บทที่ 2

ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

2.1 คู่ลำดับ (Ordered pairs)

สำหรับอีลีเมนต์ x และ y ใด ๆ เราเรียก (x, y)ว่า "คู่ลำดับของ x กับ y" มักอ่านว่า "คู่ลำดับ (x,y)" สิ่งสำคัญของคู่ลำดับก็คือ จะต้องเป็น "คู่" และมี "ลำดับ" นั่นคือ คู่ลำดับแต่ละคู่ ย่อมประกอบด้วยอีลีเมนต์สองตัว (คือเป็นคู่) ได้แก่ตัวหน้ากับตัวหลัง ตัวหน้าคือ x เราเรียก x ว่า อีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง และตัวหลังคือ y เราเรียก y ว่า อีลีเมนต์ตัวที่สอง ของคู่ลำดับ (x, y)ในการเป็นอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง (ตัวหน้า) กับอีลีเมนต์ตัวที่สอง (ตัวหลัง) คือ "ลำดับ" นั้นมีความสำคัญมาก การสลับกันระหว่างอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งและตัวที่สอง จะทำให้ความหมายเปลี่ยนไปจากเดิม เช่น ถ้าเราจับ "คู่" กันระหว่างสามี กับภรรยาแล้ว เขียนเป็น สัญลักษณ์คู่ลำดับได้คือ (ทึ่ม, สะดิ้ง) เราจะถือว่า อีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง (ตัวหน้า) เป็นสามี และอีลีเมนต์ตัวที่สอง (ตัวหลัง) เป็นภรรยา นั่นคือเราจะได้ว่า "นายทึ่มเป็นสามี นางสะดิ้งเป็นภรรยา" แต่ถ้าเราสลับที่เป็น (สะดิ้ง, ทึ่ม) จะได้ความหมายที่ผิดไปจากเดิม คือกลายเป็น "นางสะดิ้งเป็นสามี นายทึ่มเป็นภรรยา" ดังนั้นจึงถือว่า "ลำดับ" ของอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งกับตัวที่สองมีความสำคัญมาก

ข้อสังเกต 1) ถ้า $a \neq b$ แล้ว $(a,b) \neq (b,a)$

2) สำหรับคู่ลำดับ (a,b) กับ (c,d) ใด ๆ ถ้า $(a,b) = (c,d)$ แล้วย่อมได้ว่า $a = c$ และ $b = d$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 2.1

1) จงอธิบายถึงความแตกต่างระหว่าง $(1,2)$, $\{1,2\}$ และ $\{(1,2)\}$

2) จงหาค่าของ x และ y ถ้า $(2x,y + 3) = (4,2)$

3) จงหาค่าของ x และ y ถ้า $(2x - y, 3x + y) = (10,5)$

2.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

สำหรับ A,B เป็นเซ็ตสองเซ็ตใด ๆ "ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต A กับเซ็ต B คือเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y)ทั้งหมด โดยที่ x เป็นสมาชิกของเซ็ต A และ y เป็นสมาชิกของเซ็ต B" เราเขียนแทนผลคูณคาร์ทีเซียนของ A กับ B ด้วย "A × B" (อ่านว่า A คูณ B หรือ A cross B) ซึ่งเขียนสั้น ๆ ได้เป็น

$$A \times B = \{ \forall(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

นั่นคือ ถ้า $(x,y) \in A \times B$ หมายถึง $x \in A$ และ $y \in B$ นั่นเอง

<u>**ตัวอย่างที่ 2.2.1**</u> ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

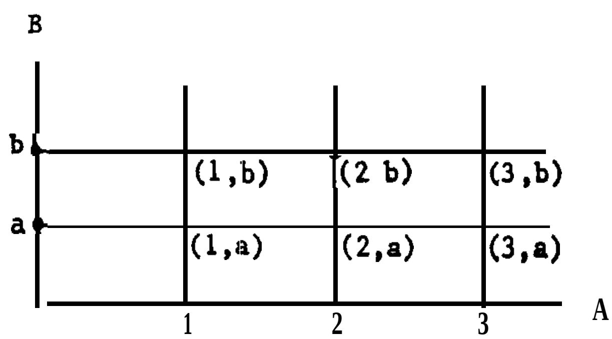
$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$B \times B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

$$(A \cup B) \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

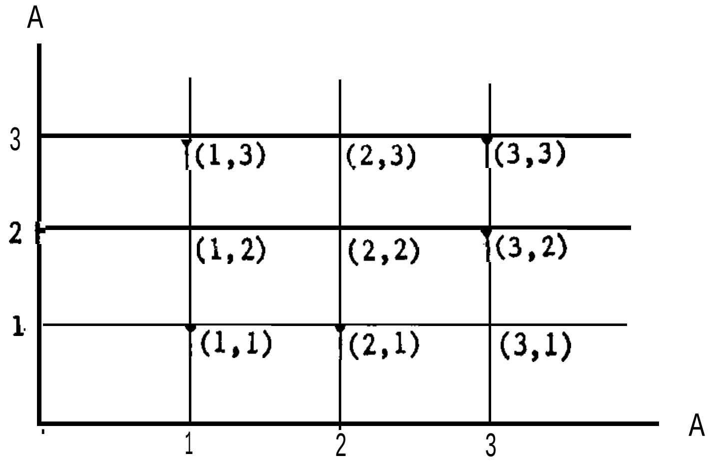
เนื่องจากเซ็ตของผลคูณคาร์ทีเซียนบางเซ็ตอาจมีจำนวนอีลีเมนต์มาก ๆ ก็จะมีวิธีเขียนอีลีเมนต์ให้เป็นระเบียบได้หลายวิธี วิธีหนึ่งซึ่งเราอาจกระทำได้ก็คือเรียงอีลีเมนต์ของเซ็ต ที่จะเป็นอีลีเมนต์ตัวแรกของคู่ลำดับ เป็นแถว (นอน) และเรียงอีลีเมนต์ของเซ็ตที่จะเป็นอีลีเมนต์ที่สองของคู่ลำดับ เป็นคอลัมน์(ตั้ง) เช่น จากตัวอย่าง ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ เราอาจเขียนแผนภาพแสดงได้เป็น



(แผนภาพ $A \times B$)

นั่นคือ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

หรือ $A \times A$ ก็เขียนแผนภาพได้เป็น



(แผนภาพ A × A)

นั่นคือ $A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

อนึ่ง เมื่อเซ็ต A และเซ็ต B ต่างก็มีอีลีเมนต์จำนวนมาก ๆ ถ้าเราใช้แผนภาพแบบนี้แสดง เราอาจไม่ต้องเขียนคู่ลำดับทั้งหมดก็ได้

<u>หมายเหตุ</u> . ถ้าเซ็ต A และเซ็ต B เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์จำนวนจำกัดแล้ว อีลีเมนต์ของ $A \times B$ จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนอีลีเมนต์ของ A คูณด้วยจำนวนอีลีเมนต์ของ B เช่นจากตัวอย่างที่ 2.2.1 จำนวนอีลีเมนต์ของเซ็ต A เป็น 3 และจำนวนอีลีเมนต์ของเซ็ต B เป็น 2 ดังนั้นจำนวนอีลีเมนต์ของ $A \times B = 3 \times 2 = 6$ อีลีเมนต์, จำนวนอีลีเมนต์ของ $B \times A = 2 \times 3 = 6$ อีลีเมนต์, จำนวนอีลีเมนต์ของ $A \times A = 3 \times 3 = 9$ อีลีเมนต์ และจำนวนอีลีเมนต์ของ $B \times B = 2 \times 2 = 4$ อีลีเมนต์, จำนวนอีลีเมนต์ของ $(A \cup B) \times B = 5 \times 2 = 10$ อีลีเมนต์

2. เซ็ต $A \times B \neq B \times A$ (จากตัวอย่างที่ 2.2.1 จะเห็นว่า $(1,a) \in A \times B$ แต่ $(1,a) \notin B \times A$)

3. ถ้า A เป็นเซ็ตใด ๆ, $A \times \Phi = \Phi$ (เซ็ตเปล่า) และ $\Phi \times A = \Phi$

4. $\Phi \times \Phi = \Phi$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 2.2

1. ให้ $A = \{a, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 5\}$ จงหา

1.1) $A \times B$	1.16) $(A \cap B) \times C$
1.2) $B \times A$	1.17) $(B \times B) \cap (C \times C)$
1.3) $A \times C$	1.18) $(A \times A) \cup (C \times C)$
1.4) $C \times A$	1.19) $(A \times C) \cap (B \times B)$
1.5) $B \times C$	1.20) $(A \times A) \times A$
1.6) $C \times B$	1.21) $(A \times B) \times C$
1.7) $A \times A$	1.22) $A \times (B \times C)$
1.8) $B \times B$	1.23) $(A - B) \times C$
1.9) $C \times C$	1.24) $(A - B) \times (B - C)$
1.10) $A \times (B \cap C)$	1.25) $(A - A) \times B$
1.11) $(A \times B) \cap (A \times C)$	1.26) $(A \cap C) \times (B \cup C)$
1.12) $A \times (B \cup C)$	1.27) $(A \times A) \times B$
1.13) $(A \times B) \cup (A \times C)$	1.28) $(C - B) \times (A \cap B)$
1.14) $C \times (A \cup B)$	1.29) $(A \cap B) \times (A \cap C)$
1.15) $(A \cup B) \times C$	1.30) $(A - B) \times (B - A)$

2. ถ้า A เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ 4 ตัว และ B เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ 6 ตัว จงหาจำนวนอีลีเมนต์ของ

2.1) $A \times A$	2.3) $B \times A$
2.2) $A \times B$	2.4) $B \times B$

2.3 __ความสัมพันธ์จากเซ็ต A ไปยังเซ็ต B__ ได้แก่สับเซ็ตของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ นั่นคือ R จะเรียกว่าเป็นสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เมื่อ $R \subseteq A \times B$ ดังนั้นจะเห็นว่า ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ นั่นเอง

สำหรับความสัมพันธ์ R ใด ๆ จาก A ไปยัง B ถ้า $(a,b) \in R$ เราจะกล่าวว่า "a มีความสัมพันธ์ R กับ b" ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "aRb" นั่นคือ aRb จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ มี $(a,b) \in R$

ถ้า A เป็นเซ็ตที่มีจำนวนอีลีเมนต์ m อีลีเมนต์ และ B เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์จำนวน n อีลีเมนต์แล้ว จำนวนอีลีเมนต์ของ $A \times B$ จะมี $m \times n$ อีลีเมนต์

ดังนั้นจำนวนเซ็ต R ที่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B (หรือ B ไปยัง A) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจึงเท่ากับ 2^{mn} (โดยเราถือว่า Φ เป็นความสัมพันธ์หนึ่งด้วยเรียกว่าความสัมพันธ์ว่าง เปล่า (empty relation))

ตัวอย่างที่ 2.3.1 จาก $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$

ซึ่งเราได้ว่า $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$ มีจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด 4 อีลีเมนต์ ดังนั้น R ที่เป็นสับ เซ็ตของ $A \times B (R \subseteq A \times B)$ จะมีทั้งหมด $2^4 = 16$ เซ็ตของความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ได้แก่

$R_1 = \Phi$	$R_9 = \{(1,b),(2,a)\}$
$R_2 = \{(1,a)\}$	$R_{10} = \{(1,b),(2,b)\}$
$R_3 = \{(1,b)\}$	$R_{11} = \{(2,a),(2,b)\}$
$R_4 = \{(2,a)\}$	$R_{12} = \{(1,a),(1,b),(2,a)\}$
$R_5 = \{(2,b)\}$	$R_{13} = \{(1,a),(1,b),(2,b)\}$
$R_6 = \{(1,a),(1,b)\}$	$R_{14} = \{(1,a),(2,a),(2,b)\}$
$R_7 = \{(1,a),(2,a)\}$	$R_{15} = \{(1,b),(2,a),(2,b)\}$
$R_8 = \{(1,a),(2,b)\}$	$R_{16} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ให้ $R = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ จะกล่าวได้ว่า

1Ra เป็นจริง $\because (1,a) \in R$

1Rb เป็นจริง $\because (1,b) \in R$

bR1 เป็นเท็จ $\because (b,1) \notin R$

3Ra เป็นจริง $\because (3,a) \in R$

aR3 เป็นเท็จ $\because (a,3) \notin R$

aRa เป็นเท็จ $\because (a,a) \notin R$

3R3 เป็นเท็จ $\because (3,3) \notin R$

$\Phi R \Phi$ เป็นเท็จ $\because (\Phi,\Phi) \notin R$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 ถ้า $A = \{2, 3\}$ และ $B = \{4, 6, 9\}$

1) ให้ R_1 คือความสัมพันธ์ "เป็นรากที่สอง" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_1 = \{(2,4),(3,9)\}$ คือ 2 เป็นรากที่สองของ 4 และ 3 เป็นรากที่สองของ 9

2) ให้ R_2 คือความสัมพันธ์ "หารไม่ลงตัว" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_2 = \{(2,9),(3,4)\}$ คือ 2 หาร 9 ไม่ลงตัว และ 3 หาร 4 ไม่ลงตัว

3) ให้ R_3 คือความสัมพันธ์ "หารลงตัว" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_3 = \{(2,4),(2,6),(3,6),(3,9)\}$ คือ 2 หาร 9 ลงตัว ฯลฯ

4) ให้ R_4 คือความสัมพันธ์ "มากกว่า" จาก A ไปยัง B จะได้

$R_4 = \Phi$ คือไม่มีอีลีเมนต์ใดใน A ที่มากกว่าอีลีเมนต์ใน B เลย

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซ็ต ดังนั้นเราอาจเขียนแทนความสัมพันธ์ด้วยการแจกแจงอีลีเมนต์(ดังตัวอย่างที่ 2.3.3) หรือด้วยการบอกเงื่อนไข ของสมาชิกก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.3.4 ถ้า $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 6, 9\}$

ให้ $R_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B$ และ $y = x^2\}$

หรืออาจเขียนใหม่เป็น $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

ถ้าเราแจงอีลีเมนต์จะได้ $R_1 = \{(2,4),(3,9)\}$

ให้ $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 3x\}$

ถ้าเขียนโดยการแจงอีลีเมนต์จะได้ $R_2 = \{(2, 6),(3, 9)\}$

<u>โดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์</u>

ให้ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

โดเมน (domain) ของ R คือเซ็ตของบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับ (x,y) ใน R

(คือเซ็ตของบรรดาค่า x ทั้งหลาย)

พิสัย (range) ของ R คือเซ็ตของบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่สองของคู่ลำดับ (x,y) ใน R

(คือเซ็ตของบรรดาค่า y ทั้งหลาย)

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ถ้า $R_1 = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

โดเมนของ $R = \{2, 3, 4\}$ คือเซ็ตของอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับทั้งหมดใน R

พิสัยของ $R = \{1, 2, 3\}$ คือเซ็ตของอีลีเมนต์ตัวที่สองของคู่ลำดับทั้งหมดใน R

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 2.3

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

$G_1 = \{(1,2),(3,4)\}$ $\quad$ $G_4 = \{(2,1),(3,1),(4,1)\}$

$G_2 = \{(2,2),(3,3)\}$ $\quad$ $G_5 = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

$G_3 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$ $\quad$ $G_6 = \{(4,1),(4,3)\}$

$G_7 = \{(3,3),(4,3),(4,4)\}$ $G_8 = \{(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$G_9 = \{(4,2),(3,3),(2,4)\}$ $G_{10} = \{\ \} = \Phi$

จงพิจารณา G ที่กำหนดให้ว่า

1.1) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

1.2) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

1.3) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

1.4) G ใดบ้าง เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

2. ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$

$R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (c, c)\}$

และ $G = \{(b, b), (c, c), (b, a), (b, c)\}$

จงพิจารณาดูข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดเป็นจริง ข้อความใดเป็นเท็จ

2.1) aRb

2.2) aGb

2.3) bGa

2.4) bRa

2.5) cRc

2.6) cGc

2.7) bRb

2.8) bRd

2.9) dRa

2.10) dGa

2.11) bGc

12.12) cGb

2 .13) R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

2.14) R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

2.15) R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

2.16) R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

12.17) G เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

2.18) G เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A

2.19) G เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A

2.20) G เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง B

3. จากโจทย์ข้อ 2 จงหา

3.1) โดเมนของ R 3.3) โดเมนของ G

3.2) พิสัย (range) ของ R 3.4) พิสัยของ G

2.4 ฟังก์ชัน (Function) เราอาจให้นิยามของฟังก์ชันได้หลายแบบดังนี้

นิยามที่ 1 ให้ A และ B เป็นเซ็ตใด ๆ เราจะกล่าวว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เมื่อ F เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B โดยถ้า $(x,y_1) \in F$ และ $(x,y_2) \in F$ แล้ว $y_1 = y_2$

นิยามที่ 2 ให้ A และ B เป็นเซ็ตใดๆเราจะกล่าวว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า F เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) โดย $x \in A$, $y \in B$ และแต่ละ $x \in A$ จะมีค่า $y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in F$ ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวเท่านั้น

นิยามที่ 3 ให้ A,B เป็นเซ็ตใด ๆ เราจะกล่าวว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า F เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) ซึ่งแต่ละอีลีเมนต์ x ที่อยู่ใน A กำหนดค่าที่แน่นอนของ y ที่อยู่ใน B ได้อย่างมากหนึ่งค่า

นิยามที่ 4 ให้ A,B เป็นเซ็ตใด ๆ เราจะกล่าวว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า F เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) ถ้าคู่ลำดับสองคู่ใด ๆ มีอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง (ตัวหน้า) เป็นตัวเดียวกันแล้ว อีลีเมนต์ตัวที่สอง (ตัวหลัง) จะต้องไม่ต่างกัน(คือต้องเหมือนกัน)

นั่นคือจากนิยามทั้งสี่เราอาจกล่าวสรุปได้ว่า ถ้า F เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) ซึ่ง $x \in A$, $y \in B$ แล้วจะได้ว่า ~~F เป็นฟังก์ชัน~~จาก A ไปยัง B เมื่ออีลีเมนต์ x แต่ละตัวในเซ็ต A จับคู่กับ อีลีเมนต์ y ที่อยู่ในเซ็ต B ได้อย่างมากเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น (อาจไม่จับคู่กันเลยก็ได้จึงได้ว่าเซ็ตเปล่า (Φ) ก็เป็นฟังก์ชันด้วย เพราะมีคุณสมบัติที่ไม่ขัดกับนิยามแต่อย่างใดเรียกว่าฟังก์ชันเปล่า (empty function)) หรือฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ก็คือความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ที่ไม่มีสองคู่ลำดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน (นอกเสียจากเป็นคู่ลำดับเดียวกัน) ดังนั้นอาจจะมีอีลีเมนต์ x หลาย ๆ ตัวจับคู่กับ y ตัวเดียวก็ได้และ F ~~จะไม่เป็นฟังก์ชัน~~ เมื่ออีลีเมนต์ x ตัวเดียวกัน แต่จับคู่กับอีลีเมนต์ y มากกว่าหนึ่งตัว (อาจเป็นสอง,สาม,สี่,...)

หมายเหตุ

วิธีพิจารณาว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

เราอาจแบ่งการพิจารณาเป็น 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ต้องแสดงก่อนว่า แต่ละคู่ลำดับนั้น บรรดาอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับต้องอยู่ในเซ็ต A และอีลีเมนต์ที่สองของคู่ลำดับต้องอยู่ในเซ็ต B นั่นคือแสดงว่า F มีความสัมพันธ์ จาก A ไปยัง B

ขั้นที่ 2 แล้วแสดงว่า สำหรับแต่ละค่าของอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง จะจับคู่กับอีลีเมนต์ตัวที่สองได้ อย่างมากเพียงหนึ่งค่า หรือแสดงได้ว่า สำหรับคู่ลำดับใด ๆ ถ้าอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งเหมือนกัน แล้วอีลีเมนต์ตัวที่สองต้องเหมือนกันด้วยดังนั้น ถ้าอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งไม่ซ้ำกันเลย ขั้นที่ 2 นี้ ก็เป็นจริง

เมื่อเราแสดงได้ว่า F เป็นจริง ทั้ง 2 ขั้นจึงจะสรุปได้ว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.4.1 ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

จงพิจารณาว่า F ใด เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1) $F_1 = \{(1,2),(2,3),(3,5)\}$

2) $F_2 = \{(1,4),(2,4),(3,3)\}$

3) $F_3 = \{(2,3),(2,4),(1,5),(3,2)\}$

4) $F_4 = \{(2,4),(3,2),(4,3)\}$

5) $F_5 = \{(1,3),(2,5),(3,6)\}$

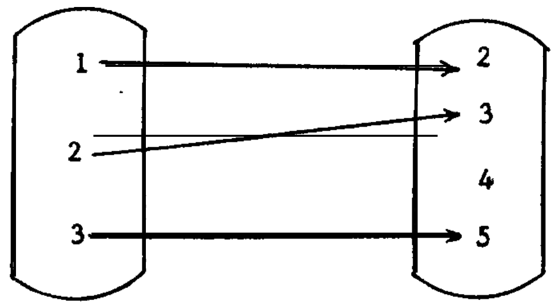
แนวการพิจารณา

1) $F_1 = \{(1,2),(2,3),(3,5)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะ

1. เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่ง (คือ 1,2,3)อยู่ในเซ็ต A และอีลีเมนต์ตัวที่สอง(คือ (คือ 2,3,5)อยู่ในเซ็ต B

2. และอีลีเมนต์แต่ละตัวที่อยู่ใน A ก็จับคู่กับอีลีเมนต์ที่อยู่ใน B เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 1

จับคู่กับ 2,2 จับคู่กับ 3,3 จับคู่กับ 5 อาจเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่กันได้ดังรูป 2.4.1

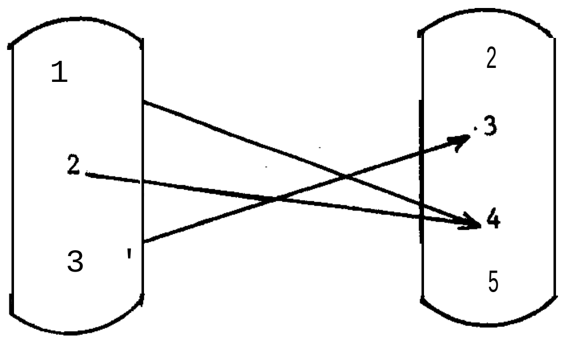


รูป 2.4.1

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า F_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

2) $F_2 = \{(1,4),(2,4),(3,3)\}$

อาจเขียนแผนภาพได้ดังรูป 2.4.2



รูป 2.4.2

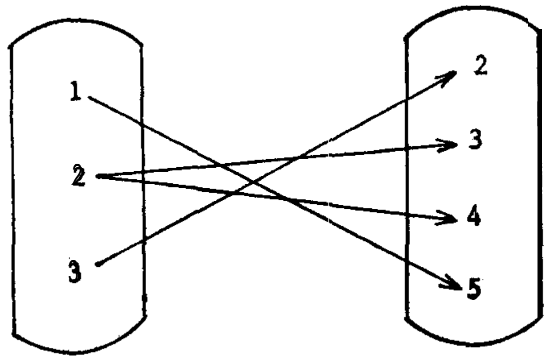
จะเห็นว่า F_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะเป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งอยู่ในเซ็ต A และอีลีเมนต์ตัวที่สอง (คือ 3,4) อยู่ในเซ็ต B โดยแต่ละอีลีเมนต์ที่อยู่ใน A จับคู่กับอีลีเมนต์ที่อยู่ใน B เพียงค่าเดียวคือ 1 จับคู่กับ 4 เพียงตัวเดียว , 2 ก็จับคู่กับ 4 เพียงตัวเดียว , และ 3

จับคู่กับ 3 เพียงตัวเดียว หรือไม่มีคู่ลำดับใด ที่มีอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งซ้ำกันเลย

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

3) $F_3 = \{(1,5),(2,4),(2,3),(3,2)\}$

เขียนแผนภาพได้ ดังรูป 2.4.3



รูป 2.4.3

จะเห็นว่า F_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะถึงแม้อีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งจะอยู่ในเซ็ต A (คือ 1,2,3) และอีลีเมนต์ตัวที่สองจะอยู่ใน B(คือ 2,3,4,5) ก็ตาม แต่เราพบว่ามีอีลีเมนต์ที่อยู่ใน A จับคู่กับอีลีเมนต์ใน B <u>มากกว่าหนึ่งค่า</u> (หรือมีคู่ลำดับที่มีอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งเหมือนกัน จับคู่กับอีลีเมนต์ตัวที่สองที่ต่างกัน) ตัวอย่างของคู่ลำดับนี้ได้แก่ (2,3) กับ (2,4) นั่นคือ 2 จับคู่กับ 3 และ 2 ตัวเดียวกันนี้ ยังจับคู่กับ 4 อีกด้วย จึงได้ว่า อีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งตัวเดียวกัน แต่จับคู่กับอีลีเมนต์ตัวที่สอง มากกว่า 1 ค่า

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_3 <u>ไม่</u>เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

4) $F_4 = \{(2,4),(3,2),(4,3)\}$

จะเห็นว่า F_4 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะว่าบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งคือ 2,3,4 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต A ทั้งหมด (คือ 4 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต A)

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า F_4 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

5) $F_5 = \{(1,3),(2,5),(3,6)\}$

จะเห็นว่า F_5 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เพราะว่าบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่สองคือ 3,5,6 ไม่ได้อยู่ในเซ็ต B ทั้งหมด ($6 \notin B$) แม้ว่าอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งจะอยู่ในเซ็ต A ทั้งหมดก็ตาม

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F_5 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.4.2 ให้ A และ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก (คือ $A = \{1,2,3,---\}$ และ $B = \{1,2,3,---\}$) 'F ประกอบด้วย (x,y) ซึ่ง $x \in A$, $y \in B$ จงพิจารณาว่า F คือ $y = 10 - 3x$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่?

กล่าวคือ เราจะแทนค่า x ด้วยเลขจำนวนเต็มบวก (คือ $x \in A$) แล้วหาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก (คือ $y \in B$) ที่สอดคล้องออกมา

จาก $y = 10 - 5x$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = 10 - 3(1) = 7$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 10 - 3(2) = 4$

เมื่อ $x - 3$ จะได้ $y = 10 - 3(3) = 1$

เมื่อ $x - 4$ จะได้ $y = 10 - 3(4) = -2$

เมื่อ $x = 5$ จะได้ $y = 10 - 3(5) = -5$

ฯลฯ

จะเห็นว่าเฉพาะ x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ($x \in A$) ที่ $x = 1,2,3$ เท่านั้นที่ให้ค่า y เป็นจำนวนเต็มบวก ($y \in B$) ออกมา ค่า x นอกจากนั้น

คือ 4, 5, 6, --- ไม่ให้ค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เราจึงไม่นำมาพิจารณา

ดังนั้นเราจะได้ค่าที่สอดคล้องกับโจทย์คือ $x = 1$, $y = 7$, $x = 2$ $y = 4$, $x = 3$, $y = 1$

นั่นคือ เซ็ต F ที่เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (x,y) ซึ่ง $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$ โดย F คือ $y = 10 - 3x$ เป็น

$$F = \{(1,7),(2,4),(3,1)\}$$

จาก F จะเห็นว่า แต่ละ $x \varepsilon A$ คือ $x = 1,2$ หรือ 3 เราหาค่า $y \varepsilon B$ ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวเท่านั้น คือ 1 คู่กับ 7 ค่าเดียว, 2 จับคู่กับ 4 ค่าเดียวและ 3 จับคู่กับ 1 ค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า F เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

ตัวอย่างที่ 2.4.3 ให้ A เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวกและ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย F ประกอบด้วยคู่ลำดับ (x,y) ซึ่ง $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$ และ F คือ $x + y^2 = 5$ จงพิจารณาว่า F เป็นฟังก์ชันหรือไม่?

กล่าวคือเราจะแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มบวกแล้วหาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหลายที่สอดคล้องออกมา

จาก $x + y^2 = 5$

$\therefore \; y^2 = 5 - x$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y^2 = 5 - 1 = 4$

$\therefore \; y = \pm 2$

$x = 4$ จะได้ $y^2 = 5 - 4 = 1$

$\therefore \; y = \pm 1$

หมายเหตุ เราจะพบว่าสำหรับ $x \in A$ ที่ $x = 1,4$ เท่านั้นที่ให้ค่า $y \in B$ ออกมาแต่ถ้า x ไม่ใช่ค่าใดค่าหนึ่งในบรรดา 1,4 แล้วเราหาค่า $y \in B$ ไม่ได้ ดังนั้น เราได้เซ็ต F ซึ่งเป็นเซ็ตของคู่ลำดับ(x,y) ที่สอดคล้องกับโจทย์ เป็น

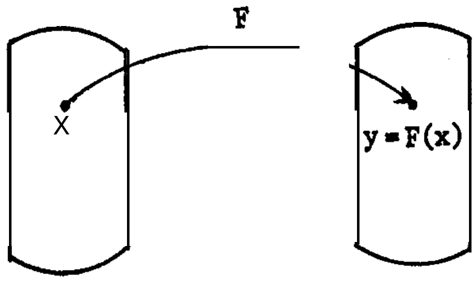
$$F = \{(1,2),(1,-2),(4,1),(4,-1)\}$$

จะเห็นว่ามีบางค่าของ x เช่น $x = 1$ เราอาจหาค่า y ได้มากกว่าหนึ่งค่าคือได้ $y = 2$ และ -2

ดังนั้น F ตามโจทย์นี้จึงไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

อนึ่งสำหรับฟังก์ชัน F ใด ๆ ถ้า $(x,y) \in F$ เรากล่าวว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน F ที่ x และจะเขียนแทน y ด้วย "F(x)" (อ่านว่า F of x) คือ เขียนได้ว่า $y = F(x)$

เขียนแผนภาพแสดงได้ดังรูป 2.4.4



รูป 2.4.4

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 2.4.2

$$Y = F(x) = 10 - 3x$$

เราได้ $F(1) = 7$ (อ่านว่า"ค่าของ F ที่ 1 เท่ากับ 7 " คือ $x = 1$ ได้ $F(x) = 7$)

$F(2) = 4$

$F(3) = 1$

ส่วนที่ x อื่น ๆ นอกจาก 1, 2, 3, นั้น F ไม่มีค่า

<u>โดเมนของ F</u> (Domain of F) ได้แก่เซ็ตของบรรดาค่า x ทั้งหลายที่มีค่า F(X) หรือเซ็ตของบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับใน F

<u>พิสัยของ F</u> ได้แก่เซ็ตของบรรดาค่า y หรือค่า F(x) ทั้งหลายหรือเซ็ตของบรรดาอีลีเมนต์ตัวที่สองของคู่ลำดับใน F

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.4</u> จากตัวอย่างที่ 2.4.2 ซึ่งมี $F = \{(1,7),(2,4),(3,1)\}$ เราได้ว่า

โดเมนของ $F = \{1, 2, 3\}$

พิสัยของ $F = \{7, 4, 1\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.5</u> ถ้า $R = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,b)\}$ จงหาโดเมน และพิสัยของ R

จะได้ว่า โดเมน ของ $R = \{1, 2\}$

พิสัยของ $R = \{a, b, c\}$

<u>แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 2.4</u>

1. กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

ให้ $F_1 = \{(1,2),(2,4),(3,2)\}$ $\quad F_2 = \{(1,3),(2,4),(3.2)\}$

$F_3 = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ $\quad F_4 = \{(1,2),(3,3),(2,3)\}$

$F_5 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad F_6 = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$

$F_7 = \{(3,3),(2,2),(4,1)\}$ $\quad F_8 = \{(2,3),(3,2),(4,2)\}$

$F_9 = \{(3,2),(1,1),(4,3)\}$ $\quad F_{10} = \{(1,2),(3,2),(1,4)\}$

$F_{11} = \{(2,2),(3,2),(4,3),(2,1)\}$ $\quad F_{12} = \{(4,2),(3,2),(2,2)\}$

$F_{13} = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$ $\quad$ $F_{14} = \{(4,1),(3,1),(2,1)\}$

$F_{15} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ $\quad$ $F_{16} = \{\ \} = \phi$

จงพิจารณา F ทั้งหลายที่กำหนดให้ว่ามี F ใด บ้างที่

1.1) เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1.2) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

1.3) เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง A

1.4) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง B

1.5) เป็นฟังก์ชันทุกข้อจาก1.1) ถึง 1.4)

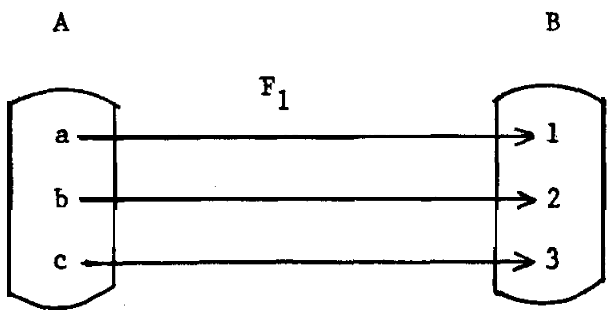
1.6) ไม่เป็นฟังก์ชันทุกข้อจาก1.1) ถึง 1.4)

1.7) เป็นทั้งฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ A ไปยัง A

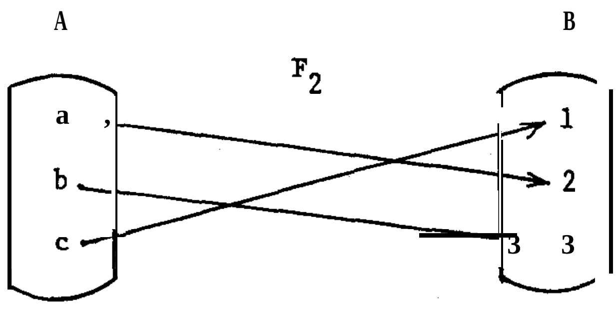
1.8) เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A และ B ไปยัง B

2. จงพิจารณาว่าแผนภาพของ F ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

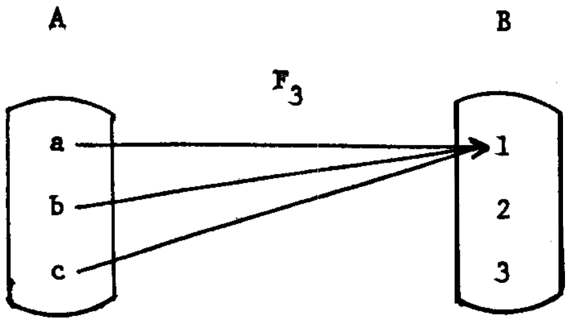
2.1)



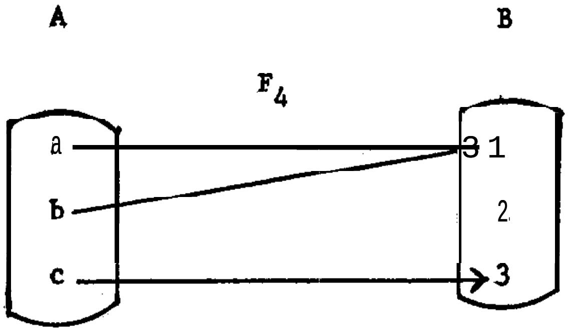
2.2)



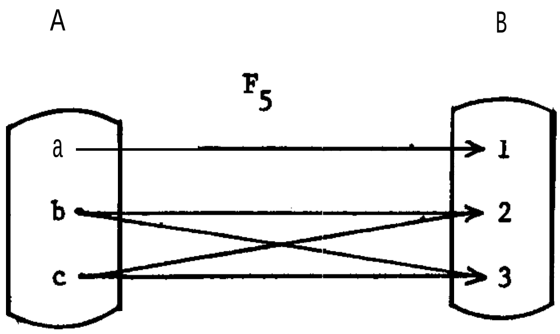
2,3)



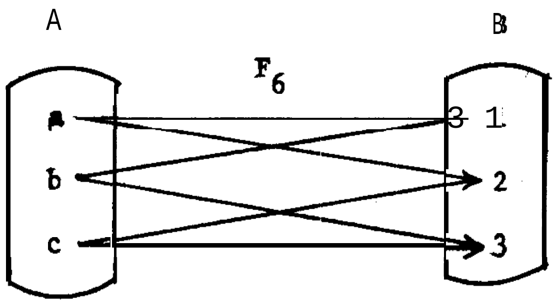
2,4)



2,5)



2,6)



3. จากโจทย์ข้อ 1 จงหาโดเมนและพิสัยของบรรดา F ทั้งหลายจาก F_1 ถึง F_{16}

4. จากโจทย์ข้อ 2 จงหาพิสัยของ F1 ถึง F_5

5. ถ้า $F(x) = x^2 - 3x + 4$ จงหาค่าของ $F(0)$, $F(1)$, $F(-2)$, $F(a)$, $F(a + h)$

6. ถ้า $f(x) = x^2 - 3$ และโดเมนของ f คือ $\{-3, -2, -1, 0\ 1, 2)$ จงหาพิสัยของ f

7. ถ้า $h(x) = x - 2$ และพิสัยของ คือ $\{-4, -2, 0\ ,\ 2\}$ จงหาโดเมนของ h

8. ให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ จงพิจารณาว่า F ใด ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

   8.1) $F_1 = \{(x,y) \mid y = 1\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.2) $F_2 = \{(x,y)\ I\ x > y\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.3) $F_3 = \{(x,y) \mid y\text{-}x\text{-}11$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   8.4) $F_4 = \{(x,y) \mid y^2 = 2x\}$ โดยที่ $x \in A, Y \in B$

   8.5) $F_5 = \{(x,y) \mid y^2 = 0\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

9. ให้ A เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก, B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มทั้งหลาย จงพิจารณาว่า F ใด บ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

   9.1) $F_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.2) $F_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.3) $F_3 = \{(x,y) \mid xy^2 = 4\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

   9.4) $F_4 = \{(x,y) \mid 10x^2y = 0\}$ โดยที่ $x \in A, y \in B$

10. จากโจทย์ข้อ 9 จงหาโดเมนและพิสัยของ F_1 ถึง F_4

11. จากโจทย์ในข้อที่ 1 ของแบบฝึกหัดเสริมทักษะ 2.3 จงพิจารณา G ที่กำหนดให้ว่า

11.1) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง A

11.2) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

11.3) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง B

11.4) G ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

2.5 ไบนารีโอเปอร์เรชัน (Binary Operation)

นิยาม 2.5.1 สำหรับเซ็ต S ใด ๆ ถ้า " 0 " เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ ไปยัง S และมี $S \times S$ เป็นโดเมนแล้ว เราจะเรียกว่า "0 เป็นไบนารีโอเปอร์เรชัน (Binary Operation) ใน S "

สำหรับไบนารีโอเปอร์เรชัน " 0 " ใด ๆ ในเซ็ต S

ถ้า $0(x,y) = z$ เราจะได้ว่า $(x\ 0\ y) = z$

การบวก, การลบ, และการคูณ ต่างก็เป็น ไบนารีโอเปอเรชัน ในเซ็ตของจำนวนทั้งนั้น เช่น การบวกในเซ็ตของจำนวนเต็มบวก เป็นต้น

ลองพิจารณาข้อความ "3 + 4 = 7" อาจกล่าวได้ว่า "7 เป็นผลบวกของ 3 กับ 4" สังเกตดูจะเห็นว่า คู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก (3,4) นั้นถูกจับเข้าคู่กับเลข 7 โดยโอเปอเรชัน " การบวก" หรือกล่าวแบบทั่ว ๆ ไปจะได้ว่า ในการบวกเลขจำนวนเต็มบวกนั้น คู่ลำดับของเลขจำนวนเต็มบวก (a,b) จะถูกจับเข้าคู่กับเลขจำนวนเต็มบวกที่สามสมมุติว่าเป็น c และเราพูดว่า "c เป็นผลบวกของ a กับ b"(คือ $(a,b) \in N \times N$) จะเห็นได้ว่าคู่ลำดับ (a,b) เป็นอีลีเมนต์ของผลคูณคาร์ทีเซียน $N \times N$ เมื่อ N เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก และ $c \in N$ เพราะว่า (a,b) ถูกจับเข้าคู่กับ c โดย โอเปอเรชัน บวกจึงทำให้ได้ว่า "การบวกเลขจำนวนเต็มบวกนั้น อาจแสดงในรูปของความสัมพันธ์จาก $N \times N$ ไป N ได้ โดยใช้ สัญลักษณ์ " + " แทน โอเปอเรชัน บวกนี้ นั่นคือ + เป็น

ความสัมพันธ์จาก $N \times N$ ไปยัง N หรือเขียนได้ว่า $+ \subseteq (N \times N) \times N$ และ $((3,4),7) \in +$ โดย $(3,4) \in N \times N$ และ $7 \in N$ นั่นแสดงให้เห็นว่า + เป็นความสัมพันธ์จาก $N \times N$ ไปยัง N อาจเขียนได้ว่า $+ = \{((1,1),2), \ldots ,((3,4),7) --- \}$ และจะเห็นได้ว่าสำหรับแต่ละคู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก (a,b) จะมีจำนวนเต็มบวก c ซึ่งเรียกว่าเป็นผลบวกของ a กับ b เสมอโดยถ้า $((a,b),c) \in +$ และ $((a,b),d) \in +$ แล้วจะได้ว่า $a + b = c = d$ นั่นคือ $c = d$ แสดงว่าในคู่ลำดับ $((a,b),c)$ กับ $((a,b),d)$ ใด ๆ ถ้าอีลีเมนต์ตัวที่หนึ่งเป็นตัวเดียวกัน (คือ $(a + b)$) แล้วอีลีเมนต์ตัวที่สองคือ c กับ d ต้องเป็นตัวเดียวกัน คือ $c = d$

นั่นคือ + เป็นฟังก์ชันจาก $N \times N$ ไปยัง N ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า

+ เป็น ไบนารีโอเปอเรชัน

อนึ่ง ถ้าเซ็ต S มีอีลีเมนต์จำนวนไม่มากนัก เราอาจพรรณนา ไบนารีโอเปอเรชัน " 0 " ในเซ็ต S ได้ด้วยตาราง

โดยถ้า $x \, 0 \, y = z$ เราจะเขียนค่า z ลงในแถวของ x และคอลัมน์ของ y ดังตาราง 2.5.1

0	. . . .	y	. . . . .
. . . . . .		. . . . . .	
x	. . . .	z	. . . . .
. . . .		. . . .	

ตาราง 2.5.1

ตัวอย่าง 2.5.1 จากตาราง 2.5.2 ต่อไปนี้

0	a	b
a	a	b
b	b	a

ตาราง 2.5.2

แสดงว่า " 0 " เป็นไบนารีโอเปอเรชัน โดย

a 0 a = a

a 0 b = b

b 0 a = b

b 0 b = a

หรือเขียนเป็นเซ็ตได้ว่า

$0 = \{((a,a),a),((a,b),b),((b,a),b),((b,b),a)\}$

นิยาม 2.5.2 ถ้าไบนารีโอเปอร์เรชัน " 0 " มีคุณสมบัติว่า

$(x\ 0\ y)\ 0\ z = x0(y\ 0\ z)$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x,y,z แล้ว จะกล่าวว่า "0 คล้องตามกฎการจัดหมู่"

(associative law)

นิยาม 2.5.3 ถ้าไบนารีโอเปอร์เรชัน " 0 " มีคุณสมบัติว่า

$x\ 0\ y = y\ 0\ x$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x,y แล้ว จะกล่าวว่า "0 คล้องตามกฎการสลับที่"

(Commutative law)

<u>ตัวอย่าง 2.5.2</u> ให้ S = {1,2} และให้ " $\circledast$ " เป็น ไบนารีโอเปอเรชัน ซึ่งมีค่าแสดงดังตาราง 2.5.3 ข้างล่างนี้

$\circledast$	1	2
1	1	2
2	2	1

ตาราง 2.5.3

จงแสดงว่า " $\circledast$ " คล้องตามกฎการจัดหมู่ และกฎการสลับที่

<u>วิธีทำ</u> 1) จะแสดงว่า $\circledast$ คล้องตามกฎการจัดหมู่

โดยจะต้องแสดงว่า $(x \circledast y) \circledast z = x \circledast (y \circledast z)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y, z

เขียนตารางประกอบการพิจารณาได้เป็น

(1) x	(2) y	(3) z	(4) $(x \circledast y)$	(5) $(x \circledast y) \circledast z$	(6) $y \circledast z$	(7) $x \circledast (y \circledast z)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2
1	2	2	2	1	1	1
2	1	1	2	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	1	2	1
2	2	2	1	2	1	2

ตาราง 2.5.4

ช่อง (1),(2),(3) ได้จากเขียนทุก ๆ ค่าของ x, y, z ที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ กันทั้งหมดใน S = {1,2} ช่อง (4) ได้จากเอาช่อง (1) กับช่อง (2) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดให้ ช่อง(5) ได้จากเอาช่อง (4) กับช่อง (3) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดให้ ช่อง(6) ได้จากเอาช่อง (2) กับช่อง (3) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่อง(7) ได้จากเอาช่อง (1) กับช่อง (6) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดมาให้

พิจารณาช่อง (5) กับ (7) จะเห็นว่ามีค่าเท่ากันกรณีต่อกรณี

นั่นคือ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x,y,z

ดังนั้น ⊕ คล้องตามกฎการจัดหมู่

2) จะแสดงว่า ⊕ คล้องตามกฎการสลับที่

โดยจะต้องแสดงว่า $x \oplus y = y \oplus x$ สำหรับทุกค่าของ x,y

เขียนตารางประกอบการพิจารณาได้เป็น

(1)	(2)	(3)	(4)
x	y	$x \oplus y$	$y \oplus x$
1	1	1	1
1	2	2	2
2	1	2	2
2	2	1	1

ตาราง 2.5.5

ช่อง (1),(2) ได้จากเขียนทุก ๆ ค่าของ x,y ที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ กันทั้งหมด ช่อง(3) ได้จากเอาช่อง (1) กับ (2) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่อง(4) ได้จากเอาช่อง (2) กับ (1) มา ⊕ โดยใช้ตาราง ⊕ ที่โจทย์กำหนดมาให้ พิจารณาช่อง(3) กับ (4) จะเห็นว่ามีค่าเท่ากันกรณีต่อกรณี

นั่นคือ x ⊕ y = y ⊕ x สำหรับทุก ๆ ค่าของ x,y

ดังนั้น ⊕ คล้องตามกฎการสลับที่

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 2.5

1. ให้ A = {a, b, c, d} กับไบนารีโอเปอร์เรชัน 0 ตามตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

0	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	b	c
c	a	d	c	d
d	c	c	a	a

จงหา

1.1) c 0 b

1.2) b 0 c

1.3) c 0 (b 0 d)

1.4) (c 0 b) 0 d

1.5) ((a 0 b) 0 c) 0 d

1.6) (a 0 c) 0 ((b 0 d) 0 c)

1.7) ((d 0 d) 0 d) 0 d

1.8) (a 0 d) 0 (c 0 b)

1.9) " 0 " คล้องตามกฎการสลับที่หรือไม่ เพราะ เหตุใด

1.10) " 0 " คล้องตามกฎการจัดหมู่หรือไม่ เพราะ เหตุใด

2. ให้ s = (a, b, c, d, e } กับไบนารีโอเปอร์ชัน θ ถ้า θ สอดคล้องตามกฎการสลับที่ และกฎการจัดหมู่แล้ว จงหาอักษร เติมในช่อง (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ที่เว้นไว้ให้สมบูรณ์

θ	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	d	(6)	c	e
c	(1)	a	(7)	(9)	e
d	(2)	(4)	b	(10)	e
e	(3)	(5)	(8)	e	e