บทที่ 8
แคลคูลัสเบื้องต้น
(Calculus)

คำนำ

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งมีความสำคัญมาก ซึ่งใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูงสาขาอื่น ๆ หรือนำเอาไปประยุกต์แก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ เช่น ในทางเศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ หรือดาราศาสตร์ เป็นต้น การศึกษาแคลคูลัสจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ เช่น มีแรงมากระทำกับวัตถุซึ่งกำลังเคลื่อนที่แล้วทำให้เกิดความเร่ง เป็นต้น ดังนั้นการศึกษาแคลคูลัสเบื้องต้นจึงควรจะศึกษาเรื่องสำคัญ ๆ 2 เรื่อง คือ อนุพันธ์ และอินทิกรัล ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับลิมิตดังนี้

8.1 ลิมิต (Limits)

ในที่นี้จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณาจากตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 ถ้า $f(x) = x+3$ จะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 แต่ $x \neq 3$ กำหนดค่า x เข้าใกล้ 3 ดังตารางต่อไปนี้

x	3.10	3.01	3.001	3.0001	2.9999	2.999	2.99	2.9
f(x)	6.10	6.01	6.001	6.0001	5.9999	5.999	5.99	5.9

จะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 3 มากเพียงใด f(x) จะเข้าใกล้ 6 มากขึ้น ในกรณีนี้จะกล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 3 มีค่าเท่ากับ 6 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

ข้อสังเกต

การหาลิมิตของฟังก์ชันและการหาค่าของฟังก์ชันไม่เหมือนกัน เพราะการหาลิมิตของฟังก์ชัน ค่า x ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 3 นำมาใช้ในการพิจารณาหาลิมิตได้ ยกเว้น $x = 3$ ค่าเดียว แต่การหาค่าของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ $x = 3$ ซึ่งจะได้ $f(3) = 6$ เราใช้ค่า x เป็น 3 ค่าเดียวเท่านั้น ในที่นี้ค่าของฟังก์ชันและค่าลิมิตของฟังก์ชันเท่ากัน แต่ถ้ากำหนด f(x) ใหม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้จะเห็นชัดเจนยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 2 $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

จะเห็นว่า f(3) หาค่าไม่ได้

แต่เมื่อ $x \neq 3$ $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x+3$

ซึ่งจะได้ว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 3 f(x) มีค่าเข้าใกล้ 6 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าลิมิตของ f(x) เท่ากับ 6 นั่นเอง

นิยามของลิมิต

กล่าวโดยทั่วไป L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จะหมายถึง

1. ถ้าเลือก x มีค่าเข้าใกล้ a มากพอ เราสามารถทำให้ f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น
2. เราไม่พิจารณาถึงว่าที่ x = a ค่าของ f(x) จะหาได้หรือไม่

จากข้อ 1 ที่ว่า f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันมาก ปัญหาคือเท่าใดจึงจะพอ ถ้าบอกว่าให้ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{2}$ ได้หรือไม่เราก็ตอบว่าได้ หรือบอกว่าให้ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ ก็ยังตอบว่าได้ คือไม่ว่าเลขบวกอะไรก็จะตอบว่าได้เหมือนกันหมด ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเลขตัวใดตัวหนึ่งให้ (จำนวนจริงบวก) จะบอกได้ทันทีว่า ถ้าเลือก x เข้าใกล้ a มากพอ เราสามารถทำให้ผลต่างของ f(x) กับ L น้อยกว่าเลขจำนวนจริงบวกตัวนั้นได้

นั่นคือถ้าให้เลขจำนวนจริงบวกจำนวนนั้นคือ ε (epsilon) เราสามารถเอา ε มาคำนวณหาเลขจำนวนจริงบวกอีกตัวหนึ่ง สมมุติว่าเป็น δ (delta) แล้วค่าของ f(x) กับ L จะต่างกันน้อยกว่า ε (ตัวที่กำหนดให้) อย่างแน่นอน เพียงแต่ใช้ค่า x ต่างจาก a น้อยกว่า δ (ที่เราหาได้) ดังนั้นจะได้นิยามของลิมิตดังนี้

นิยามที่ 1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึงทุกค่า $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะสามารถหา $\delta > 0$ ได้ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x-a| < \delta$

8.2 การหาค่าของลิมิต

การหาค่าของลิมิตโดยอาศัยนิยามค่อนข้างยุ่งยาก แต่ถ้าอาศัยทฤษฎีบทจะช่วยให้สะดวกและง่ายขึ้น

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $f(x) = c$ (c เป็นค่าคงที่ใด ๆ) จะได้

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ จะได้

(1) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

(2) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L.M$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทที่ 3 ข้อ (2) ถ้า $g(x) = c$ (ค่าคงที่) ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} c.f(x) = c.L$$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ เหล่านี้อาศัยนิยามของลิมิต แต่ในที่นี้จะเว้นการพิสูจน์

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} 5x$

วิธีทำ $\lim_{x\to 2} 5x = \left(\lim_{x\to 2} 5\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)$

$= (5)(2) = 10$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1} x^2-2x+3$

วิธีทำ $\lim_{x\to -1} x^2-2x+3 = \lim_{x\to -1} x^2 - \lim_{x\to -1} 2x + \lim_{x\to -1} 3$

$= \left(\lim_{x\to -1} x\right)\left(\lim_{x\to -1} x\right) - 2\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 3$

$= (-1)(-1) - 2(-1) + 3$

$= 1+2+3 = 6$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} (x+3)(x-2)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 0} (x+3)(x-2) = \left[\lim_{x\to 0} (x+3)\right]\left[\lim_{x\to 0} (x-2)\right]$

$= \left[\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 3\right]\left[\lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 2\right]$

$= [0+3][0-2] = -6$

$$= \quad \overset{x\to 4}{} \lim_{x\to 4} \overset{x\to 4}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(3)(16)-4}{2} = 22$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$ --

$$= \quad \$x^2+2x+4=4+4+4- \quad 12$$