2) $(1,4) \cap (-2,2]$

6.3) $(0,3] \cap (-3,2)$

6.4) $[2,4] \cap (1,3]$

6.5) $(1,5) \cap [6,9)$

6.6) $[1,4] \cup (2,5]$

6.7) $[2,3) \cup (4,5]$

6.8) $(1,6] \cup [2,5)$

6.9) $(1,3) - [2,5]$

6.10) $[2,5] - (1,3)$

7) ค่ารากที่สองของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 10 มีจำนวนที่เป็นจำนวนอศักยะกี่จำนวน อะไรบ้าง ?

3.7 ทศนิยม

ต่อไปเราจะศึกษาเรื่องทศนิยม เพื่อนำไปประกอบการพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะ จำนวนใดเป็นจำนวนอตรรกยะ โดยทั่ว ๆ ไปจะแบ่งทศนิยมออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. **ทศนิยมรู้จบ** ได้แก่ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนที่สิ้นสุด เช่น 0.1 , 0.132 , 1.25 เป็นต้น

๒. **ทศนิยมไม่รู้จบ** ได้แก่ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนที่ไม่สิ้นสุด ซึ่งแบ่งได้ 2 พวก คือ

2.1) **ทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ** ได้แก่ทศนิยมที่ตัวเลขตัวหนึ่งหรือมากกว่านั้นเกิดซ้ำหรือวนเวียนอยู่เสมอ เช่น 0.333. ..., 0.232323.. . , 1.125311253112531... (อนึ่ง บางทีก็จัดเอาพวกทศนิยมรู้จบไว้เป็นพวกเดียวกันกับทศนิยมไม่รู้จบแบบ เวียนซ้ำ ทศนิยมรู้จบก็คือ ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ โดยตัวซ้ำคือ "0" นั่นเอง เช่น 1 . 2 5 อาจเขียนเป็น 1.25000... ก็ได้),

2.2) **ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ** ได้แก่ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมมากมายไม่สิ้นสุด โดยไม่มีการซ้ำแบบวนเวียนตลอดไป เช่น 0.1010010001.. . 1.732051... เป็นต้น

เนื่องจากจำนวนตรรกยะในรูป $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ จะสามารถทำเป็นทศนิยมได้โดยการตั้งหาร (คือเอาส่วนไปหารเศษ) และจำนวนตรรกยะกับทศนิยมเกี่ยวข้องกันคือ "จำนวนตรรกยะสามารถเขียนเป็นทศนิยมได้โดยจะเป็นทศนิยมประเภทรู้จบหรือประเภทไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น" เช่น $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{3} = 0.333.....$ เป็นต้น ซึ่งทั้ง $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{3}$ ต่างก็เป็นจำนวนตรรกยะโดย $\frac{1}{2}$ เขียนเป็นทศนิยมได้เป็นทศนิยมรู้จบและ $\frac{1}{3}$ ก็เขียนเป็นทศนิยมได้โดยเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ

ดังนั้น "จำนวนอตรรกยะ ถ้าเขียนเป็นทศนิยมแล้วจะต้องเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ" ฉะนั้นถ้าต้องการพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะก็อาจพิจารณาได้โดยเขียนแสดงจำนวนนั้นเป็นทศนิยมแล้วพิจารณาว่าเป็นทศนิยมแบบใด <u>ถ้าเป็นทศนิยมรู้จบหรือไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำก็แสดงว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนตรรกยะ</u> ถ้าได้ <u>เป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำก็กล่าวได้ว่าจำนวนนั้นก็คือจำนวนอตรรกยะ</u> นั่นเอง

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 3.7

1. จงเขียนจำนวนตรรกยะต่อไปนี้ด้วยทศนิยม

1.1) $\frac{1}{25}$

1.2) $\frac{4}{2}$

1.3) $\frac{22}{15}$

1.4) $\frac{3}{48}$

1.5) $\frac{26}{111}$

1.6) $\frac{22}{7}$

2. จงพิจารณาว่าทศนิยมต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

2.1) 0.01010101...

2.2) 0.112112112...

2.3) 0

2.4) 0.191919...

, 2.5) 0.1001000100001...

2.6) 0.12112111211112...

2.7) 7.767766777666...

2.8) 3.25

2.9) -4.2000...

2.10) 1.0000001