บทที่ 1

เซ็ต และตรรกวิทยา

1.1 <u>เซ็ต</u> (set)

โดยปกติเรามักจะใช้คำว่า "เซ็ต" ในชีวิตประจำวันโดยไม่รู้ตัว ด้วยคำต่าง ๆ กัน แต่ก็อยู่ในความหมายเดียวกันทั้งสิ้น เช่น กลุ่มคน, ฝูงสัตว์, นักศึกษาปีที่ ๑, หมู่บ้าน,ทีมฟุตบอล เป็นต้น นั่นคือ เราใช้คำว่า "เซ็ต" ในความหมายของ "กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ " อันอาจเป็น คน, สัตว์ หรือสิ่งของก็ได้ โดยมีคุณสมบัติที่ทำให้เราสามารถบอกได้ว่าสิ่งใดบ้างที่อยู่ในเซ็ต หรือสิ่งใดบ้างที่ไม่อยู่ในเซ็ต ในทางคณิตศาสตร์ จะใช้คำว่า "เซ็ต" แทน "กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ " ความหมายของ "เซ็ต" ก็เป็นคำที่มีความหมายเหมือนกับคำว่า กลุ่ม, ฝูง, หมู่, คณะ, พวก, เหล่า, กอง, ฯลฯ ซึ่งคำเหล่านี้ก็หมายถึงการรวมกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ทั้งนั้น

เราจะเรียกสิ่งต่าง ๆ ที่รวมกันเป็นกลุ่ม หรือรวมกันเป็นองค์ประกอบของเซ็ตว่า "อีลีเมนต์" (element) เช่น เซ็ตของวันในหนึ่งสัปดาห์ก็มี วันอาทิตย์, วันจันทร์, วันอังคาร, วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์ และวันเสาร์ เป็นอีลีเมนต์ ในทางคณิตศาสตร์ มักจะใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์ใหญ่ (A, B, C,...) แทนชื่อเซ็ต และจะใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์เล็ก (a,b,c,...) แทนอีลีเมนต์

1.1.1 <u>การเขียนสัญลักษณ์แทนเซ็ต</u> มีการเขียนได้ 2 วิธี คือ

1. <u>โดยวิธีแจกแจงอีลีเมนต์</u>

วิธีนี้ ให้เขียนอีลีเมนต์ทั้งหลายที่ประกอบกันเป็นเซ็ตนั้น ลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค " , " คั่นระหว่างอีลีเมนต์แต่ละตัว และ จะอ่านว่า " เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เป็น"

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.1</u> เซ็ตของจำนวน 1, 3 และ 5 เขียนแทนด้วย {1, 3, 5} อ่านว่า " เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เป็น 1, 3 และ 5"

ตัวอย่างที่ 1.1.2 เซ็ตของตัวอักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัวแรก ได้แก่ {a, b, c, d, e} อ่านว่า "เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เป็น a, b, c, d และ e"

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ถ้า A เป็นเซ็ตของตัวอักษรภาษาอังกฤษ 3 ตัวแรก เราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนเซ็ต A แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น

$A = \{ a, b, c \}$

อ่านว่า "A เป็นเซ็ตที่ประกอบด้วย อีลีเมนต์ a, b และ c"

ตัวอย่างที่ 1.1.4 ถ้าให้ B เป็นเซ็ตของวันในหนึ่งสัปดาห์ เราสามารถเขียนได้ว่า

B = { วันอาทิตย์, วันจันทร์, วันอังคาร , วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์, วันเสาร์ }

อนึ่งวิธีนี้เหมาะสำหรับเขียนแทนเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ในเซ็ตไม่มากนักหรือถ้าเป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์มากอีลีเมนต์ก็ควรจะมีลักษณะเรียงกันอยู่อย่างมีระเบียบในกรณีอย่างนี้ การแจกแจงอีลีเมนต์อาจจะใช้จุด 3 จุด (...) หรือขีด 3 ขีด (---) เขียนต่อหลังอีลีเมนต์ที่แจกแจงไว้บ้างแล้ว (ประมาณ 3 ตัว) วิธีนี้จะช่วยทำให้ประหยัดเวลาในการเขียนอีลีเมนต์ของเซ็ตได้ แต่บางทีก็ทำให้ความหมายกำกวมได้

ตัวอย่างที่ 1.1.5 เซ็ตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ 200 ได้แก่ {1, 2, 3, ---, 200}

ตัวอย่างที่ 1.1.6 ให้ I^+ เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $I^+ = \{ 1, 2, 3, --- \}$

2. โดยวิธีบอกเงื่อนไขของอีลีเมนต์ในเซ็ต

สำหรับวิธีนี้ให้เขียนตัวแทนของอีลีเมนต์ในเซ็ตตัวหนึ่งใส่ไว้ในวงเล็บปีกกา แล้วบรรยายคุณสมบัติของอีลีเมนต์ที่จะอยู่ในเซ็ตนั้น ๆ ไว้ ด้วยการคั่นตัวแทนของอีลีเมนต์ กับคำบรรยายคุณสมบัติของมัน ด้วยเครื่องหมาย " | " หรือ " : " หรือ " ; " ซึ่งในที่นี้เรามักใช้เครื่องหมาย " | " เพียงอย่างเดียว และอ่านเครื่องหมาย " | " หรือ " : " หรือ " ; "

ว่า "ซึ่ง" หรือ "ที่" หรือ "โดยที่"

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.7</u> ให้ A เป็นเซ็ตของวันในหนึ่งสัปดาห์ เราสามารถเขียนเซ็ต A โดยวิธีบอกเงื่อนไข ของอีลีเมนต์ได้เป็น

A = {x | x เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์}

อ่านว่า "A เป็นเซ็ตซึ่งประกอบด้วยอีลีเมนต์ x โดยที่ x เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.8</u> ให้ B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มระหว่าง −10 กับ 10 เราสามารถเขียนเซ็ต B ได้เป็น

B = {x | x เป็นจำนวนเต็มระหว่าง −10 กับ 10}

หรือ B = {x| x เป็นจำนวนเต็มและ $-10 < x < 10$}

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.9</u> ถ้าให้ I แทนเซ็ตของจำ นวนเต็ม เราก็จะเขียนแทนเซ็ต I ได้ดังนี้

I = {x | x เป็นจำนวนเต็ม}

อ่านว่า "I เป็นเซ็ตซึ่งประกอบด้วย อีลีเมนต์ x โดยที่ x เป็นจำนวนเต็ม"

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.10</u> ให้ C เป็นเซ็ตของสระในคำว่า set เราจะเขียนแทน C ได้ เป็น

C = {x | x เป็นสระในคำว่า set} ซึ่งได้แก่เซ็ต{e} นั่นเอง

วิธีนี้ เหมาะกับการเขียนแทนเซ็ตเมื่อมีอีลีเมนต์จำนวนมาก หรือนับไม่ได้

ถ้าอีลีเมนต์ตัวใด อยู่ในเซ็ต ๆ หนึ่ง เราจะเรียกว่า อีลีเมนต์ตัวนั้น"เป็นสมาชิกของ" เซ็ต ๆ นั้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ε (ε เป็นอักษรกรีก อ่านว่า epsilon) นั่นคือ ถ้า a เป็นอีลีเมนต์ที่อยู่ในเซ็ต A เราจะกล่าวว่า "a เป็นสมาชิกของเซ็ต A" หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า "a อยู่ในเซ็ต A" นั่นเองโดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \in A$

เมื่อ a ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ต A หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า a ไม่อยู่ในเซ็ต A เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \notin A$ อ่านว่า " a ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ต A" หรือ "a ไม่อยู่ในเซ็ต A" นั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.11</u> กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \{3\}\}$ จะเห็นว่า เซ็ต A มีอีลีเมนต์ทั้งหมด 4 อีลีเมนต์ คือ 1, 2, 3 และ {3} ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่า 1, 2, 3 และ {3} ต่างก็เป็นสมาชิกของเซ็ต A โดยอาจเขียนได้เป็น

$1 \in A$ อ่านว่า "1 เป็นสมาชิกของเซ็ต A" หรือ "1 อยู่ในเซ็ต A" ในทำนองเดียวกัน ก็จะเขียนแสดงได้ว่า

$2 \in A$ อ่านว่า "2 เป็นสมาชิกของเซ็ต A" ($\because$ 2 อยู่ในเซ็ต A)

$3 \in A$ อ่านว่า "3 เป็นสมาชิกของเซ็ต A" ($\because$ 3 อยู่ในเซ็ต A)

$\{3\} \in A$ อ่านว่า "{3} เป็นสมาชิกของเซ็ต A" ($\because$ {3} อยู่ในเซ็ต A)

และจะเห็นว่า 4 ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซ็ต A ดังนั้นเราอาจเขียนแทนด้วย $4 \notin A$ อ่านว่า "4 ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ต A" หรือ "4 ไม่อยู่ในเซ็ต A"

<u>เซ็ตเปล่าหรือเซ็ตว่าง</u> (empty set or null set) คือเซ็ตที่ไม่มีสมาชิกของเซ็ตเลย เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ Φ หรือ { }

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.12</u> ให้ B เป็นเซ็ตของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในรวมกันเป็น 100° เราจะเห็นว่า ไม่มีรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เลย ที่มีมุมภายในรวมกันแล้วได้ 100° (เพราะว่ารูปสามเหลี่ยมทุกรูป มีมุมภายในรวมกันเป็น 180° เสมอ)

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า B คือเซ็ตเปล่า เพราะไม่มีอีลีเมนต์ใดเลย ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว

จึงเขียนได้ว่า $B = \Phi$ หรือ $B = \{\ \}$

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.13</u> ถ้าให้ $C = \{x \mid x^2$ น้อยกว่า $0\}$ เราจะเห็นว่า <u>ไม่มี</u>เลขจำนวนใดเลยที่ยกกำลังสองแล้ว จะได้ค่าน้อยกว่า 0

ดังนั้น C = Φ หรือ C = { }

อนึ่งควรสังเกตว่า Φ ไม่เหมือน 0 เพราะว่า Φ เป็นเซ็ต แต่ 0 เป็นจำนวนแม้แต่ {0} ก็ไม่เหมือนกับ Φ เพราะว่า Φ เป็นเซ็ตเปล่าที่ไม่มีอีลีเมนต์ แต่ {0} เป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์หนึ่ง ตัว คือ 0

<u>**ข้อสังเกต**</u> 1) เราจะเขียนอีลีเมนต์ใด ๆ ที่เป็นสมาชิกของเซ็ตลงไปซ้ำกันสักกี่ครั้งก็ได้ แต่จะถือว่าเป็นตัวเดียวกัน คือเป็นหนึ่งอีลีเมนต์เท่านั้นโดยปกติเรามักนิยมเขียนครั้งเดียวเท่านั้น เช่น

{1, 2} อาจเขียนเป็น {1, 2, 2, 2} หรือ {1, 2, 1, 1, 2}

หรือ {1, 1, 1, 2} ก็ได้ เราหมายถึงเซ็ตเดียวกันทั้งสิ้น คือเป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์ 2 อีลีเมนต์

2) ลำดับก่อนหลังของอีลีเมนต์ในเซ็ต ไม่มีความสำคัญ ดังนั้นจะเขียนอีลีเมนต์ใด ก่อนหรือหลังก็ได้ถือว่าเหมือนกัน เช่น

{1, 2, 3, 4} อาจเขียนเป็น {1, 4, 3, 2} หรือ {4, 2, 3, 1}

หรือ {3, 1, 4, 2} ก็ได้เราก็หมายถึงเซ็ตเดียวกันทั้งนั้น

<u>1.1.2 เซ็ตที่เป็นส่วนหนึ่งของเซ็ตหรือสับเซ็ต</u>

ให้ A กับ B เป็นเซ็ตใด ๆ จะกล่าวได้ว่า A เป็นสับเซ็ตของ B หรือ A เป็นส่วนหนึ่งของเซ็ต B ถ้าสมาชิกทุกตัวของเซ็ต A ต่างก็เป็นสมาชิกของเซ็ต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subseteq B$ อ่านว่า "เซ็ต A เป็นสับเซ็ตของเซ็ต B" หรือ "เซ็ต A เป็นส่วนหนึ่งของเซ็ต B" ก็ได้

ดังนั้น ถ้ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ในเซ็ต A แต่ไม่อยู่ในเซ็ต B เราก็กล่าวว่า "A ไม่เป็นสับเซ็ตของ B" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \not\subseteq B$

<u>**ตัวอย่างที่ 1.1.14**</u> ถ้า A = {2}, B = {0, 1, 2}, C = {2, 4, 6} D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} เราจะกล่าวได้ว่า

1) $A \subseteq B$ เพราะว่า 2 เป็นสมาชิกของ A และเป็นสมาชิกของ B ด้วย

2) $A \subseteq C$ เพราะว่า 2 เป็นสมาชิกของ A และ เป็นสมาชิกของ C ด้วย

3) $A \subseteq D$ เพราะว่า 2 เป็นสมาชิกของ A และเป็นสมาชิกของ D ด้วย

4) C SD เพราะว่า 2,4 และ 6 เป็นสมาชิกของ C และต่างก็เป็นสมาชิกของ D ด้วย

5) $B \nsubseteq D$ เพราะว่า 0,1 และ 2 เป็นสมาชิกในเซ็ต B แต่ไม่ได้เป็นสมาชิกหรืออยู่ในเซ็ต D ทั้งหมด คือมี 0 อยู่ตัวหนึ่ง ที่เป็นสมาชิกของเซ็ต B แต่ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซ็ต D ดังนั้นเซ็ต B จึงไม่เป็นสับเซ็ตของเซ็ต D

<u>**หมายเหตุ**</u> 1. ในที่นี้เราถือเป็นข้อตกลงว่า "เซ็ตเปล่า" เป็นสับเซ็ตของทุกเซ็ตเพราะไม่ได้ขัดกับความหมายของสับเซ็ตแต่อย่างใด นั่นคือ ถ้า A เป็นเซ็ตใด ๆ แล้ว $\Phi \subseteq A$ เสมอและเป็นที่น่าสังเกตว่า "เซ็ตทุกเซ็ตจะเป็นสับเซ็ตของตัวเองด้วย" นั่นคือ ถ้า A เป็นเซ็ตใด ๆ แล้วเราย่อมได้ว่า $A \subseteq A$ ด้วย

2. จำนวนสับเซ็ตของเซ็ตใด ๆ ย่อมมีจำนวนเท่ากับ 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนอีลีเมนต์ของเซ็ตนั้น ๆ

<u>**ตัวอย่างที่ 1.1.16**</u> ให้ $A = \{a, b, c\}$ จะได้ว่าสับเซ็ตของ A มีทั้งหมด $2^3 = 8$ เซ็ต (อีลีเมนต์ใน A มีทั้งหมด 3 อีลีเมนต์) ดังนี้ คือ

1) Φ (เซ็ตเปล่า)	5) $\{a,b\}$
2) $\{a\}$	6) $\{a, c\}$
3) $\{b\}$	7) $\{b, c\}$
4) $\{c\}$	8) $\{a, b, c\}$

อนึ่งจะสังเกตเห็นว่าเราเริ่มต้นจากเซ็ตเปล่า ซึ่งเป็นเซ็ตที่ไม่มีอีลีเมนต์เลย ซึ่งเราตกลงกันไว้แล้วว่ามันจะเป็นสับเซ็ตของทุก ๆ เซ็ต

จากนั้นเราก็จะเขียนเซ็ตที่มี 1 อีลีเมนต์จากบรรดาอีลีเมนต์ของเซ็ต A ได้

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

แล้วก็เขียนเซ็ตที่มี 2 อีลีเมนต์ได้

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

สุดท้ายเขียนเซ็ตที่มี 3 อีลีเมนต์ซึ่งได้เซ็ต A นั่นเองคือ {a, b, c}

ดังนั้นการเขียนสับเซ็ตเราจะเริ่มต้นจากเซ็ตเปล่าเสมอ แล้วเขียนเซ็ตที่มีจำนวนอีลีเมนต์เป็น 1, 2, 3, --- อีลีเมนต์ตามลำดับจนถึงเซ็ตตัวของมันเอง ก็จะได้สับเซ็ต ทั้งหมดตามต้องการ เช่น

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.16</u> ถ้า B = {1, 2, 3, 4} จะได้ว่า B มี สับเซ็ตทั้งหมด $2^4 = 16$ คือ

ก. เซ็ตไม่มีอีลีเมนต์ในเซ็ตเลย ได้แก่

1) { }

ข. เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 1 อีลีเมนต์ ได้แก่

2) {1} , 3) {2} , 4) {3} , 5) {4}

ค. เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 2 อีลีเมนต์ ได้แก่

6) {1, 2} , 7) {1, 3} , 8) {1, 4} 9) {2, 3}

10) {2, 4} , 11) {3, 4}

ง. เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 3 อีลีเมนต์ ได้แก่

12) {1, 2, 3} , 13) {1, 2, 4} , 14) {1, 3, 4}

15) {2, 3, 4}

จ. เซ็ตที่มีอีลีเมนต์เซ็ตละ 4 อีลีเมนต์ ได้แก่

16) {1, 2, 3, 4}

<u>1.1.3 การเท่ากันของเซ็ต</u>

เซ็ต A กับเซ็ต B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ และจะเขียนแทนด้วย $A = B$

นั่นคือ เซ็ตที่เท่ากัน ย่อมมีอีลีเมนต์เป็นชุดเดียวกัน

<u>**ตัวอย่างที่**1.1.17</u>

1) {1, 2, 3} = 12, 1, 3}

2) {โด่ง, ฐูด, ด่ำ} = {ด่ำ, ฐูด, โด่ง}

3) {a, b, c, d} ≠ {1, 2, 3, 4}

4) {a, b} ≠ {a, b, c}

5) 11, 2} = {1, 2, 1, 1, 2}

6) $\{x \mid x^2 - 4 = 0\} = \{2, -2\}$

7) {x I x^2- 3x + 2} = 11, 2)

8) $\{x \mid x^2 + 1 < 0\} = \{\ \}$

<u>1.1.4 ผลรวม (Union) ระหว่างเซ็ต</u>

ผลรวมหรือยูเนียนของเซ็ต A กับ เซ็ต B ก็คือ "เซ็ตที่ประก<u>อบด้วยอีลีเมนต์ทั้งหลาย</u> ซึ่งเป็นสมาชิกของ(หรืออยู่ใน) เซ็ต A, เป็นสมาชิกของ เซ็ต B หรือเป็นสมาชิกของทั้งสอง เซ็ต" เขียนแทนด้วย "A U B" อ่านว่า "A ยูเนียน B" หรือ "ผลรวมของของเซ็ต A กับเซ็ต B"

เราอาจเขียนได้ว่า

A ∪ B = {x | x ε A หรือ x ε B หรือ x เป็นสมาชิกของทั้งสองเซ็ต}

<u>**ตัวอย่างที่**1.1.18</u> ถ้า A = {0, 1, 4}, และ3B = {2, 4, 6,7}

ดังนั้น A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7)

<u>**ตัวอย่างที่**1.1.19</u> ให้ C = {1, 3, 5} และ D = {2, 4, 6}

ดังนั้น C ∪ D = {1, 2, 3, 45, 6}

<u>**ตัวอย่างที่ 1.1.20**</u> ให้ E = {1, 23} และ,F ₴, 3, 4, 51

ดังนั้น E ∪ F = {1, 2, 3, 4, 5} = F

<u>**ตัวอย่างที่ 1.1.21**</u> ให้ G = {x | x เป็นจำนวนเต็มบวก} และ H ={1,2,3,4}

ดังนั้น G ∪ H = G

1.1.5 ส่วนร่วม (Intersection) ระหว่างเซ็ต

ส่วนร่วมหรืออินเตอร์เซคชันของเซ็ต A กับเซ็ต B ก็คือ "เซ็ตที่ประกอบด้วยอีลีเมนต์ทั้งหลาย ซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งเซ็ต A และเซ็ต B" เขียนแทนด้วย "A ∩ B" อ่านว่า "A อินเตอร์เซคB " หรือ "ส่วนร่วมของเซ็ต A และเซ็ต B" หรือ "อินเตอร์เซ็คชันของ A กับ B"

เราอาจเขียนได้ว่า $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

ตัวอย่างที่ 1.1.22 ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 7\}$
ดังนั้น $A \cap B = \{2,4\}$ เพราะมี 2 และ 4 อยู่ทั้งใน A และ B

ตัวอย่างที่ 1.1.23 ให้ $C = \{1, 3, 5\}$ และ $D = \{2, 4, 6\}$
ดังนั้น $C \cap D = \Phi$ เพราะว่า C กับ D ไม่มีอีลีเมนต์ใดร่วมกันเลยกันเลย

ตัวอย่างที่ 1.24 ให้ $E = \{1, 2, 3\}$ และ $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
ดังนั้น $E \cap F = \{1, 2, 3\} = E$

ตัวอย่างที่ 1.1.25 ให้ $G = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $H = \{1,2,3,4\}$
ดังนั้น $G \cap H = H = \{1, 2, 3, 4\}$

1.1.6 ผลต่าง (difference) ระหว่างเซ็ต

ผลต่างหรือดิฟเฟอะเรนของเซ็ต A กับเซ็ต B ก็คือ "เซ็ตที่ประกอบด้วย บรรดาอีลีเมนต์ทั้งหลาย ซึ่งเป็นสมาชิกของเซ็ต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ต B" เขียนแทนด้วย "A − B" อ่านว่า "A ดิฟเฟอะเรน B" หรือ "ผลต่างระหว่างเซ็ต A กับเซ็ต B"

เราอาจเขียนได้ว่า $A - B = \{x \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

ตัวอย่างที่ 1.1.26 ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 7\}$
ดังนั้น $A - B = \{0,1,3\}$ เพราะมี 0,1 และ 3 ที่อยู่ในเซ็ต A แต่ไม่อยู่ในเซ็ต B

$B - A = \{6, 7\}$ เพราะมี 6 และ 7 ซึ่งอยู่ในเซ็ต B แต่ ไม่อยู่ในเซ็ต A

ตัวอย่างที่ 1.1.27 ถ้า $C = \{1, 3, 5\}$ และ $D = 12, 4, 6\}$

ดังนั้น $C - D = \{1, 3, 5\} = C$

และ $D - C = \{2, 4, 6\} = D$

ตัวอย่างที่ 1.1.28 ให้ $E = \{1, 2, 3\}$ และ $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ดังนั้น $E - F = \Phi$ เพราะไม่มีอีลีเมนต์ใดอยู่ใน E แล้วไม่อยู่ใน F

และ $F - E = \{4, 5\}$

ตัวอย่างที่ 1.1.29 ให้ $G = \{x \mid X$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $H = \{1,2,3,4\}$

ดังนั้น $G - H = \{x \mid x$ เป็นจำนวน เต็มบวกและมากกว่า $4\}$

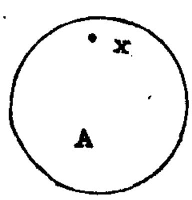
$= \{5, 6, 7, ---\}$

และ $H - G = \Phi$

1.1.7 การเขียนแผนภาพแทนเซ็ต

การเขียนแผนภาพแทนเซ็ตนี้ จะช่วยให้เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตได้ง่ายขึ้น และอาจเสริมให้เราสามารถเข้าใจความคิดเกี่ยวกับเซ็ตได้ กระจ่างชัดขึ้นแผนภาพที่ใช้เขียนแทนเซ็ตนี้ เราเรียก "แผนภาพออยเลอร์" (Euler diagram) หรือแผนภาพเวนน์ (Venn diagram) บางทีก็เรียกรวมกันว่า "แผนภาพออยเลอร์-เวนน์" เพื่อเป็นเกียรติแก่ Leongard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส และ John Venn นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ

ในการใช้แผนภาพแทนเซ็ตนี้ เราจะเขียนเซ็ตที่กำลังพิจารณาด้วยเซ็ตของจุดภายในหรือบน วงกลมหรือวงรี หรือรูปอื่น ๆ ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง แต่เรามักนิยมใช้วงกลมหรือวงรี ดังนั้นถ้าเราเขียนแผนภาพแทนเซ็ต A จะได้ว่า $x \varepsilon A$ หมายความว่า x เป็นจุดภายใน หรืออยู่บนเส้นรอบรูปของแผนภาพนั้น เช่น รูป 1.1.1



รูป 1.1.1

(อนึ่ง ในทางทฤษฎีของเซ็ต จะถือว่าเซ็ตทุกเซ็ต ที่เรานำมาศึกษาย่อมเป็นสับเซ็ตของเซ็ต ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นเซ็ตของสมาชิกทั้งหมดที่เรากำลังพิจารณาบางทีเราก็ละไว้ในฐานที่เข้าใจ ซึ่งจะเรียกเซ็ตนี้ว่า Universal set เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ " U " เช่น

1) ถ้าเราพิจารณาจำนวนเต็มบวก " U " ได้แก่เซ็ตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

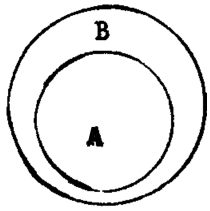
2) ในการประกวดนางสาวไทย " U " ได้แก่เซ็ตของหญิงไทยทั้งหมด

3) ในการประกวดผลไม้ " U " ได้แก่เซ็ตของผลไม้ทั้งหมด

และเวลาเขียนภาพแทนเซ็ต เรามักใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทน Universal set คือ

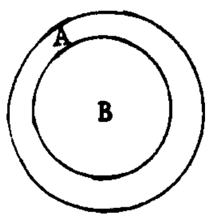
$\boxed{\quad U}$ แต่ในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึง U โดยละในฐานที่เข้าใจ)

การเขียนภาพแทนสับเซ็ตโดยทั่วไปเราแทน A $\subseteq$B ด้วยวงกลม 2 วงซ้อนกันโดยที่วงกลมที่แทน A จะอยู่ข้างในวงกลมที่แทน B ดังรูป 1.1.2



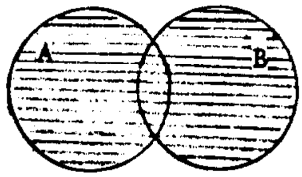
รูป 1.1.2

หรือถ้า B $\subseteq$ A ก็เขียนดังรูปที่ 1.1.3



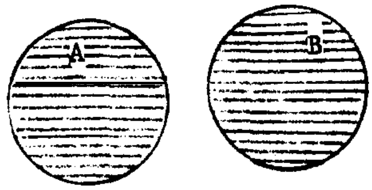
รูป 1.1.3

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนแผนภาพแทนผลรวม (Union) ส่วนร่วม (Intersection) และผลต่าง (difference) ของเซ็ต 2 เซ็ตในแบบต่าง ๆ ได้โดยเขียนแสดงด้วยส่วนที่แรเงาดัง แผนภาพต่าง ๆ ต่อไปนี้



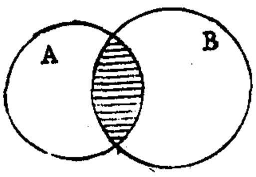
รูป 1.1.4

แสดง $A \cup B$



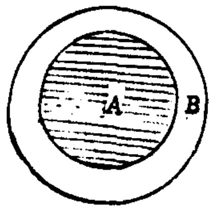
รูป 1.1.5

ttunu $A \cup B$



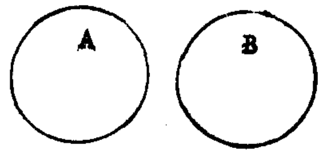
รูป 1.1.6

แสดง $A \cap B \neq \Phi$



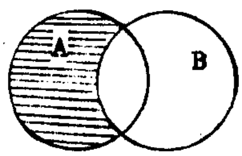
รูป 1.1.7

แสดง $A \cap B = A$



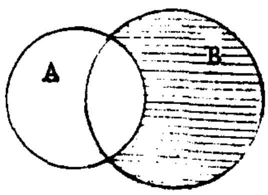
รูป 1.1.8

แสดง $A \cap B = \Phi$



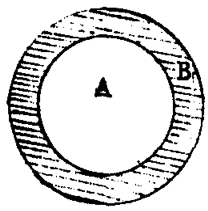
รูป 1.1.9

แสดง $A - B$



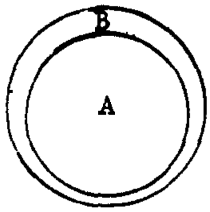
รูป 1.1.10

แสดง $B - A$



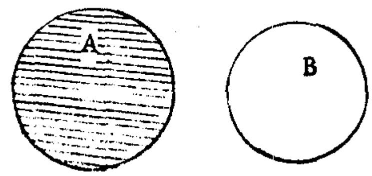
รูป 1.1.11

แสดง $B - A$



รูป 1.1.12

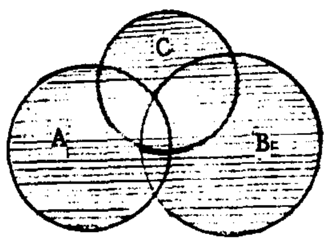
แสดง $A - B = \Phi$



รูป 1.1.13

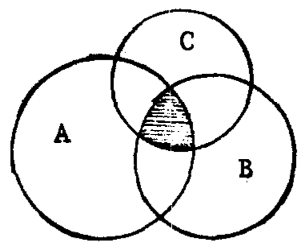
แสดง $A - B = A$

ตัวอย่างที่ 1.1.30 การเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ต 3 เซ็ต



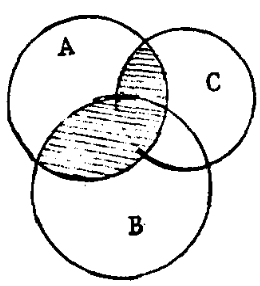
รูป 1.1.14

แสดง $(A \cup B) \cup C$



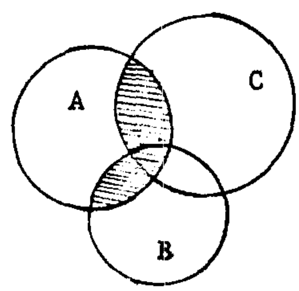
รูป 11.1.15

แสดง $(A \cap B) \cap C$



รูป 1.1.16

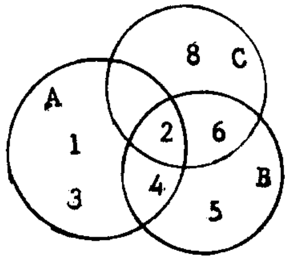
แสดง $A \cap (B \cup C)$



รูป 1.1.17

แสดง $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.31</u> ให้ A = {1, 2, 3, 41 , B = {2, 4, 5, 6} และ C = {2, 6, 8} เราจะเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตทั้งสามจะได้แผนภาพดังรูป 1.1.18



รูป 1.1.18

จะเห็นว่าเซ็ต A ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 1, 2, 3, 4

เซ็ต B ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 4, 5, 6

เซ็ต C ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 6, 8

เซ็ต $A \cap B$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 4

เซ็ต $A \cap C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2

เซ็ต $B \cap C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 6

เซ็ต $(A \cap B) \cap C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2

เซ็ต $A \cup B$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6

เซ็ต $A \cup C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 1, 2, 3, 4, 6, 8

เซ็ต $B \cup C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 4, 5, 6, 8

เซ็ต $A - B$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 1, 3

เซ็ต $C - B$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 8

เซ็ต $C - A$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 6, 8

เซ็ต $(A \cap B) \cup C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 4, 6, 8

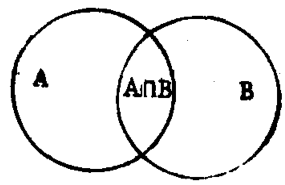
เซ็ต $(A \cap B) - C$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 4

เซ็ต $A - (B - C)$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 1, 2, 3

เซ็ต $A \cap (B \cup C)$ ประกอบด้วยพื้นที่หมายเลข 2, 4

การใช้แผนภาพแทนเซ็ตจะสามารถแสดงคุณสมบัติต่าง ๆ ของความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตว่าเป็นจริงได้โดยง่าย เช่น

1. $A \cap B \subseteq A$ จะเขียนแผนภาพแสดงได้ดังรูป 1.1.19



รูป 1.1.19

สำหรับ 2 - 14 ให้นักศึกษาเขียนภาพแสดงเอง

2. $A \cap B \subseteq B$
3. $A \subseteq A \cup B$
4. $B \subseteq A \cup B$
5. $A \cup A = A$
6. $B \cap B = B$
7. $A \cap B = B \cap A$
8. $A \cup B = B \cup A$
9. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
10. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
13. $A \cap \Phi = \Phi$
14. $A \cup \Phi = A$

<u>แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.1</u>

1. จงเขียนเซ็ตต่อไปนี้โดยการแจกแจงชื่อของอีลีเมนต์

1.1) A เป็นเซ็ตของเดือนที่ลงท้ายด้วย "ยน"

1.2) B เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 100

1.3) C เป็นเซ็ตของสระในภาษาอังกฤษ

1.4) D = {x | x เป็นเดือนที่มีจำนวนวันน้อยที่สุด}

1.5) E = {x | x เป็นสีของธงชาติไทย}

1.6) F = {x | x เป็นคณะของมหาวิทยาลัยรามคำแหง}

1.7) G = {x | x เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$}

1.8) H = {x | x เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 2}

2. อีลีเมนต์ของแต่ละเซ็ตต่อไปนี้มีกี่อีลีเมนต์ อะไรบ้าง?

2.1) A = {1, 5, 7}

2.2) B = {1, {1}}

2.3) C = 1123)

2.4) D = {2,{2, 3},{3}}

2.5) E = 112, 3, 456, 7}

2.6) F = {12, 21)

2.7) G = {1, 0, 1}

2.8) H = {1, 2,{2}, 2, 1, 12,{2}}

2.9) I = {x | x เป็นจำนวนเต็มบวกและ 3 < x < 6)

2.10) J = {x | x เป็นจำนวนเต็มบวกและน้อยกว่า 0 }

3. ถ้าให้ A = {1, 2,{3},{2,3}} แล้วจงพิจารณาว่าข้อใดถูกหรือผิดพร้อมทั้งให้เหตุผล

3.1) $1 \in A$

3.2) $2 \in A$

3.3) $\{2\} \in A$

3.4) $\{3\} \subseteq A$

3.5) $\{3\} \in A$

3.6) $3 \in A$

3.7) $\{\{3\}\} \subseteq A$

3.8) $3 \subseteq A$

3.9) { 2, 3) $\subseteq$ A

3.10) $\{1, 2\} \subseteq A$

3.11) $\{\{3\}\} \varepsilon A$ 3.12) $\{2, 3\} \varepsilon A$

3.13) $\{\{2, 3\}\} \subseteq A$ 3.14) {1, 21 ε A

3.15) $\{1, 2, \{3\}\} \subseteq A$ 3.16) 11, 2,{ 3},{2, 3}} ε A

3.17) $\{1, 2, \{3\}, \{2, 3\}\} \subseteq A$ 3.18) $\{\Phi\} \subseteq A$

3.19) $\Phi \varepsilon A$ 3.20) $\{ \} \subseteq A$

4. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูกหรือข้อใดผิด

4.1) $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ 4.2) $\{0\} = \{\Phi\}$

4.3) $\{0\} = \{ \}$ 4.4) Q = 0

4.5) {0} SC } 4.6) $1 \subset \{1\}$

4.7) $\{1\} \subseteq 1$ 4.8) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

4.9) $\{1\} \subseteq \{1\}$ 4.10) $\{\{1\}\} \subseteq \{1\}$

4.11) $\{ \} \subseteq \{1\}$ 4.12) $\{1\} \varepsilon \{\{1\}\}$

4.13) $\{\{1\}\} \varepsilon \{1\}$ 4.14) $0 \varepsilon \{ \}$

4.15) $1 \varepsilon \{\{1\}\}$ 4.16) {2,4} ⊆ {x | x เป็นจำนวนเต็มคู่}

4.17) {1, 2, 3} ⊆ {x | X เป็นจำนวนเต็มบวก}

4.18) {1,{2}, 3} ⊆ {x | X เป็นจำนวนเต็มบวก}

4.19) {-1} ⊆ {x | X เป็นจำนวนเต็มและ $2x^2 - x - 3 = 0$ }

4.20) 5 ε {x | X เป็นจำนวน เต็มบวกและน้อยกว่า 10}

5. จงหาสับเซ็ตทั้งหมดของเซ็ตต่อไปนี้ และบอกด้วยว่ามีทั้งหมดกี่เซ็ต

5.1) $A = \{ \}$ 5.2) $B = \{a\}$

5.3) $C = \{a, \{b, c\}\}$ 5.4) $D = \{a, b, c\}$

6. กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{3\}, \{2, 3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, 31,$ และ $C = \{2\}$ จงเขียนเซ็ตต่อไปนี้โดยการแจกแจงอีลีเมนต์

6.1) $A \cap B$	6.11) $(A \cap B) - C$
6.2) $B \cap C$	6.12) $C - (A \cap B)$
6.3) $A \cup C$	6.13) $(A - B) - C$
6.4) $B \cup C$	6.14) $(A \cap B) \cap C$
6.5) $A \cap (B \cup C)$	6.15) $Q \cup C$
6.6) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	6.16) $\Phi \cap C$
6.7) $A \cup (B \cap C)$	6.17) $(B - A) \cup C$
6.8) $(A \cap B) \cup C$	6.18) $C - C$
6.9) $A - B$	6.19) $(B \cup C) - A$
6.10) $C - A$	6.20) $(A \cap B) - B$

7. กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{3\}, \{2, 3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, 3\}$ และ $C = \{2\}$ จงพิจารณาว่าต่อไปนี้ข้อใดถูกและข้อใดผิด

7.1) $2 \in A \cap B$	7.6) $0 \in C - C$
7.2) $2 \in A \cap C$	7.7) $3 \in (A \cup B) \cup C$
7.3) $\{2\} \in A \cap C$	7.8) $3 \in (A \cap C) \cup B$
7.4) $2 \in A - B$	7.9) $\{2\} \in C - (A \cap B)$
7.5) $\{3\} \in A \cup B$	7.10) $2 \in C - (A \cap B)$

8. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว ข้อใดถูก ข้อใดผิด

8.1) $A \cap B = B$	8.4) $A \cup B = A$
8.2) $A \cap B = A$	8.5) $A - B = Q$
8.3) $A \cup B = B$	8.6) $B - A = \Phi$

9. นักเรียนชั้นหนึ่งในโรงเรียนแห่งหนึ่งมี 80 คน ผลการคัดเลือกปรากฏว่ามีนักเรียนได้รับรางวัลเรียนดี 10 คน ได้รับรางวัลมารยาทดี 30 คน ในจำนวนนี้ ได้รับทั้งสองรางวัล 5 คน จงหา

9.1) จำนวนนักเรียนที่ได้รับรางวัลเรียนดีเพียงอย่างเดียว

9.2) จำนวนนักเรียน ที่ได้รับรางวัลมารยาทดีเพียงอย่างเดียว

9.3) จำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ได้รับรางวัล

9.4) จำนวนนักเรียนที่ไม่ได้รับรางวัล

10. ผลการสำรวจนักเรียน 200 คน เป็นดังนี้

80 คน ชอบคณิตศาสตร์

65 คน ชอบวิทยาศาสตร์

55 คน ชอบภาษาอังกฤษ

20 คน ชอบทั้งวิทยาศาสตร์ และ ภาษาอังกฤษ

25 คน ชอบทั้งคณิตศาสตร์ และ วิทยาศาสตร์

15 คน ชอบคณิตศาสตร์ และ ภาษาอังกฤษ และ

5 คน ชอบทั้งสามวิชา

จงหา

10.1) มีนักเรียนกี่คนที่ไม่ชอบวิชาใดเลย

10.2) มีนักเรียนกี่คนที่ชอบคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียว

10.3) มีนักเรียนกี่คนที่ชอบเพียงวิชาเดียวเท่านั้น

10.4) มีนักเรียนกี่คนที่ชอบ 2 วิชา เท่านั้น

10.5) มีนักเรียนกี่คนที่ชอบ คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์ แต่ไม่ชอบภาษาอังกฤษ

1.2 ตรรกวิทยาเบื้องต้น

1.2.1 ข้อความในคณิตศาสตร์ หมายถึงข้อความที่เป็นจริง หรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง เท่านั้น โดยอาจอยู่ในรูปประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธ ก็ได้ เช่น

- เมืองหลวงของประเทศไทย คือกรุงเทพมหานคร (จริง)
- มหาวิทยาลัยรามคำแหง ไม่ได้อยู่ในกรุงเทพฯ (เท็จ)
- สงขลาอยู่ทางใต้ของประเทศไทย (จริง)
- $1 = 2$ (เท็จ)
- $15 + 5 = 20$ (จริง)
- เซ็ตเปล่าเป็นสับเซ็ตของทุก ๆ เซ็ต (จริง)
- คนทุกคนมีหาง (เท็จ)

ข้อความเหล่านี้เราเรียกว่า ข้อความในคณิตศาสตร์ทั้งสิ้นเพราะเราสามารถบอกได้ว่าข้อความใดเป็นจริง ข้อความใดเป็นเท็จ โดยเราจะเรียกความเป็น จริง และเป็นเท็จของข้อความว่า "ค่าความจริง" (Truth Value) ของข้อความ ส่วนข้อความอีกจำพวกหนึ่ง ที่อยู่ในรูปประโยคคำถาม , คำสั่ง, ขอร้อง, ห้าม, อ้อนวอน, ประโยคแสดงความปราถนา หรือประโยค-อุทาน ซึ่งข้อความพวกนี้ เรา<u>ไม่</u>เรียกว่าเป็นข้อความในทางคณิตศาสตร์ เพราะบอกไม่ได้ว่าประโยคเหล่านี้มีค่าความจริง เป็นจริงหรือ เป็นเท็จ เช่น

- หิวข้าวไหม (คำถาม)
- ออกไป (คำสั่ง)
- ช่วยด้วยเจ้าข้า (ขอร้อง)
- อย่าเด็ดดอกไม้ (ห้าม)
- ขอได้โปรด (อ้อนวอน)
- อยากนอนเหลือเกิน (แสดงความปรารถนา)
- อุ๊ยตาย (อุทาน)

อนึ่งคำว่า "ข้อความ" ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้หมายถึงข้อความในทางคณิตศาสตร์ เท่านั้น

หมายเหตุ คำว่า "ข้อความในทางคณิตศาสตร์" ตำราบางเล่มเรียกว่า "ประพจน์" (Propositions or statements)

1.2.2 การเชื่อมข้อความ

ในชีวิตประจำวันก็ดี หรือในทางคณิตศาสตร์ก็ดี เรามักพบข้อความที่เกิดจากการเชื่อมข้อความย่อย ๆ เขาด้วยกันด้วยคำว่า "และ" , "หรือ" , "ถ้า...แล้ว..." หรืออาจพบข้อความซึ่งเปลี่ยนแปลงมาจากข้อความเดิมโดยเติมคำว่า "ไม่" บรรดาคำว่า "และ" , "หรือ" , "ถ้า...แล้ว..." , "ไม่" เหล่านี้เราเรียกว่าคำเชื่อมข้อความ ข้อความใหม่ซึ่งเกิดจากการเชื่อมข้อความย่อย ๆ ด้วยคำเชื่อมนี้ เรียกว่า "ข้อความประกอบ" ซึ่งก็ยังคงเป็นข้อความในคณิตศาสตร์อยู่นั่นเอง

อนึ่ง ในการศึกษาเรื่องนี้เพื่อความสะดวก จะใช้อักษร p, q, r, s, ... เป็นสัญลักษณ์แทนข้อความย่อย ๆ แต่ละข้อความ และใช้ T หมายถึง "จริง" (Truth) และ F หมายถึงเท็จ (Falsity)

การเขียนแสดง "ค่าความจริง" ของข้อความย่อย ๆ ที่ประกอบกันเป็นข้อความประกอบเพื่อที่จะวิเคราะห์หาค่าความจริงของข้อความประกอบ(ซึ่งจะกล่าวต่อไป) ในทุก ๆ กรณีของข้อความย่อย ที่อาจเป็นไปได้ต่าง ๆ กัน ทำได้โดยยึกหลักว่า "ถ้าข้อความประกอบ ประกอบขึ้นด้วยข้อความย่อย ๆ n ข้อความแล้ว จำนวนกรณีที่เราจะต้องทำการวิเคราะห์จะมีทั้งหมด 2^n กรณีเมื่อ n คือจำนวนข้อความย่อย "

ตัวอย่างที่ 1.2.1 มีข้อความ P เพียงข้อความเดียวค่าความจริงที่อาจเป็นไปได้มี 2 กรณีคือ T กับ F

ตัวอย่างที่ 1.2.2 มีข้อความย่อย p กับ q สองข้อความ ค่าความจริงที่อาจเป็นไปได้มี $2^2 = 4$ กรณีต่าง ๆ กันดังตาราง 1.2.1

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

ตารางที่ 1.2.1

หลัก ขีย

1) ราแบ่งครึ่งจำนวนกรณีที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด คือ 4) ได้ 2 เราจึงเขียนในช่องแรก(ช่อง p) เป็น T 2 ตัว กับ F 2 ตัว

2) แล้วแบ่งครึ่งจาก 2 เราได้ 1 จึงเขียนในช่องสอง (ช่อง q) เป็น T หนึ่งตัว กับ F หนึ่งตัวสลับกันไป ดังตารางที่ 1.2.1

ตัวอย่างที่ 1.2.3 ถ้ามีข้อความ p, q, r สามข้อความ ค่าความจริงที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด มี $2^3 = 8$ กรณีต่าง ๆ กัน เขียนได้ดังตาราง 1.2.2

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

ตาราง 1.2.2

หลักการเขียน

1) แบ่งครึ่งจากกรณีทั้งหมด(คือ 8)ได้ 4 จึงเขียนในช่อง P เป็น T 4 ตัว และF 4 ตัว

2) แบ่งครึ่งจาก 4 ได้ 2 จึงเขียนในช่อง q เป็น T 2 ตัว และF 2 ตัว สลับกันไป

3) แบ่งครึ่งจาก 2 ได้ 1 จึงเขียนในช่อง r เป็น T หนึ่งตัว F หนึ่งตัวสลับกันไป ดังตารางที่ 1.2.2

ถ้ามีข้อความมากกว่านี้ ก็ทำในทำนองเดียวกัน

ในทางคณิตศาสตร์ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า "และ" (and) คือ " $\wedge$ "

ใช้แทนคำว่า "หรือ" (or) คือ " $\vee$ "

ใช้แทนคำว่า "ถ้า...แล้ว" (if...then) คือ " $\Rightarrow$ "

ใช้แทนคำว่า "ไม่" (not) คือ " $\sim$ "

เช่น เรามีข้อความว่า $2 \in A$ กับ $2 \in B$ เราอาจนำข้อความทั้งสองนี้มาเขียนเชื่อมกัน ด้วยคำเชื่อมเหล่านี้ได้ ต่าง ๆ กันเป็น

$2 \in A \wedge 2 \in B$ อ่านว่า "$2 \in A$ และ $2 \in B$"

$2 \in A \vee 2 \in B$ อ่านว่า "$2 \in A$ หรือ $2 \in B$"

$2 \in A \Rightarrow 2 \in B$ อ่านว่า "ถ้า $2 \in A$ แล้ว $2 \in B$"

$\sim 2 \in A$ อ่านว่า "ไม่ $2 \in A$ (คือ $2 \notin A$)

ถ้าให้ P แทน $2 \in A$ และ q แทน $2 \in B$

เราจะเขียนแทน $2 \in A$ และ $2 \in B$ ด้วย $p \wedge q$

เราจะเขียนแทน $2 \in A$ หรือ $2 \in B$ ด้วย $p \vee q$

เราจะเขียนแทน ถ้า $2 \in A$ แล้ว $2 \in B$ ด้วย $p \Rightarrow q$

เราจะเขียนแทนไม่ $2 \in A$ ด้วย $\sim p$

1.2.3 การเชื่อมข้อความด้วยคำเชื่อม "หรือ"

ความหมายของคำว่า "หรือ" โดยทั่ว ๆ ไปมี 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 หมายถึงอย่างใด อย่างหนึ่ง เท่านั้น เช่น ข้อความว่า "วันอาทิตย์นี้นายทิ่มศักดิ์ จะไปเยี่ยมนางสาวสะดุ้งจิต หรือนางสาวสะดิ้งมาลย์"ความหมายในกรณีนี้ หมายถึงว่า วันอาทิตย์นี้นายทิ่มศักดิ์ อาจจะไปเยี่ยมนางสาวสะดุ้งจิต หรือไม่ก็นางสาวสะดิ้งมาลย์ เพียงคนใดคนหนึ่งเท่านั้น ความหมายของคำว่า "หรือ" แบบนี้เขียนแทนด้วย สัญญลักษณ์ " $\veebar$ " เช่น $p \veebar q$ เป็นต้น

กรณีที่ 2 หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือ ทั้งสองอย่าง เช่นข้อความที่ว่า "วันอาทิตย์นี้ นายทิ่มศักดิ์ จะไปเยี่ยม นางสาวสะดุ้งจิต หรือ นางสาวสะดิ้งมาลย์" ความหมายในกรณีนี้ หมายถึงว่า วันอาทิตย์นี้นายทิ่มศักดิ์ อาจจะไปเยี่ยมนางสาวสะดุ้งจิต หรือนางสาวสะดิ้งมาลย์ คนใดคนหนึ่งหรือ อาจจะไปเยี่ยมทั้งสองคนเลยก็ได้

ในทางคณิตศาสตร์ เราใช้ความหมายของคำว่า "หรือ" ตามความหมายในกรณีที่ 2 โดยเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ " v " เช่น "p v q" เป็นต้น

ถ้า p และ q เป็นข้อความสองข้อความใด ๆ ข้อความใหม่ที่เกิดจากการเชื่อมด้วย "หรือ" เขียนแทนด้วย "p v q" อ่านว่า "p หรือ q " จะมีตารางค่าความจริงเขียนแสดงได้ดังนี้

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F *

ตารางที่ 1.2.3

* ข้อความที่เชื่อมด้วย " v " นี้จะเป็นเท็จ (F) ก็ต่อเมื่อข้อความที่นำมาเชื่อมกันเป็นเท็จ (F) ทั้งคู่ กรณีอื่น ๆ นอกจากนี้ เป็นจริง (T) ทั้งหมด

<u>ข้อสังเกต</u>

1) ข้อความที่เชื่อมด้วย " v " จะเป็นจริง (T) ถ้าข้อความย่อยที่นำมาเชื่อมกันตัวใดตัวหนึ่งเป็นจริง (T)

2) ไม่ว่า p กับ q จะแทนข้อความใด ๆ "p v q" กับ "q v p" จะมีค่าความจริงเหมือนกันเสมอ

<u>1.2.4 การเชื่อมข้อความด้วยคำเชื่อม "และ"</u>

ความหมายของคำว่า "และ" นี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อข้อความที่นำมาเชื่อมกันให้เป็นข้อความใหม่นั้นต้องเป็นจริงทั้งคู่จึงจะเป็นจริง นอกนั้นเป็นเท็จหมด

ถ้า p และ q เป็นข้อความสองข้อความใด ๆ แล้วข้อความที่เกิดจากการเชื่อมด้วย "และ" เขียนแทนด้วย "p ∧ q" อ่านว่า "p และ q" จะเขียนค่าความจริงแสดงได้

ดังตาราง 1.2.4

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	*
T	F	F	
F	T	F	
F	F	F	

ตารางที่ 1.2.4

* ข้อความที่เขียนเชื่อมด้วย " $\wedge$ " นี้จะเป็นจริง (T) ก็ต่อเมื่อข้อความที่นำมาเชื่อมกันเป็นจริง (T) ทั้งคู่กรณีอื่น ๆ นอกจากนี้เป็นเท็จ (F) หมด

ข้อสังเกต

1) ข้อความที่เชื่อมด้วย " $\wedge$ " จะเป็นเท็จ (F) ถ้าข้อความย่อยที่นำมาเชื่อมกันมีตัวใดตัวหนึ่งเป็นเท็จ (F)
2) ไม่ว่า p กับ q จะเป็นข้อความใด ๆ "$p \wedge q$" กับ "$q \wedge p$" จะมีค่าความจริงเหมือนกันเสมอ

คำเชื่อม "และ" นี้อาจเขียนในรูปอื่น ๆ ที่มีความหมายเดียวกัน ได้อีก เช่น " แต่ " "กับ" เป็นต้น

1.2.5 การเชื่อมข้อความด้วยคำเชื่อม "ถ้า...แล้ว..."

คำเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." นี้ เป็นคำเชื่อมที่แสดงเหตุผลกัน โดยถ้า p และ q เป็นข้อความสองข้อความใด ๆ แล้ว ข้อความที่เกิดจากการเชื่อมด้วย "ถ้า...แล้ว..." เขียนแทนด้วย " $p \Rightarrow q$" อ่านว่า "ถ้า p แล้ว q " โดยปกติเรามักนิยมอ่านว่า " p implies q" เราถือว่า ข้อความ p ซึ่งตามหลังคำว่า "ถ้า" เป็น "เหตุ" ส่วนข้อความที่ตามหลังคำว่า "แล้ว" เป็น "ผล" ข้อความนี้จะเป็นเท็จ (F) ก็ต่อเมื่อ เหตุเป็นจริง (T) และผลเป็นเท็จ (F) เท่านั้น

กรณีอื่น ๆ นอกจากนี้เป็นจริง (T) หมด โดยมีค่าความจริงเขียนแสดงได้ ดังตาราง 1.2.5

	p	q	p ⇒ q
	T	T	T
*	T	F	F
	F	T	T
	F	F	T

ตารางที่ *1.2.5*

* ข้อความที่เขียนเชื่อมด้วย " ⇒ " นี้จะเป็นเท็จ (F) ก็ต่อเมื่อ ข้อความที่นำมาเชื่อม เหตุ p ต้องเป็นจริง (T) และผล q ต้องเป็นเท็จ (F) กรณีอื่น ๆ นอกจากนี้ เป็นจริง(T) หมด

<u>**ข้อสังเกต**</u>

1) ข้อความที่เชื่อมด้วย " ⇒ " จะเป็นจริง (T) ถ้าข้อความตัวต้น(เหตุ)เป็นเท็จ (F) ไม่ว่าตัวหลัง(ผล)จะเป็นจริง (T) หรือเท็จ (F) ก็ตามเช่น กรณีที่ 3 กับที่ 4 ใน ตาราง 1.2.5

2) ข้อความที่เชื่อมด้วย " ⇒ " จะเป็นจริง (T) ถ้าข้อความตัวหลัง(ผล)เป็นจริง (T) ไม่ว่าตัวต้น(เหตุ)จะเป็นจริง (T) หรือเท็จ (F) ก็ตามเช่นกรณที่ 1 กับที่ 3 ใน ตารางที่ 1.2.5

3) ถ้า p กับ q เป็นข้อความใด ๆ แล้ว p ⇒ q กับ q ⇒p จะเป็นคนละข้อความ (และอาจมีค่าความจริง<u>ไม่เหมือนกัน</u>)

คำเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." นี้มีความสำคัญทางคณิตศาสตร์มากดังจะเห็นว่า ทฤษฎีบทเกือบทุกทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์จะอยู่ในรูป " p ⇒q " เกือบทั้งนั้น เช่นถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน เป็นต้น

<u>หมายเหตุ</u>

ถ้านำเอาข้อความ $p \Rightarrow q$ กับ $q \Rightarrow p$ มาเชื่อมกันด้วย " $\wedge$ " คือ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (อ่านว่า "ถ้า p แล้ว q และถ้า q แล้ว p) รวมกันได้เป็น $p \Leftrightarrow q$ อ่านว่า "p ก็ต่อเมื่อ q" หรือ "p if and only if q"หรืออ่านย่อ ๆ ว่า "p iff. q" ก็ได้ซึ่งเราจะเขียนตารางแสดงค่าความจริงได้ ดังตาราง 1.2.6

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (หรือ $p \Leftrightarrow q$)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ตารางที่ 1.2.6

<u>1.2.6 การเชื่อมข้อความด้วยคำเชื่อม "ไม่"</u> (นิเสธของข้อความ)

ถ้า p เป็นข้อความใด ๆ ที่กำหนดให้ นิเสธของข้อความ p ก็คือข้อความที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p ข้อความที่เป็นนิเสธของ p เขียนแทนด้วย " $\sim p$ " อ่านว่า "ไม่ p" หรือ "not p " โดยจะเขียนตารางแสดงค่าความจริงได้ดังตารางที่ 1.2.7

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตารางที่ 1.2.7

1.2.7 การหาค่าความจริงของข้อความใดๆ

เราอาจใช้ตารางค่าความจริงทั้งสี่(ตาราง 1.2.3,1.2.4,1.2.5 , 1.2.7) ที่กล่าวมาแล้วนี้ พิจารณาค่าความจริง ของข้อความใด ๆ ที่ได้จากการนำเอาข้อความย่อย ๆ มาประกอบกันด้วยคำเชื่อมข้อความต่าง ๆ ได้เสมอ นั่นคือ ตารางค่าความจริงของข้อความแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วนั้นมีไว้เพื่อหาว่า ข้อความใด เป็นจริง ข้อความใดเป็นเท็จนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงพิจารณาดูว่าข้อความ "2 และ 4 เป็นสมาชิกของ {4,6}" เป็นจริงหรือเท็จ

วิธีพิจารณา ให้ p แทนข้อความ "2 เป็นสมาชิกของ {4,6}"

q แทนข้อความ "4 เป็นสมาชิกของ {4,6}"

ดังนั้นข้อความ "2 และ 4 เป็นสมาชิกของ {4,6} " เขียนแทนได้ด้วย "$p \wedge q$"

โดย p เป็นเท็จ (F) เพราะว่า 2 ไม่ได้เป็นสมาชิกของ {4,6}

q เป็นจริง (T) เพราะว่า 4 เป็นสมาชิกของ {4,6}

เมื่อตรวจดูตารางค่าความจริงของ "และ" (ตาราง 1.2.4) เราพบว่าในกรณีที่ p เป็น F และ q เป็น T จะได้ว่า $p \wedge q$ เป็นเท็จ หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{ccc} p & \wedge & q \\ F & & T \\ & F & \end{array}$$

ดังนั้นข้อความ "2 และ 4 เป็นสมาชิกของ {4,6} เป็นเท็จ (F)"

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงพิจารณาดูว่า ข้อความ "ถ้า 2 =3 แล้ว 4 = 9" เป็นจริงหรือเท็จ

วิธีพิจารณา ให้ p แทนข้อความ "2 = 3"

q แทนข้อความ "4 = 9"

เมื่อตรวจดูตารางค่าความจริง "ถ้า...แล้ว..." (ตาราง 1.2.5) จะพบว่าในกรณีที่ p เป็น F และ q เป็น F จะได้ว่า p ⟹ q เป็น T (จริง) หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{ccc} P & \Rightarrow & q \\ F & & F \\ & T & \end{array}$$

นั่นคือข้อความที่ว่า "ถ้า 2 = 3 แล้ว 4 = 9" เป็นจริง

<u>**ตัวอย่างที่ 1.2.6**</u> จงพิจารณาดูว่าข้อความ "ถ้า 2 + 2 = 2 หรือ 1 + 2 = 3 แล้ว 1 + 4 = 2"

<u>**วิธีพิจารณา**</u> ให้ p แทนข้อความ "2 + 2 = 2"

q แทนข้อความ "1 + 2 = 3"

และ r แทนข้อความ "1 + 4 = 2"

ดังนั้นข้อความ "ถ้า 2 + 2 = 2 หรือ 1 + 2 = 3 แล้ว 1 + 4 = 2" เขียนแทนด้วย $(p \vee q) \Rightarrow r$

ในที่นี้เราได้ว่า p เป็นเท็จ (F)

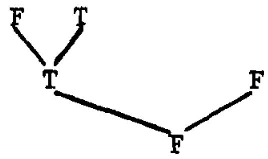
q เป็นจริง (T)

และ r เป็นเท็จ (F)

เมื่อตรวจดูในตารางค่าความจริง "หรือ" (ตาราง 1.2.3) จะพบว่าในกรณีที่ p เป็นเท็จ (F) , q เป็นจริง (T) จะได้ว่า $p \vee q$ เป็นจริง (T)

และเมื่อตรวจดูในตารางค่าความจริง "ถ้า...แล้ว..." (ตาราง 1.2.5) จงพบว่าในกรณีที่เหตุ (ในที่นี้คือ $p \vee q$) เป็นจริง (T) และผล (ในที่นี้คือ r) เป็นเท็จ (F) จะได้ว่า $(p \vee q) \Rightarrow r$ เป็นเท็จ (F) หรืออาจเขียนได้เป็น

$$(p \vee q) \rightarrow r$$



นั่นคือข้อความที่ว่า "ถ้า 2 + 2 = 2 หรือ 1 + 2 = 3 แล้ว 1 + 4 = 2" เป็นเท็จ

<u>ตัวอย่างที่ 1.2.7</u> จงหาค่าความจริงของข้อความ $(p \vee q) \wedge r$ เมื่อกำหนดให้ p เป็นจริง, q เป็นเท็จ, r เป็นเท็จ

วิธีทำ $p \vee q$ อยู่ในวงเล็บแสดงว่าหา $p \vee q$ เสียก่อนได้ $p \vee q$ เป็นจริงแล้วนำมาเชื่อมกับ r ด้วย " $\wedge$ " เป็น $(p \vee q) \wedge r$ โดยที่ $p \vee q$ เป็นจริง(T), r เป็นเท็จ (F)

ดังนั้น $(p \vee q) \wedge r$ จึงได้เป็นเท็จ (F) เราอาจทำเป็นขั้น ๆ ได้ดังนี้

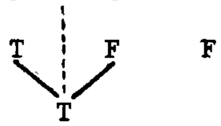
<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนค่าความจริงกำกับข้างล่าง ของตัวอักษรที่แทนข้อความดังนี้

$$(p \vee q) \wedge r$$

T F F

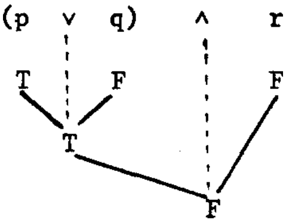
<u>ขั้นที่ 2</u> เขียนค่าความจริงของ $(p \vee q)$ ลงข้างล่างตัวเชื่อม " $\vee$ " ดังนี้

$$(p \vee q) \wedge r$$



ขั้นสุดท้าย หาค่าความจริงของ $(p \vee q) \wedge r$ ได้ทันทีโดยเขียนค่าความจริงของ $(p \vee q) \wedge r$ ลงข้างล่างตัวเชื่อม " $\wedge$ " ดังนี้

$$(p \vee q) \wedge r$$

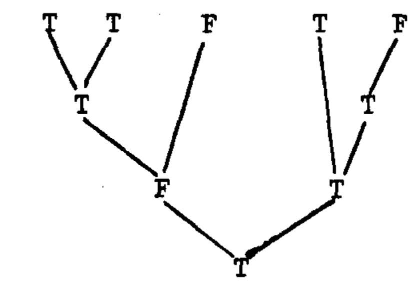


ดังนั้น $(p \vee q) \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

<u>ตัวอย่างที่ 1.2.8</u> กำหนดให้ p เป็นจริง, q เป็นจริง, r เป็นเท็จ, s เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $((p \wedge q) \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \sim s)$

<u>วิธีทำ</u>

$$((p \wedge q) \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \sim s)$$



ดังนั้นข้อความ $((p \wedge q) \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \sim s)$ เป็นจริง

<u>หมายเหตุ</u>

การวิเคราะห์หาค่าความจริงของข้อความบางชนิด เราไม่ต้องทำการวิเคราะห์ให้จบก็สามารถที่จะทายผลขั้นสุดท้ายได้ว่ามีค่าความจริงเป็นอย่างไร โดยถือหลักดังนี้

1) ข้อความที่เชื่อมด้วย " $\vee$ " จะเป็นจริง (T) เสมอถ้าข้อความย่อยที่นำมาเชื่อมกันมีข้อความใดข้อความหนึ่งเป็นจริง (T)
2) ข้อความที่เชื่อมด้วย " $\wedge$ " จะเป็นเท็จ (F) เสมอ ถ้าข้อความย่อยที่นำมาเชื่อมกันมีข้อความใดข้อความหนึ่งเป็นเท็จ (F)
3) ข้อความที่เชื่อมด้วย " $\Rightarrow$ " จะเป็นจริง (T) เสมอ ถ้าข้อความย่อยตัวต้น(เหตุ) เป็นเท็จ (F)
4) ข้อความที่เชื่อมด้วย " $\Rightarrow$ " จะเป็นจริง (T) เสมอ ถ้าข้อความย่อยตัวหลัง(ผล) เป็นจริง (T)

ตัวอย่างที่ 1.2.9 จงหาค่าความจริงของข้อความ $(p \vee q) \wedge r$ เมื่อ r เป็นเท็จ (F)

วิธีทำ ข้อความที่ต้องการหาคือ เอา $p \vee q$ มาเชื่อมกับ r ด้วย " $\wedge$ " แต่เราทราบว่า r เป็น F ดังนั้นเราจึงบอกได้ทันทีว่า $(p \vee q) \wedge r$ เป็นเท็จ (F)

$(p \vee q) \wedge r$

F

F

หมายเหตุ ตามหลักข้อที่ 2 ดังนั้น $(p \vee q) \wedge r$ เป็นเท็จ F

ตัวอย่างที่ 1.2.10 จงหาค่าความจริงของ $p \vee (q \Rightarrow r)$ เมื่อ p เป็นจริง (T)

วิธีทำ $p \vee (q \Rightarrow r)$

T

T

หมายเหตุ ตามหลักข้อที่ 1 ดังนั้น $p \vee (q \Rightarrow r)$ เป็นจริง (T)

ตัวอย่างที่ 1.2.11 จงหาค่าความจริงของ $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$ เมื่อ p เป็น F

วิธีทำ $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$

F

T

หมายเหตุ ตามหลักข้อที่ 3 ดังนั้น $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.2.12 จงหาค่าความจริงของ $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$ เมื่อ r เป็นจริง (T)

วิธีทำ $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$

T

T

หมายเหตุ ตามหลักข้อที่ 4 ดังนั้น $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่1.2.13 ถ้า $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ (F) แล้วจงหาค่าความจริงของ $q \Rightarrow ((p \vee r) \wedge \sim s)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดว่า $p \Rightarrow q$ เป็น F แสดงว่า p ต้องเป็น T และ q ต้องเป็น F (จากตาราง 1.2.5)

ดังนั้น $q \Rightarrow ((p \vee r) \wedge \sim s)$

F

T

หมายเหตุ ตามหลักข้อที่ 3 ดังนั้น $q \Rightarrow ((p \vee r) \wedge \sim s)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.2.14 ให้ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ เป็นเท็จจงหาค่าความจริงของ p ,ของ q, ของ r

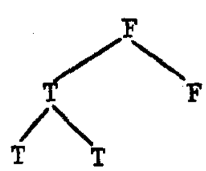
วิธีทำ จากโจทย์กำหนดว่า $(p \wedge q) \Rightarrow r$ เป็นเท็จ

แสดงว่า $p \wedge q$ ต้องเป็นจริง ,r ต้องเป็นเท็จ (F) ($\because$ เชื่อมด้วยตัวเชื่อม " $\Rightarrow$")

เมื่อ $p \wedge q$ เป็นจริงก็จะได้ว่า p เป็นจริง ,q เป็นจริง ($\because$ เชื่อมด้วยตัวเชื่อม " $\wedge$ ")

ดังนั้นเมื่อ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ เป็นเท็จแล้ว จะได้ว่า p ต้องเป็นจริง,q ต้องเป็นจริง ,r ต้องเป็นเท็จ หรืออาจเขียนได้เป็น

$(p \wedge q) \Rightarrow r$



นั่นคือ p ต้องเป็น T

q ต้องเป็น T

r ต้องเป็น F

<u>1.2.8 การสร้างตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ</u> (การวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ)

เป็นการสร้างตาราง เพื่อแสดงค่าความจริงของข้อความหรือ เป็นการวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ ที่ประกอบด้วยข้อความย่อย ๆ หลายข้อความโดยพิจารณาทุก ๆ กรณีของข้อความย่อย ที่อาจเป็นไปได้

ตัวอย่างที่ 1.2.15 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$

<u>วิธีทำ</u> ข้อความ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ประกอบด้วยข้อความย่อย 3 ข้อความ จึงมีกรณีที่อาจเป็นไปได้ ทั้งหมด $2^3 = 8$ เขียนได้ดังในช่องที่ (1),(2) และ (3) ของตาราง 1.2.8

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ตารางที่ 1.2.8

เราสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ได้โดย

<u>ขั้นที่</u> 1 เขียนกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ทุกกรณีของข้อความย่อย p,q,r ดังในช่อง (1) (2),(3)

ขั้นที่ 2 เขียนค่าความจริงของ $p \vee q$ ในช่อง (4) โดยใช้ค่าความจริงของ p กับของ q ในช่อง (1) กับ (2) และใช้ตารางแสดงค่าความจริง "หรือ" (ตาราง 1.2.3)

ขั้นที่ 3 เขียนค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ในช่อง (5) โดยใช้ค่าความจริงของ $p \vee q$ ในช่อง (4) กับค่าความจริงของ r ในช่อง (3) นำมาเชื่อมกันด้วย " $\Rightarrow$ " และใช้ตารางแสดงค่าความจริง "ถ้า...แล้ว..." (ตาราง 1.2.5)

ข้อเตือนใจ (เมื่อกระทำด้วยคำเชื่อมใดควรใส่ค่าความจริงให้ตรงกับสัญลักษณ์ของคำเชื่อมนั้น ๆ)

นั่นคือค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$ แสดงได้ดังตารางในช่องที่ 5 จากตารางค่าความจริงนี้ จะอ่านค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ได้ทุกกรณีไม่ว่าข้อความย่อย p, q, r จะมีค่าความจริงอย่างใดก็ตาม เช่น

ในกรณีที่ p เป็นจริง,q เป็นเท็จ,r เป็นเท็จ (ดูบันทัดที่ 4 ของตาราง)จะได้ว่าค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow$ ในกรณีนี้เป็นเท็จ

หรือในกรณีที่ p เป็นเท็จ,q เป็นจริง,r เป็นจริง (ดูบันทัดที่ 5 ของตาราง)จะได้ว่าค่าความจริงของ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ในกรณีนี้เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.2.16 จงเขียนตารางแสดงค่าความจริงของ

$$\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$$

(1) p	(2) q	(3) $p \wedge q$	(4) $\sim(p \wedge q)$	(5) $\sim p$	(6) $\sim q$	(7) $\sim p \vee \sim q$	(8) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

ตาราง 1.2.9

เราสามารถสร้างตารางค่าความจริงของ $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ ได้โดย

ขั้นที่ 1 ข้อความที่เราจะพิจารณามี 2 ข้อความย่อย ดังนั้น จึงมีกรณีต่าง ๆ ทั้งหมด $2^2 = 4$ กรณี เราเขียนค่าความจริงของข้อความย่อย p,q ลงในช่องที่ (1) และ (2)

ขั้นที่ 2 เขียนค่าความจริงของ $p \wedge q$ ในช่อง (3) โดยใช้ค่าความจริงของ p,q ในช่อง (1), (2) ใช้ตารางแสดงค่าความจริง "และ"

ขั้นที่ 3 เขียนค่าความจริงของ $\sim(p \wedge q)$ ในช่อง (4) โดยพิจารณาจากค่าความจริงของ $(p \wedge q)$ ในช่อง (3) ใช้ตารางแสดงค่าความจริง "ไม่"

ขั้นที่ 4 เขียนค่าความจริงของ $\sim p$ ในช่องที่ (5) โดยใช้ค่าความจริงของ p ในช่องที่ (1)

ขั้นที่ 5 เขียนค่าความจริงของ $\sim q$ ในช่องที่ (6) โดยใช้ค่าความจริงของ q ในช่องที่(2)

ขั้นที่ 6 เขียนความความจริงของ $\sim p \vee \sim q$ ลงในช่อง (7) โดยใช้ค่าความจริงของ $\sim p$ ในช่อง (5) กับ $\sim q$ ในช่อง (6)และตารางแสดงค่าความจริง "หรือ"

ขั้นที่ 7 เขียนค่าความจริงของ $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ ลงในช่อง (8) โดยใช้ค่าความจริงของ $\sim(p \wedge q)$ ในช่อง (4) กับ $\sim p \vee \sim q$ ในช่อง (7) ใช้ตารางแสดงค่าความจริง "ถ้า...แล้ว..."

นั่นคือ ค่าความจริงของ $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ แสดงได้ดังตาราง 1.2.9 ในช่องที่ (8) นั่นเอง

1.2.9 Tautology และ Contradiction

โดยทั่ว ๆ ไปแล้วข้อความอาจเป็นจริงในบางกรณี และเป็นเท็จในบางกรณี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ค่าความจริงของข้อความย่อย แต่ก็มีข้อความบางชนิดที่มีค่าความจริง เป็นจริงหมดทุกกรณี ไม่ว่าข้อความย่อยที่นำมาประกอบนั้นจะเป็นจริงหรือเท็จ เราเรียกข้อความที่เป็นจริงทุกกรณีนี้ว่า Tautology และในทำนองเดียวกัน ก็อาจจะมีข้อความบางชนิดที่มีค่าความจริง เป็นเท็จหมดทุกกรณี เช่นกัน เราเรียกข้อความที่เป็นเท็จทุกกรณีนี้ว่า Contradiction

การสำรวจดูว่า ข้อความใดเป็น Tautology หรือ Contradiction หรือไม่นั้น

ก็ทำการวิเคราะห์ดู ตามวิธีการวิเคราะห์หาค่าความจริงของข้อความดังกล่าวแล้ว ถ้าปรากฏว่ามีแต่ T ล้วนภายในตัวเชื่อมสำคัญของข้อความ ก็แสดงว่าข้อความนั้นเป็น Tautology เช่น

ข้อความ $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ ซึ่งเราพิจารณาแล้วในตัวอย่างที่ 1.2.16 ซึ่งจะเห็นว่า ตัวเชื่อมสำคัญคือ " $\Rightarrow$ " เป็น T หมดทุกกรณี เราจึงกล่าวได้ว่า ข้อความ $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ เป็น Tautology

แต่ถ้ามี F แม้เพียงตัวเดียว ก็ไม่เป็น Tautology

ในทำนองเดียวกันถ้าเราวิเคราะห์หาค่าความจริงของข้อความแล้ว ปรากฏว่ามีแต่ F ล้วนภายในตัวเชื่อมสำคัญของข้อความก็แสดงว่าข้อความนั้นเป็น Contradiction

__ตัวอย่างที่ 1.2.17__ จงพิจารณาว่าข้อความ $p \vee \sim p$ เป็น Tautology หรือไม่

__วิธีทำ__ เราสร้างตารางค่าความจริงของ $p \vee \sim p$ ได้ดังตาราง 1.2.10

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ตาราง 1.2.10

จะเห็นว่าเราพิจารณาทั้งหมด 2 กรณี ผลปรากฏว่า $p \vee \sim p$ เป็นจริงทั้ง 2 กรณีจึงกล่าวได้ว่า $p \vee \sim p$ เป็น Tautology

__ตัวอย่างที่ 1.2.18__ จงพิจารณาว่าข้อความ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ เป็น Tautology หรือไม่

__วิธีทำ__ สร้างตารางค่าความจริงของ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ได้ดังตาราง 1.2.11

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
p	q	$p \Rightarrow$	$q \quad \sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

ตาราง 1.2.11

ในที่นี้ต้องพิจารณาทั้งหมด 4 กรณี เขียนกรณีต่าง ๆ ลงในช่อง (1) กับช่อง (2)

เราได้ช่อง (3) โดยเอาช่อง (1) กับช่อง (2) มาเชื่อมด้วย " $\Rightarrow$ "

เราได้ช่อง (4) โดยหา " $\sim$ " (not) ของช่อง (2)

เราได้ช่อง (5) โดยหา " $\sim$ " (not) ของช่อง (1)

เราได้ช่อง (6) โดยเอาช่อง (4) กับช่อง (5) มาเชื่อมด้วย " $\Rightarrow$ "

เราได้ช่อง (7) โดยเอาช่อง (5) กับช่อง (6) มาเชื่อมด้วย " $\Rightarrow$ "

จากผลขั้นสุดท้ายในช่อง (7) จะเห็นได้ว่าได้ T ล้วนทุกกรณี

ดังนั้นข้อความ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ เป็น Tautology

__ตัวอย่างที่ 1.2.19__ จงพิจารณาว่าข้อความ $p \wedge \sim p$ เป็น Tautology หรือ Contradiction

__วิธีทำ__ เราสร้างตารางค่าความจริงของ $p \wedge \sim p$ ได้ดังตาราง 1.2.12

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

ตาราง 1.2.12

เราพบว่า $p \wedge \sim p$ เป็นเท็จแสมอไม่ว่า p จะเป็นจริงหรือเท็จ ดังนั้น $p \wedge \sim p$ จึงเป็น Contradiction

<u>หมายเหตุ</u>

การสำรวจดูว่าข้อความใดเป็น Tautology หรือ Contradiction หรือไม่นั้นอาจไม่ต้องสร้างตารางวิเคราะห์ ก็อาจทราบได้ถ้าหากข้อความนั้น ๆ อยู่ในรูปเดียวกันกับข้อความที่เป็น Tautology หรือ Contradiction ซึ่งเราเคยหามาก่อนแล้ว เช่น $(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \Rightarrow q)$ ซึ่งข้อความนี้ก็อยู่ในรูปเดียวกันกับ $p \vee \sim p$ ซึ่งเราเคยวิเคราะห์มาแล้วในตัวอย่างที่ 1.2.17 นั่นเอง ดังนั้น $(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \Rightarrow q)$ ก็จะเป็น Tautology ด้วย

<u>แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.2</u>

1. จงเปลี่ยนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป สัญลักษณ์

   1.1) ถ้าแดงเป็นชาวนาแล้ว แดงต้องทำงานหนัก

   1.2) แดงเป็นชาวนาหรือชาวสวน

   1.3) 3 เป็นเลขคู่และ 4 เป็นเลขคี่

   1.4) 2 เป็นเลขคู่หรือ 2 ไม่เป็นเลขคู่

   1.5) ถ้า $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$ แล้ว $2 = -2$

   1.6) ถ้า $a = b$ แล้ว $a^2 = b^2$

   1.7) $3^2 = 9$ และ $3^2 \neq 9$

   1.8) $3^2 = 9$ และ $3^2 = 10$

   1.9) ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วมุมตรงกันข้ามย่อมเท่ากัน

   1.10) ถ้า 4 เป็นจำนวนคู่แล้ว 4^2 จะเป็นจำนวนคู่

2. จงหาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

   2.1) ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว คนย่อมมีหาง

   2.2) ถ้า $2 + 3 \neq 5$ แล้ว $2 + 3 = 5$

2.3) ถ้า $2^2 = 8$ แล้ว $8^2 = 4$

2.4) ถ้า $3 = 5$ แล้ว $3^2 = 9$

2.5) เดือนมกราคม มี 30 หรือ 31 วัน

2.6) เดือนกุมภาพันธ์มี 30 หรือ 31 วัน

2.7) เดือนสิงหาคมมี 31 วันแต่เดือนกันยายนมี 30 วัน เท่านั้น

2.8) 4 มากกว่า 3 และ 3 มากกว่า 2

2.9) 4 มากกว่า 2 และกบมีปีก

2.10) ถ้า $2 + 2 = 4$ และ $1 + 2 = 5$ แล้ว $2 + 3 = 8$

3. ให้ p , q เป็นจริงและ r , s เป็นเท็จ จงหาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

3.1) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

3.2) $\sim q \vee \sim p$

3.3) $(\sim(p \wedge s)) \Rightarrow (q \vee r)$

3.4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$

3.5) $(p \vee s) \wedge q$

3.6) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

3.7) $(p \Rightarrow r)$ 3 $(\sim r$ 3 $s)$

3.8) $((p$ A $s) \vee r) \Rightarrow (q \wedge \sim r)$

3.9) $(\sim(p \wedge q)) \Rightarrow (p \vee \sim q)$

3.10) $(p \vee \sim s) \Rightarrow (\sim r \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p))$

4.

4.1) ให้ $p \wedge q$ เป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $(q \Rightarrow \sim p) \vee \sim q$

4.2) ให้ $p \vee q$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $(p \wedge \sim q) \vee q$

4.3) ให้ $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee \sim q)$

4.4) ให้ p 3 q เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ ((q ∧ s) 3 r) ⇒ p

4.5) ให้ ∼p ∨ q เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ ∼p⇒(q ∨ (p ∧ r))

5. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อความใด เป็นจริง ข้อความใดเป็นเท็จ

5.1) (p ∧ q) 3 r เมื่อ p เป็นเท็จ (F)

5.2) p ⇒ (q 3 r) เมื่อ r เป็นจริง (T)

5.3) (p ∧ q) ⇒ r เมื่อ r เป็นจริง (T)

5.4) p ∨ (q 3 r) เมื่อ r เป็นเท็จ (F)

5.5) (p A q) 3 (r ∨ s) เมื่อ p เป็นเท็จ (F)

6.

6.1) ให้ p A q เป็นจริง จงหาค่าความจริงของ p, ของ q

6.2) ให้ p ∨ q เป็นจริง จงหาค่าความจริงของ p

6.3) ให้ p A ∼q เป็นจริง (T) จงหาค่าความจริงของ p, ของ q

6.4) ให้ p ⇒ (q ∨ r) เป็น เท็จ (F) จงหาค่าความจริงของ p, ของ q , ของ r

6.5) (p ∧ ∼q) ⇒ (r ∨ ∼s) เป็นเท็จแล้ว จงหาค่าความจริงของ p, ของ q ,
ของ r , ของ s

7. ให้ p , q แทนข้อความใด ๆ และ p เป็นจริง (T) แล้ว

7.1) ถ้า p ⇒ q เป็นจริงแล้ว q จำเป็นต้องเป็นอะไร?

7.2) ถ้า p ⇒ q เป็นเท็จแล้ว q จำเป็นต้องเป็นอะไร?

7.3) ถ้า p ∨ q เป็นจริงแล้ว q จำเป็นต้องเป็นอะไร?

7.4) ถ้า p ∧ q เป็นจริงแล้ว q จำเป็นต้องเป็นอะไร?

7.5) ถ้า p ∧ q เป็นเท็จแล้ว q จำเป็นต้องเป็นอะไร?

8. จงสร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

8.1) $p \Rightarrow \sim p$

8.2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

8.3) $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$

8.4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

8.5) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

9. จากข้อ (8) จงพิจารณาดูว่า ข้อใดเป็น Tautology บ้าง

10. จงเขียน สัญลักษณ์แทนข้อความต่อไปนี้ แล้วสำรวจดูว่าข้อความใด เป็น Tautology ข้อความใดไม่เป็น

10.1) $2 + 2 = 4$ หรือ $2 + 2 \neq 4$

10.2) ถ้าแดงขยันแล้ว แดงย่อมทำงานหนักหรือแดงย่อมขยัน

10.3) ถ้าแดงขยันและแดงร่ำรวยแล้ว แดงย่อมขยันหรือร่ำรวย

1.3 การสรุปอย่างมีเหตุผล

ถ้า A กับ B เป็นข้อความใด ๆ ซึ่งเป็นเหตุบังคับให้เกิดผลสรุปเป็น C (นั่นแสดงว่า เหตุคือ A กับ B ผลคือ C) แล้ว เราจะกล่าวว่าเป็นการสรุปในรูป

เหตุ : จาก A กับ B

ผล : สรุป C

ในการที่เราจะพิจารณาว่าการสรุปนั้น เป็นการสรุปที่ถูกต้อง (มีเหตุผล) หรือไม่นั้นให้นำเอา ข้อความ A กับ B มาเชื่อมกันด้วย " $\wedge$ " แล้วนำไปเชื่อมกับ C ด้วย " $\Rightarrow$ " เป็น $(A \wedge B) \Rightarrow C$ แล้วพิจารณาข้อความที่ได้จากการเชื่อมดังกล่าวว่า เป็น Tautology (เป็นจริงทุกกรณี) ไหม? ถ้าข้อความนั้นเป็น Tautology ก็จะกล่าวว่า "การสรุปนั้นเป็นการสรุปที่ถูกต้อง" ถ้าไม่เป็น Tautology ก็จะกล่าวว่า "การสรุปนั้นเป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้อง"

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว เราอาจกล่าวได้ว่า การสรุป

จาก $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (เหตุ)

สรุป C (ผล)

จะเป็นการสรุปที่ถูกต้อง ก็ต่อเมื่อข้อความ

$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow C$ เป็น Tautology เท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 1.8.1</u> จงพิจารณาว่าการสรุปต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

จาก ถ้าดำเป็นชาวสวนแล้ว ดำต้องทำงานหนัก

กับ ดำเป็นชาวสวน

สรุป ดำต้องทำงานหนัก

<u>วิธีพิจารณา</u> ให้ p แทนข้อความ "ดำเป็นชาวสวน"

q แทนข้อความ "ดำทำงานหนัก"

ดังนั้นการสรุปข้างบนก็คือ

จาก $p \Rightarrow q$ (เหตุ A)

กับ p (เหตุ B)

สรุป q (ผล C)

เราจะพิจารณาข้อความ

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ ว่า เป็น Tautology หรือไม่

โดยพิจารณา จากตารางค่าความจริง

p	4	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ซึ่งจะเห็นว่า ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ เป็น Tautology

ดังนั้นการสรุปข้างต้น จึงเป็นการสรุปที่ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 1.3.2 จงพิจารณาว่า การสรุปต่อไปนี้ ถูกต้องหรือไม่

จาก ถ้าดำเป็นชาวสวนแล้ว ดำต้องทำงานหนัก

กับ ดำไม่เป็นชาวสวน

สรุป ดำไม่ต้องทำงานหนัก

วิธีพิจารณา ให้ p แทนข้อความ "ดำเป็นชาวสวน"

q แทนข้อความ "ดำต้องทำงานหนัก"

ดังนั้น การสรุปข้างบนคือ

จาก $p \Rightarrow q$

กับ $\sim p$

สรุป $\sim q$

เราจะพิจารณาข้อความ

$((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$ ว่าเป็น Tautology หรือไม่โดยพิจารณา

จากตารางค่าความจริง

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$	$\sim q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

ซึ่งจะเห็นว่า ข้อความ $((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$ ไม่เป็น **Tautology**

ดังนั้นการสรุปข้างต้นจึงเป็นการสรุปที่<u>ไม่ถูกต้อง</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.3</u> จงพิจารณาว่า การสรุปต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

จาก (1) ถ้า $a^2 = 0$ แล้ว $a = 0$

(2) ถ้า $a^2 \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

(3) แต่ $a \neq 0$

สรุป $a^2 > 0$

<u>วิธีพิจารณา</u> ให้ p แทนข้อความ "$a^2 = 0$"

q แทนข้อความ "$a = 0$"

r แทนข้อความ "$a^2 > 0$"

ดังนั้น การสรุปข้างบนคือ

จาก (1) $p \Rightarrow q$ .....(A_1)

(2) $\sim p \Rightarrow r$ .....(A_2)

(3) $\sim q$ .....(A_3)

สรุป r .....(C)

เราจะพิจารณา ข้อความ

$(((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)) \wedge \sim q) \Rightarrow r$ ว่าเป็น Tautology หรือไม่

โดยพิจารณาจากตารางค่าความจริง

p	q	r	p⇒q	∼p	∼p⇒r	(p⇒q)∧(∼p⇒r)	∼q	((p⇒q)∧(∼p⇒r))∧∼q	(((p⇒q)∧(∼p⇒r)))∧∼q)⇒ r
T	T	T	T	F	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T	F	T

ซึ่งจะเห็นว่า ข้อความ $(((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)) \wedge \sim q) \Rightarrow r$ เป็น Tautology

ดังนั้นการสรุปข้างต้น จึงเป็นการสรุปที่ถูกต้อง

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.3

จงพิจารณาดูว่า การสรุปต่อไปนี้เป็นการสรุปที่ถูกต้องหรือไม่

1. จาก ถ้านายดำกินส้มแล้ว นายดำจะไม่เป็นหวัด
   แต่นายดำไม่ได้กินส้ม

   สรุป นายดำจะเป็นหวัด

2. จาก ถ้าฝนตกแล้ว น้ำย่อมท่วมกรุงเทพฯ และถ้าน้ำท่วมกรุงเทพฯแล้วจราจร ย่อมติดขัด

   สรุป ถ้าฝนตกแล้ว จราจรย่อมติดขัด

3. จาก ถ้าจราจรติดขัดแล้ว รถยนต์จะต้องแล่นช้า ถ้าจราจรไม่ติดขัด ข้าพเจ้าจะไปเรียนหนังสือทันเวลา แต่รถยนต์ต้องแล่นไม่ช้า

   สรุป ฉะนั้น ข้าพเจ้าไปเรียนหนังสือทันเวลา

4. จาก ถ้า $3 \times 3 = 9$ แล้ว $2 \times 3 = 4$
   ถ้า $2 \times 3 = 4$ แล้ว $2 + 3 \neq 5$
   แต่ $2 + 3 = 5$

   สรุป ฉะนั้น $3 \times 3 \neq 9$

5. จาก ถ้าพ่อค้ากักตุนสินค้าแล้วราคาสินค้าย่อมสูงขึ้น ถ้าราคาสินค้าไม่สูงขึ้นแล้ว ชาวบ้านย่อมดีใจ

   สรุป ถ้าพ่อค้าไม่กักตุนสินค้าแล้ว ชาวบ้านย่อมดีใจ

1.4 ตัวแปรและข้อความที่ใช้ตัวแปร

1.4.1 ประโยคเปิด พิจารณาประโยค $2 + 3 = 5$ จะได้ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริงและประโยค $2 + 3 = 0$ เป็นข้อความที่เป็นเท็จ ถ้าเราเขียนแต่เพียง $\boxed{2 + \quad = 5}$ เราจะได้ประโยคที่ไม่สมบูรณ์และไม่ทราบด้วยว่าข้อความนี้เป็นจริงหรือเท็จ เราเรียกประโยค ที่ไม่สมบูรณ์นี้ว่า <u>ประโยคเปิด</u> (Open sentence) นั่นคือ ประโยคเปิดอาจหมายถึงว่าเป็นประโยคที่เปิดโอกาสให้เราเติมอะไรก็ได้ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ แต่ในทางคณิตศาสตร์ เรามักใช้ สัญลักษณ์ เช่น x,y,. . . แทนช่องว่างในประโยคเปิด

ดังนั้น จาก $\boxed{2 + \quad = 5}$ เรามักเขียนเป็น $\boxed{2 + x = 5}$ และ เราเรียกสัญลักษณ์ที่แทนช่องว่างในประโยคเปิดว่า "ตัวแปร" (Variable)

และโดยทั่ว ๆ ไปเราใช้ สัญลักษณ์ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร ในทำนองเดียวกันเราใช้ $P(y)$ แทนประโยคเปิดที่มี y เป็นตัวแปร

อนึ่ง จะสังเกตเห็นว่าประโยคเปิด $P(x)$ ไม่ใช่ข้อความในคณิตศาสตร์ทั้งนี้เพราะเราไม่สามารถหาค่าความจริงของประโยคเปิด $P(x)$ ได้ว่า เป็นจริงหรือเท็จแต่สามารถทำเป็นข้อความในทางคณิตศาสตร์ได้โดยการแทนตัวแปรด้วยชื่อ หรืออีลีเมนต์ ของสิ่งหนึ่งสิ่งใด เราก็จะได้ประโยคที่เป็น ข้อความ เช่น

ถ้าเราแทน x ด้วย 3 ลงในประโยค $2 + x = 5$ เป็น $2 + 3 = 5$ ซึ่งเป็นข้อความในทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าความจริง เป็นจริง (T)

และถ้าเราแทน x ด้วย 10 ลงในประโยค $2 + x = 5$ เป็น $2 + 10 = 5$ ซึ่งก็เป็นข้อความในทางคณิตศาสตร์เช่นกันโดยมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

ดังได้พิจารณามาแล้วว่า ประโยคเปิดจะเป็นจริงถ้าแทนตัวแปรด้วยสิ่งหนึ่ง และอาจจะเป็นเท็จถ้าแทนตัวแปรด้วยอีกสิ่งหนึ่ง <u>สิ่งต่าง ๆ ทั้งหมดที่อยู่ในขอบข่ายที่เราจะนำมาแทนตัวแปรนั้นเราเรียกโดเมน</u> (Domain) หรือยูนิเวอร์ส (Universe)กล่าวคือ "ยูนิเวอร์ส หมายถึง เซ็ตของสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในขอบข่ายของการพิจารณา" โดยปกติเรามักจะกำหนด ยูนิเวอร์สของตัวแปรให้เสมอ แต่ถ้าไม่กำหนดให้ ก็ให้เข้าใจว่า ยูนิเวอร์ส คือ "ทุกสิ่งทุกอย่าง"

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ข้อความที่เราได้จากการแทน x ในประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปรนั้นจะได้ว่าข้อความนั้นอาจจะเป็นจริงหรือเท็จก็ได้

โดยทั่วไป ถ้า $P(x)$ เป็นประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปรเราจะเขียนแทนเซ็ตของสิ่งของทั้งหลายที่เรานำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง คือได้ข้อความที่เป็นจริง ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $\{x \mid P(x)\}$ อ่านว่า "เซ็ตของ x ซึ่ง $P(x)$" หมายถึง "เซ็ตของบรรดาตัวแปร x ทั้งหลาย (ที่อยู่ในยูนิเวอร์ส) ที่แทนลงใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง"

เช่น P(x) คือ "x เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x^2 < 5$ เราได้ว่า ถ้าเราแทน x ด้วย 1 , 2 แล้ว P(x) จะเป็นจริง

เพราะว่า จาก P(x) คือ"x เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x^2 < 5$"

ถ้า x = 1 P(1) คือ " 1 " เป็นจำนวนเต็มบวกและ $1^2 < 5$ จริง

ถ้า x = 2 P(2) คือ " 2 " เป็นจำนวนเต็มบวกและ $2^2 < 5$ จริง

ถ้า x = 3 P(3) คือ " 3 " เป็นจำนวนเต็มบวกและ $3^2 < 5$ ไม่จริง

ถ้า x = 4 P(4) คือ " 4 " เป็นจำนวนเต็มบวกและ $4^2 < 5$ ไม่จริง

เราจะเห็นว่าเลข x ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x^2 < 5$ มี 1 กับ 2 เท่านั้น ดังนั้น เซ็ต $\{x \mid P(x)\}$ ก็คือ $\{1, 2\}$

<u>1.4.2 คำขยายประโยคเปิดที่บอกปริมาณ</u> (Quantifier)

คำขยายนี้จะเป็นสิ่งที่ใช้สำหรับบอกจำนวนของตัวแปรว่ามีเท่าใด ซึ่งแบ่งเป็นสองชนิดคือ

1) <u>Universal quantifiers</u> เป็นคำขยายประโยคเปิดที่ใช้สำหรับบอกจำนวนสิ่งของทั้งหมด เราใช้ สัญลักษณ์ " ∀ " (อ่านว่า for all) แทนข้อความ "สำหรับอีลีเมนต์ทุกตัว"

ถ้าให้ P(x) เป็นประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร เราจะเขียนแทนข้อความ "สำหรับทุก ๆ x P(x)" หรือ "สำหรับ x ทุกตัว P(x)" ได้ด้วย ∀x P(x) อ่านว่า "for all x, P(x)" หรือ "สำหรับทุก ๆ x, P(x)" หรือ "สำหรับ x ทุก ๆ ตัว P(x)"

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.1</u> เราอาจเขียน สัญลักษณ์แทนประโยคที่ว่า "สำหรับ x โดยทุก ๆ x เป็นเลขคู่"

ได้เป็น ∀x | x เป็นเลขคู่

ถ้าให้ P(x) แทน x เป็นเลขคู่จะได้

∀x P(x) อ่านว่า "สำหรับ x ทุก ๆ ตัว x เป็นเลขคู่"

อนึ่งเรากล่าวได้ว่า ประโยค " ∀x P(x) " เป็น "ข้อความในคณิตศาสตร์" เพราะเรา

สามารถจะพิจารณาดูได้ว่า " $\forall x\ P(x)$" มีค่าความจริงเป็นจริง หรือเท็จ

<u>ค่าความจริงของ</u> "$\forall x\ P(x)$"

" $\forall x\ P(x)$ จะเป็นจริงเมื่อนำเอาทุกสิ่งทุกอย่างหรือทุก ๆ อีลีเมนต์ในยูนิเวอร์สมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ <u>P(x) เป็นจริงหมด</u> และ <u>จะเป็นเท็จ</u> เมื่อ<u>มี</u> สิ่งใดสิ่งหนึ่ง หรือบางอีลีเมนต์ในยูนิเวอร์สที่นำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ <u>P(x) เป็นเท็จ</u>

ตัวอย่างที่ 1.4.2 กำหนดให้ยูนิเวอร์ส คือ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} สำหรับแต่ละ P(x) ต่อไปนี้

จงพิจารณาดูว่า " $\forall x\ P(x)$" เป็นจริง หรือเท็จ

1) P(x) คือ $x > 1$

2) P(x) คือ $x^2 + 4 > 0$

3) P(x) คือ $x < 0$

4) P(x) คือ $x + x = x^2$

<u>แนวพิจารณา</u> 1) จาก P(x) คือ $x > 1$ เราจะพบว่า มีอีลีเมนต์บางตัวที่อยู่ในยูนิเวอร์สคือ 1 เมื่อนำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็น เท็จ (เพราะว่า เมื่อแทน $x = 1$ แล้วจะได้ว่า $1 > 1$ เป็นเท็จ)

ดังนั้น $\forall x\ P(x)$ เมื่อ P(x) คือ $x > 1$ <u>เป็นเท็จ</u>

2) จาก P(x) คือ $x^2 + 4 > 0$

เราจะพบว่าสำหรับทุก ๆ อีลี เมนต์ในยูนิ เวอร์ส เมื่อ เรานำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็นจริงทั้งหมด

คือ แทน $x = 1$ ได้ $1^2 + 4 > 0$ เป็นจริง $\therefore$ P(1) เป็นจริง

$x = 2$ ได้ $2^2 + 4 > 0$ เป็นจริง $\therefore$ P(2) เป็นจริง

$x = 3$ ได้ $3^2 + 4 > 0$ เป็นจริง $\therefore$ P(3) เป็นจริง

ในทำนอง เดียวกัน เมื่อแทน x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ลงใน P(X) แล้วทำให้ P(X) เป็นจริงหมด

ดังนั้น $\forall x\ P(x)$ เมื่อ $P(x)$ คือ $x^2 + 4 > 0$ <u>เป็นจริง</u>

3) จาก $P(x)$ คือ $x < 0$

เราจะพบว่ามีอีลีเมนต์บางตัว (ในที่นี้ทุกตัว) ที่อยู่ในยูนิเวอร์ส คือ 1, 2, ...,10 เมื่อนำมาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ เช่น

แทน $x = 1$ ได้ $1 < 0$ เป็นเท็จ $\therefore$ $P(1)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x\ P(x)$ เมื่อ $P(x)$ คือ $x < 0$ <u>เป็นเท็จ</u>

4) จาก $P(x)$ คือ $x + x = x^2$

เราพบว่าเมื่อเราแทน x ด้วย 3 ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ คือ

$P(3)$ คือ $3 + 3 = 3^2$ เป็นเท็จ

นั่นคือ มีบางอีลีเมนต์ที่อยู่ในยูนิเวอร์สที่แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x\ P(x)$ เมื่อ $P(x)$ คือ $x + x = x^2$ <u>เป็นเท็จ</u>

2) <u>Existential Quantifiers</u> เป็นคำขยายประโยคเปิด ที่ใช้สำหรับ "บอกสิ่งของบางอย่าง" เราใช้สัญลักษณ์ " $\exists$ " (อ่านว่า for some) แทนข้อความ "สำหรับอีลีเมนต์บางตัว" หรือ " มีอีลีเมนต์บางตัว"

ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร เราจะเขียนแทนข้อความ "สำหรับอีลีเมนต์ x บางตัวซึ่ง$P(x)$" หรือ "มี x ซึ่ง $P(x)$" อ่าน "$\exists x \ni P(x)$" ว่า"for some x such that $P(x)$" หรือ "สำหรับอีลีเมนต์ x บางตัวซึ่ง $P(x)$" หรือ "มี x ซึ่ง $P(x)$"

<u>ค่าความจริงของ</u> "$\exists x\ P(x)$"

" $\exists x \ni P(x)$ จะ<u>เป็นจริง</u> เมื่อสามาถหาสิ่งต่าง ๆ <u>อย่างน้อยหนึ่งสิ่ง</u> หรือมีอย่างน้อยหนึ่งอีลีเมนต์ใน Universe ที่แทนตัวแปร x ลงใน $P(x)$ แล้วทำให้ <u>$P(x)$ เป็นจริง</u> และจะ<u>เป็นเท็จ</u> เมื่อ<u>ไม่</u>สามารถหาสิ่งใดเลยหรือไม่มีอีลีเมนต์ใด เลยใน Universe ที่แทนตัวแปร x ลงใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริงได้"

ตัวอย่างที่ 1.4.3 กำหนดให้ ยูนิเวอร์ส คือ {1, 2, 3, 4,5,6,7,8,9,10} สำหรับแต่ละ P(x) ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า " $\exists x \ni P(x)$" เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) P(x) คือ $x > 1$
2) P(x) คือ $x^2 + 4 > 0$
3) P(x) คือ $x < 0$
4) P(x) คือ $x + x = x^2$

แนวการพิจารณา

1) จาก P(x) l o x> 1

จะพบว่ามีอีลีเมนต์อย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ในยูนิเวอร์ส (ในที่นี้คือ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) เมื่อนำมาแทนตัวแปร x ใน P(x) แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง

เช่น แทน x = 2 จะได้ว่า 2 > 1 จริง ∴ P(2) เป็นจริง

ดังนั้น 3 x $\ni$P(x) เป็นจริง เมื่อ P(x) do x > 1

2) จาก P(x) คือ $x^2 + 4 > 0$

จะพบว่ามีอีลี เมนต์อย่างน้อย หนึ่งตัวที่อยู่ใน ยูนิ เวอร์ส (ในที่นี้คือทุกตัว ตั้งแต่ 1 ถึง lo) เมื่อนำมาแทนตัวแปร X ใน P(x) แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง

เช่น แทน x = 1 จะได้ว่า $1^2 + 4 > 0$ จริง

ดังนั้น 3 x $\ni$ P(x) เป็นจริง เมื่อ P(x) คือ $x^2 + 4 > 0$

3) จาก P(x) คือ $x < 0$

จะพบว่า ไม่มีอีลีเมนต์ตัวใด เลยที่อยู่ใน ยูนิ เวอร์ส ที่นำมาแทนตัวแปร x ใน P(x) แล้วทำให้ P (x) เป็นจริง (คืออีลีเมนต์ทุกตัวที่อยู่ในยูนิ เวอร์ส เมื่อนำมาแทนตัวแปร x ใน P(x) แล้วทำให้ P(x) เป็น เท็จหมด)

เช่น แทน X = 1 จะได้ว่า 1 < 0 ไม่จริง ∴ P(1) เป็นเท็จ

แทน x = 2 จะได้ว่า 2 < 0 ไม่จริง ∴ P(2) เป็นเท็จ

แทน X = 4 จะได้ว่า 3 < 0 ไม่จริง ∴ P(3) เป็นเท็จ

ในทำนองเดียวกันเมื่อเราแทน $x = 4,5,6,7,8,9,10$ ลงใน $P(x)$ แล้ว

ก็จะทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จทั้งหมด

ดังนั้น $\exists x \ni P(x)$ เมื่อ $P(x)$ คือ $x < 0$ <u>เป็นเท็จ</u>

4) จาก $P(x)$ คือ $x + x = x^2$

จะพบว่า มีอีลีเมนต์อย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ใน ยูนิเวอร์ส(ในที่นี้คือ 2)

เมื่อนำมาแทนตัวแปร x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

เช่น แทน $x = 2$จะได้ว่า $2 + 2 = 2^2$

ดังนั้น $\exists x \ni P(x)$ เมื่อ $P(x)$ คือ $x + x = x^2$ <u>เป็นจริง</u>

จากตัวอย่างทั้งสอง เรานำผลมาเขียนสรุปได้ดังนี้

1) เมื่อ $P(x)$ คือ $x > 1$ เราได้ว่า $\forall x\, P(x)$ เป็นเท็จ และ $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริง

2) เมื่อ $P(x)$ คือ $x^2 + 4 > 0$ จะได้ว่า $\forall x\, P(x)$ เป็นจริงและ $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริง

3) เมื่อ $P(x)$ คือ $x < 0$ เราได้ว่า $\forall x\, P(x)$ เป็นเท็จและ $\exists x \ni P(x)$ เป็นเท็จ

4) เมื่อ $P(x)$ คือ $x + x = x^2$ จะได้ว่า $\forall x\, P(x)$ เป็นเท็จ และ $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริง

<u>**ข้อสังเกต**</u>

1) ถ้า $\forall x\, P(x)$ เป็นจริงแล้ว $\exists x \ni P(x)$ ย่อมเป็นจริงด้วย (ดังเช่นในตัวอย่างข้อที่ 2)

2) ถ้า $\forall x\, P(x)$ เป็นเท็จแล้ว $\exists x \ni P(x)$ มีค่าไม่แน่นอนอาจจะเป็นจริงหรือเท็จก็ได้ (ดังเช่นในตัวอย่างข้อที่ 1 กับข้อที่ 3)

3) ถ้า $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริงแล้ว $\forall x\, P(x)$ มีค่าไม่แน่นอนอาจจะเป็นจริงหรือเท็จก็ได้ (ดังเช่นในตัวอย่างข้อที่ 2 กับที่ 4)

4) ถ้า $\exists x \ni P(x)$ เป็นเท็จแล้ว $\forall x\, P(x)$ มีค่าเป็นเท็จด้วย (ดังเช่นในตัวอย่างข้อที่ 3)

หมายเหตุ จากความรู้ใน เรื่อง ni เชื่อมและข้อความที่ใช้ตัวแปรนี้ เราสามารถเขียนบรรยายความหมาย เกี่ยวกับ เรื่อง เซ็ต บางอย่างได้ คือ

1) $A \subseteq B$ หมายถึง $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

2) $A \cup B$ หมายถึง $\forall x(x \in A \vee x \in B)$

3) $A \cap B$ หมายถึง $\forall x(x \in A \wedge x \in B)$

4) $A - B$ หมายถึง $\forall x(x \in A \wedge x \notin B)$

แบบฝึกหัดเสริมทักษะที่ 1.4

1. ให้ยูนิเวอร์ส คือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ สำหรับประโยคเปิด $P(x)$ ต่อไปนี้ จงพิจารณาดูว่าเซ็ต $\{x \mid P(x)\}$ ประกอบด้วยอะไรบ้างจง เขียนเซ็ตนั้นๆ โดยการแจงอีลีเมนต์

   1.1) $P(x)$ คือ $x^2 > 0$

   1.2) $P(x)$ lo $x^2 + 5x - 6 = 0$

   1.3) $P(x)$ คือ $4x + 1 = x + 3$

   1.4) $P(x)$ คือ $x + 1 < 5$

   1.5) $P(x)$ คือ $x + x = 2x2$

2. ให้ยูนิเวอร์ส คือ $\{1, 2, 3\}$ สำหรับ $P(x)$ แต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า $\forall x P(x)$ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

   2.1) $P(x)$ คือ $x + 1 < 4$

   2.2) $P(x)$ คือ $x + 1 > 0$

   2.3) $P(x)$ คือ x เป็นเลขคู่

   2.4) $P(x)$ คือ $x + 1 = 4$

   2.5) $P(x)$ คือ $x < o$

3. สำหรับแต่ละ $P(x)$ ในโจทย์ข้อ 2 จงพิจารณาดูว่า $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

4. ให้ ยูนิเวอร์สเป็นเซ็ตของจำนวนเต็ม สำหรับแต่ละ $P(x)$ ต่อไปนี้จงพิจารณาว่า $\forall x\ P(x)$ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

   4.1) $P(x)$ คือ $x > 0$

   4.2) $P(x)$ คือ $x^2 + 1 > 0$

   4.3) $P(x)$ คือ $x + x = x$

   4.4) $P(x)$ คือ $x^2 < 0$

   4.5) $P(x)$ คือ $x \neq x$

5. สำหรับแต่ละ $P(x)$ ในโจทย์ข้อ 4 จงพิจารณาดูว่า $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1.5 วิธีพิสูจน์

ในที่นี้เราจะศึกษาถึงหลักเกณฑ์บางประการในการพิสูจน์เพื่อจะได้เป็นเครื่องมือ ที่จะช่วยให้เราสามารถอ่านการพิสูจน์ต่าง ๆ ได้เข้าใจง่ายขึ้น นอกจากนี้ยังอาจจะ ช่วยเป็นแนวทางให้เราสามารถลงมือพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เองได้บ้างก็เป็นได้

<u>แบบของการพิสูจน์ที่สำคัญ ๆ และมักพบบ่อย ๆ</u> สามารถแบ่งได้เป็น 2 พวกใหญ่ ๆ คือ

1. <u>การพิสูจน์โดยตรง</u> มี 5 แบบ คือ

   แบบที่ 1 แบบพิสูจน์ข้อความ $\forall x\ P(x)$

   แบบที่ 2 แบบพิสูจน์ข้อความ $\exists x \ni P(x)$

   แบบที่ 3 แบบพิสูจน์ข้อความ $p \Rightarrow q$

   แบบที่ 4 แบบพิสูจน์ข้อความ $p \wedge q$

   แบบที่ 5 แบบพิสูจน์ข้อความ $p \vee q$

2. <u>การพิสูจน์ทางอ้อม</u> มี 2 แบบคือ

   แบบที่ 1 แบบ Contradiction

   แบบที่ 2 แบบ Contraposition

1.5.1 การพิสูจน์โดยตรง

แบบที่ 1 แบบ $\forall x\, P(x)$

ในการพิสูจน์ว่า $\forall x\; P(x)$ เป็นจริงนี้ เรากระทำการพิสูจน์ได้โดย"แสดงว่าข้อความ $P(x)$ เป็นจริงเสมอ ไม่ว่า x จะเป็นอีลีเมนต์ใด ๆ" ดังนั้นลักษณะการพิสูจน์ จึงมีแบบดังนี้

พิสูจน์ สมมติให้ x เป็นอีลีเมนต์ใด ๆ -------------------- -------------------- -------------------- $\therefore$ $P(x)$ นั่นคือ $\forall x \quad P(x)$

แบบที่ 1

หมายเหตุ สิ่งที่เราละไว้(คือ --- --- ---) นั้น ในที่นี้อาจเป็นข้อความที่เป็นนิยาม,สัจจพจน์, ทฤษฎีบท, ข้อความที่เป็น Tautology หรือข้อความอื่น ๆ ซึ่งจะเป็นสิ่งที่ช่วยให้เราได้ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ (คือข้อความ $P(x)$) ออกมา

แบบที่ 2 แบบ $\exists x \ni P(x)$

ในการที่จะพิสูจน์ว่า $\exists x \ni P(x)$ เป็นจริงนั้น เรากระทำการพิสูจน์ได้โดย "เลือกอีลีเมนต์ x ที่เหมาะสมมาอย่างน้อยหนึ่งตัว แล้วแสดงว่า $P(x)$ เป็นจริงสำหรับ x ที่เลือกมา" ดังนั้นลักษณะของการพิสูจน์จึงมีแบบดังนี้

พิสูจน์ (เลือกอีลีเมนต์ x ที่เหมาะสมมาสักหนึ่งตัว)

$\therefore P(x)$

นั่นคือ $\exists x \ni P(x)$

แบบที่ ๒

แบบที่ ๓ แบบ $p \Rightarrow q$

ในการที่จะพิสูจน์ว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริงนั้น เรากระทำการพิสูจน์ได้โดยสมมุติ p แล้วพยายามแสดงให้ได้ q" ดังนั้นลักษณะการพิสูจน์ จึงมีแบบ ดังนี้

พิสูจน์ สมมติ p

--B-s-------

$\therefore q$

นั่นคือ $p \Rightarrow q$

แบบที่ ๓

แบบที่ 4 แบบ $p \wedge q$

ในการที่จะพิสูจน์ว่า $p \wedge q$ เป็นจริง เรากระทำการพิสูจน์ได้ "โดยแสดงให้ได้ p กับให้ได้ q" ดังนั้นลักษณะของการพิสูจน์ จึงมีแบบดังนี้

พิสูจน์ ------------

$\therefore$ P

$\therefore$ q

นั่นคือ $p \wedge q$

แบบที่ 4

แบบที่ 5 แบบ $p \vee q$

ในการพิสูจน์ว่า $p \vee q$ เป็นจริง เรากระทำการพิสูจน์ได้โดย "การสมมติว่า $\sim p$ แล้วแสดงให้ได้ q (คือแสดงว่าถ้าไม่ใช่ p ก็ต้องเป็น q) หรือจะแสดงโดยการสมมติ $\sim q$ แล้วแสดงให้ได้ p ก็ได้" ดังนั้นลักษณะการพิสูจน์จึงมีแบบ ดังนี้

พิสูจน์	สมมุติ $\sim p$

	$\therefore q$
	นั่นคือ $p \vee q$

แบบที่ 5.1

หรือ

พิสูจน์	สมมุติ $\sim q$

	$\therefore p$
	นั่นคือ $p \vee q$

แบบที่ 5.2

1.5.2 การพิสูจน์ทางอ้อม

แบบที่ 1 แบบ Contradiction

ในการที่จะพิสูจน์ว่า ข้อความ p เป็นจริง โดยใช้การพิสูจน์แบบ Contradiction นั้น กระทำการพิสูจน์ได้ "โดยสมมุติ ~p เป็นจริง แล้วแสดงว่าได้ Contradiction (คือเกิดข้อขัดแย้ง) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า p เป็นจริง

ดังนั้นลักษณะของการพิสูจน์ จึงมีแบบดังนี้

<u>พิสูจน์</u> สมมุติ $\sim p$

$\therefore$ Contradiction

นั่นคือ p

แบบที่ 1

<u>แบบที่ 2 แบบ Contraposition</u>

ในการที่จะพิสูจน์ว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริงกระทำการพิสูจน์ "โดยสมมุติ $\sim q$ แล้ว แสดงให้ได้ $\sim p$" (เราเรียกการพิสูจน์แบบนี้ว่าแบบ Contraposition)

ดังนั้น ลักษณะของการพิสูจน์ จึงมีแบบดังนี้

<u>พิสูจน์</u> สมมุติ $\sim q$

$\therefore \sim p$

นั่นคือ $p \Rightarrow q$

แบบที่ 2

ข้อสังเกต โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ในการพิสูจน์ ทฤษฎีบทใดบทหนึ่ง หรือข้อความใดข้อความหนึ่ง เราอาจจะต้องใช้การพิสูจน์หลาย ๆ แบบ ประกอบกันไปก็ได้

ตัวอย่างที่ 1.5.1 จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq (A \cup B)$

(ให้ 1) $A \subseteq B$ หมายถึง $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

2) $x \in A \cup B$ หมายถึง $(x \in A \vee x \in B)$)

การพิสูจน์ เราจะดำเนินการเป็นขั้น ๆ ดังนี้

ขั้นที่ 1 ในการพิสูจน์ข้อความใด ๆ เราก็ควรจบการพิสูจน์ลงด้วยข้อความที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ คือข้อความ

พิสูจน์ - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - -

นั่นคือ $A \subseteq (A \cup B)$

ขั้นที่ 2 เราจะเห็นว่า ก่อนที่เราจะได้ข้อความว่า $A \subseteq A \cup B$ เราจะต้องมีข้อความ $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$ เสียก่อน

ดังนั้น แบบการพิสูจน์จากขั้นที่ 1 จึงกลาย เป็น

พิสูจน์ - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - -

$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$

นั่นคือ $A \subseteq (A \cup B)$

ขั้นที่ 3 เนื่องจากข้อความ $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$ เป็นข้อความในรูป $\forall x P(x)$ โดย $P(x)$ คือ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ เราจึงใช้การพิสูจน์ตามแบบของ "$\forall x\ P(x)$" ได้เป็น

พิสูจน์ สมมุติ x เป็นอีลีเมนต์ใด ๆ

$\therefore$ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

$\therefore$ $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$

นั่นคือ $A \subseteq (A \cup B)$

ขั้นที่ 4 เนื่องจากข้อความ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ เป็นข้อความในรูป $p \Rightarrow q$ (โดย p คือ $x \in A$, q คือ $x \in A \cup B$) เราจึงใช้การพิสูจน์ตามแบบ "$p \Rightarrow q$" ต่อได้เป็น

พิสูจน์ สมมุติ x เป็นอีลีเมนต์ใด ๆ

สมมุติ $x \in A$

$\therefore$ $x \in A \cup B$

นั่นคือ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

$\therefore$ $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$

นั่นคือ $A \subseteq (A \cup B)$

ขั้นที่ 5 เราจะใช้ความรู้อื่น ๆ มาช่วยทำการพิสูจน์ในส่วนที่ละเอาไว้จนได้ผลที่สอดคล้องต่อเนื่องกัน ดังนั้น การพิสูจน์ จึงกระทำให้สมบูรณ์ได้ ดังนี้

พิสูจน์ ให้ x เป็นอีลีเมนต์ใด ๆ (3)

สมมุต $x \in A$ (5)

$\because$ $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (7) (เป็น Tautology ซึ่งอยู่ในรูป $p \Rightarrow (p \vee q)$)

$\therefore$ $x \in A \vee x \in B$ (8)

$\because$ $x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$ (9) (ตามความหมายของ A U B)

$\therefore$ $x \in A \cup B$ (6)

$\therefore$ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ (4)

$\therefore$ $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B)$ (2)

นั่นคือ $A \subseteq (A \cup B)$ (1)

ตัวเลข (1),(2),(3),...,(9) เขียนเพื่อแสดงให้เห็นว่า ข้อความบันทัดใดได้มาก่อนหรือหลัง โดย (1) หมายถึงว่า บันทัดนั้น ได้มาเป็นบันทัดแรก (2) หมายถึงว่าบันทัดนั้นได้มาเป็นบันทัดที่สอง

อนึ่ง ในการที่เราจะกระทำการพิสูจน์ข้อความใด ๆ เพื่อความเป็นระเบียบและสวยงาม เราควรจะร่าง หรือทำการพิสูจน์ในเศษกระดาษเป็นขั้น ๆ ก่อน เสร็จแล้วจึงนำมาเขียนรวมให้ข้อความต่อเนื่องกันไป ดังตัวอย่างข้างต้น