บทที่ 8
แคลคูลัสเบื้องต้น
(Calculus)

คำนำ

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งมีความสำคัญมาก ซึ่งใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูงสาขาอื่น ๆ หรือนำเอาไปประยุกต์แก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ เช่น ในทางเศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ หรือดาราศาสตร์ เป็นต้น การศึกษาแคลคูลัสจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ เช่น มีแรงมากระทำกับวัตถุซึ่งกำลังเคลื่อนที่แล้วทำให้เกิดความเร่ง เป็นต้น ดังนั้นการศึกษาแคลคูลัสเบื้องต้นจึงควรจะศึกษาเรื่องสำคัญ ๆ 2 เรื่อง คือ อนุพันธ์ และอินทิกรัล ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับลิมิตดังนี้

8.1 ลิมิต (Limits)

ในที่นี้จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณาจากตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 ถ้า $f(x) = x+3$ จะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 แต่ $x \neq 3$ กำหนดค่า x เข้าใกล้ 3 ดังตารางต่อไปนี้

x	3.10	3.01	3.001	3.0001	2.9999	2.999	2.99	2.9
f(x)	6.10	6.01	6.001	6.0001	5.9999	5.999	5.99	5.9

จะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 3 มากเพียงใด $f(x)$ จะเข้าใกล้ 6 มากขึ้น ในกรณีนี้จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 มีค่าเท่ากับ 6 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

ข้อสังเกต

การหาลิมิตของฟังก์ชันและการหาค่าของฟังก์ชันไม่เหมือนกัน เพราะการหาลิมิตของฟังก์ชัน ค่า x ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 3 นำมาใช้ในการพิจารณาหาลิมิตได้ ยกเว้น $x = 3$ ค่าเดียว แต่การหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x = 3$ ซึ่งจะได้ $f(3) = 6$ เราใช้ค่า x เป็น 3 ค่าเดียวเท่านั้น ในที่นี้ค่าของฟังก์ชันและค่าลิมิตของฟังก์ชันเท่ากัน แต่ถ้ากำหนด $f(x)$ ใหม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้จะเห็นชัดเจนยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 2 $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

จะเห็นว่า f(3) หาค่าไม่ได้

แต่เมื่อ $x \neq 3$ $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x+3$

ซึ่งจะได้ว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 3 f(x) มีค่าเข้าใกล้ 6 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าลิมิตของ f(x) เท่ากับ 6 นั่นเอง

นิยามของลิมิต

กล่าวโดยทั่วไป L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จะหมายถึง

1. ถ้าเลือก x มีค่าเข้าใกล้ a มากพอ เราสามารถทำให้ f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น

2. เราไม่พิจารณาถึงว่าที่ x = a ค่าของ f(x) จะหาได้หรือไม่

จากข้อ 1 ที่ว่า f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันมาก ปัญหาคือเท่าใดจึงจะพอ ถ้าบอกว่าให้ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{2}$ ได้หรือไม่เราก็ตอบว่าได้ หรือบอกว่าให้ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ ก็ยังตอบว่าได้ คือไม่ว่าเลขบวกอะไรก็จะตอบว่าได้เหมือนกันหมด ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเลขตัวใดตัวหนึ่งให้ (จำนวนจริงบวก) จะบอกได้ทันทีว่า ถ้าเลือก x เข้าใกล้ a มากพอ เราสามารถทำให้ผลต่างของ f(x) กับ L น้อยกว่าเลขจำนวนจริงบวกตัวนั้นได้

นั่นคือถ้าให้เลขจำนวนจริงบวกจำนวนนั้นคือ ε (epsilon) เราสามารถเอา ε มาคำนวณหาเลขจำนวนจริงบวกอีกตัวหนึ่ง สมมุติว่าเป็น δ (delta) แล้วค่าของ f(x) กับ L จะต่างกันน้อยกว่า ε (ตัวที่กำหนดให้) อย่างแน่นอน เพียงแต่ใช้ค่า x ต่างจาก a น้อยกว่า δ (ที่เราหาได้) ดังนั้นจะได้นิยามของลิมิตดังนี้

นิยามที่ 1 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึงทุกค่า $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะสามารถหา $\delta > 0$ ได้ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x-a| < \delta$

8.2 การหาค่าของลิมิต

การหาค่าของลิมิตโดยอาศัยนิยามค่อนข้างยุ่งยาก แต่ถ้าอาศัยทฤษฎีบทจะช่วยให้สะดวกและง่ายขึ้น

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = a$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $f(x) = c$ (c เป็นค่าคงที่ใด ๆ) จะได้

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ จะได้

(1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = L.M$

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทที่ 3 ข้อ (2) ถ้า $g(x) = c$ (ค่าคงที่) ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} c.f(x) = c.L$$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ เหล่านี้อาศัยนิยามของลิมิต แต่ในที่นี้จะเว้นการพิสูจน์

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} 5x$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2} 5x = \left(\lim_{x\to 2} 5\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)$$

$$= (5)(2) = 10$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -1} x^2-2x+3$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to -1} x^2-2x+3 = \lim_{x\to -1} x^2 - \lim_{x\to -1} 2x + \lim_{x\to -1} 3$$

$$= \left(\lim_{x\to -1} x\right)\left(\lim_{x\to -1} x\right) - 2\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 3$$

$$= (-1)(-1) - 2(-1) + 3$$

$$= 1+2+3 = 6$$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} (x+3)(x-2)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0} (x+3)(x-2) = \left[\lim_{x\to 0} (x+3)\right]\left[\lim_{x\to 0} (x-2)\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 3\right]\left[\lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 2\right]$$

$$= [0+3][0-2] = -6$$

ตัวอย่าง 6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x^2 - x}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2 - x}{\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} (3x^2 - x)}{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 4} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\lim\limits_{x\to 4} x^2 - \lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(3)(16)-4}{2} = 22$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$$

$$= \$x^2+2x+4 = 4+4+4 - \quad 12$$

ตัวอย่าง 8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x มีค่ามาก

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่ามากขึ้น f(x) จะมีค่าน้อยลงเข้าใกล้ศูนย์ทุกที ซึ่งในที่นี้จะกล่าวว่า ลิมิตของ $\frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าใกล้อนันต์ (infinity) มีค่าเท่ากับ 0 และใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

ความหมายของ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ หมายถึง ถ้า x มีค่ามากพอเราสามารถทำให้ f(x) และ L มีค่าใกล้กันมากเพียงใดก็ได้ ซึ่งจะให้นิยามได้ดังนี้

นิยามที่ 2 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ หมายถึงทุกค่า $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมีเลขจำนวนจริง $N > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)-L| < \varepsilon$ ถ้า $x > N$

การหาค่าของลิมิตเมื่อ x มีค่ามาก

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty} 3 + \frac{1}{x^2}$

วิธีทำ จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่ามาก x^2 มีค่ามากด้วย

แต่ $\frac{1}{x^2}$ มีค่าน้อยมาก (เกือบเท่ากับศูนย์)

$$\therefore \lim_{x \to \infty} 3 + \frac{1}{x^2} = 3$$

ตัวอย่าง 10 จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x - 3x^2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5x+1}{x-3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 3}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} 1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} - 3}$$

$$= \frac{1+0+0}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 11 จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{5x^2+2x-1}}{x-3}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{5x^2+2x-1}}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{5 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{3}{x}}$$

$$= \sqrt{5}$$

ในการหาค่าของลิมิตอาจจะเกิดกรณีที่เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a หรือเมื่อ x มีค่ามากเข้าใกล้อนันต์ แต่ f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อย ๆ ไม่มีขอบเขตจำกัด กรณีเช่นนี้จะถือว่าไม่มีลิมิตหรือหาลิมิตไม่ได้ การที่เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f(x) หาลิมิตได้ จะหมายถึงสามารถหาค่าได้เป็นเลขจำนวนจริง L เท่านั้น

ตัวอย่าง 12 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

วิธีทำ จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $\frac{1}{x^2}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่มีขอบเขตจำกัด

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

ซึ่งกล่าวว่าหาลิมิตไม่ได้

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นจริงโดยอาศัยทฤษฎีลิมิต

(ก) $\lim_{x\to 1} 7x - 3 = 4$

(ข) $\lim_{x\to -2} x^2+x-4 = -2$

(ค) $\lim_{x\to 4} \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{4}$

(ง) $\lim_{x\to -4} |x+4| = 0$

(จ) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} = \frac{1}{5}$

(ฉ) $\lim_{x\to \infty} \frac{2-x}{2x+1} = \frac{-1}{2}$

(ช) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+2x}{x^4+5x^2+3} = 0$

2. จงหาค่าของ

(fl) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(ข) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{3-x}$

(ค) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

(ง) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+4}}{x+2}$

(จ) $\lim_{x\to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{e+dx^2}$

(ฉ) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x^2}$

3. ถ้า $f(x) = x^2$ จงแสดงว่า

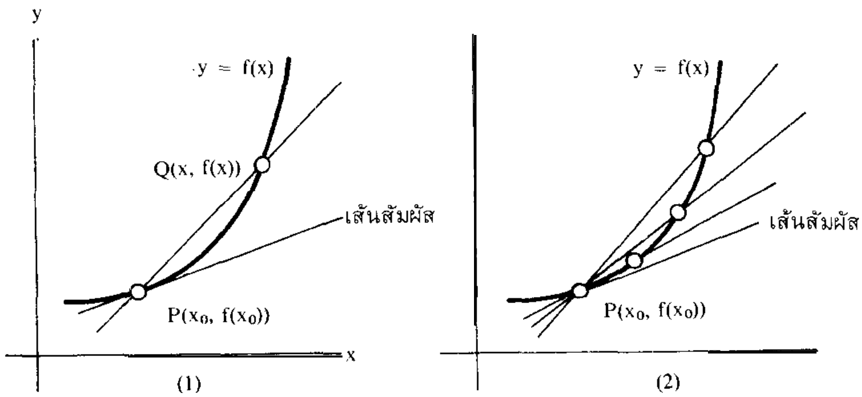
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

8.3 อนุพันธ์ (Derivatives)

การศึกษาถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายเรื่อง เช่น การหาความชันของเส้นสัมผัส ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เป็นต้น ดังนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงความหมายของ "อนุพันธ์" ในขั้นแรกจะศึกษาปัญหาของความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และปัญหาเกี่ยวกับความเร็วเพื่อช่วยให้มีแนวความคิดต่อความหมายอย่างกว้างของอนุพันธ์

ความชันของเส้นสัมผัส

ถ้ามีสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป



ในที่นี้ต้องการหาความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ซึ่งมีโคออร์ดิเนต $(x_0, f(x_0))$ กำหนดให้ $Q(x, f(x))$ เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนกราฟ ดังนั้น

ความชันของเส้นตรง PQ $= m_{PQ} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ถ้าให้ Q เคลื่อนไปตามเส้นโค้งเข้าหาจุด P เส้นตรง PQ ก็จะเคลื่อนเข้าสู่ตำแหน่งของเส้นสัมผัสดังรูป (2) เมื่อ Q เข้าใกล้ P มากขึ้น ความชันของเส้น PQ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสที่ P นั่นคือ

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{Q \to P} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

เมื่อ $Q \to P$ จะได้ $x \to x_0$

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

นิยามที่ 3 ความชัน $m(x_0)$ ของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, y_0)$ คือ

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 13 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2$ ที่จุด $(-1, 3)$

วิธีทำ ในที่นี้ $x_0 = -1$

$$m(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$f(x) = 3x^2$ และ $f(-1) = 3(-1)^2 = 3$

ดังนั้น
$$m(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2-3}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{3(x^2-1)}{(x+1)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x+1)}$$
$$= \lim_{x \to -1} 3(x-1) = -6$$

$\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(-1, 3) = -6$

ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว (Velocity)

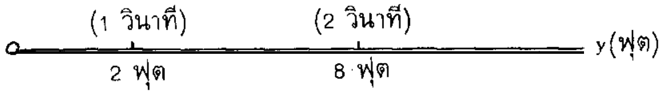
ความเร็ว ณ เวลา t (instantaneous velocity)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง สมมุติว่าวัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปบนแกน y ค่าของ y จะบอกระยะทางที่วัตถุนั้นอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง และค่าของ y เป็นฟังก์ชันของเวลา t ให้ $y = f(t)$

ถ้า t และ t_1 เป็นเวลาที่ต่างกัน จะเรียกอัตราส่วน $\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1 - t}$ **ว่าความเร็วเฉลี่ย** (average velocity)

ตัวอย่าง 14 วัตถุเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง และมีสมการการเคลื่อนที่เป็น $y = 2t^2$ ฟุต จงหาความเร็วเฉลี่ย

วิธีทำ จะเห็นว่าหลังจากเวลาผ่านไป 1 วินาที วัตถุเคลื่อนที่ไปได้เท่ากับ $y(1) = 2$ ฟุต และหลังจากเวลาผ่านไป 2 วินาที วัตถุเคลื่อนที่ไปได้เท่ากับ $y(2) = 2(2)^2 = 8$ ฟุต ดังรูป



ดังนั้นเราสามารถหาความเร็วของวัตถุระหว่างเวลาที่ต่างกันคือ $t = 1$ และ $t = 2$ ได้

ความเร็วเฉลี่ย $= \dfrac{y(1)-y(2)}{2-1} = \dfrac{8-2}{2-1} = 6$ ฟุต/วินาที

แต่ถ้าต้องการหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t เช่น $t = 2$ จะหาจากความเร็วเฉลี่ยไม่ได้ เพราะ t_1-t_2 ซึ่งเป็นตัวหารมีค่าเป็นศูนย์

พิจารณาความเร็วเฉลี่ยเมื่อ $t = 2$ ถึง $t = 3$ เท่ากับ $\dfrac{18-8}{3-2} = 10$ ฟุต/วินาที

ดังนั้นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา $t = 2$ จะอยู่ระหว่าง 6 ถึง 10 ฟุต/วินาที ถ้าพิจารณา t เข้าใกล้ 2 เช่น $t = 1.9$ หรือ $t = 2.1$ จะเห็นว่า

ความเร็วเฉลี่ย เมื่อ $t = 1.9$ ถึง $t = 2$ เท่ากับ 7.8 ฟุต/วินาที และ

ความเร็วเฉลี่ยเมื่อ $t = 2$ ถึง $t = 2.1$ เท่ากับ 8.2 ฟุต/วินาที

ดังนั้นจะเห็นว่าเมื่อ t เข้าใกล้ 2 มาก ๆ เราสามารถหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา $t = 2$ ได้ เพราะค่าของความเร็วเฉลี่ยจะมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งจะได้นิยาม ดังนี้

นิยามที่ 4 ถ้ามีสมการการเคลื่อนที่เป็น $y = f(t)$ ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา $t = t_0$ จะนิยามโดย

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

จากตัวอย่าง 14 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v(2) &= \lim_{t\to 2} \frac{2t^2-8}{t-2} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{2(t^2-4)}{t-2} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{2(t-2)(t+2)}{(t-2)} \\ &= \lim_{t\to 2} 2(t+2) = \mathbf{8} \text{ ฟุต/วินาที} \end{aligned}$$

ความหมายของอนุพันธ์

จากความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ x_0

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

และความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t_0

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

จะเห็นว่าการหา $m(x_0)$ และ $v(t_0)$ มีสูตรคล้าย ๆ กัน นอกจากปัญหาของความชันเส้นสัมผัสและความเร็วแล้ว ยังมีปัญหาอื่น ๆ ซึ่งต้องหาคำตอบได้ในลักษณะอย่างเดียวกัน ดังนั้นเราจะศึกษาถึงอนุพันธ์ซึ่งรวมปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ได้

นิยามที่ 5 ผลหารของความแตกต่าง (difference quotient) ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ x_0 คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

นิยามที่ 6 ถ้าลิมิตผลหารของความแตกต่างหาค่าได้ เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 แล้ว ค่าของลิมิตจะเรียกว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน** $f(x)$ ที่ x_0 และใช้สัญลักษณ์ $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

นิยามของอนุพันธ์อาจจะอยู่ในรูปอื่นได้เช่น ถ้าให้ $x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

อนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ จะเขียนได้เป็น

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

นอกจากสัญลักษณ์ $f'(x)$ แล้วอาจจะใช้สัญลักษณ์ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ $D_x f(x)$ แทน $f'(x)$ ได้

ตัวอย่าง 15 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2$

วิธีทำ $$f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2x^2 + 4hx + 2h^2$$

$$f'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2(2x+h) = 4x$$

ตัวอย่าง 16 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt{x}$ เมื่อ $x > 0$

วิธีทำ $$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) \quad f(x)}{x_1 \quad x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $x = 0$

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{\sqrt{x_1}}{x_1} \quad \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

ซึ่ง $\lim_{x_1 \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_1}} = f'(0)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้นกล่าวว่าฟังก์ชันไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น สำหรับทฤษฎีบทเหล่านี้จะเว้นการพิสูจน์

กฎทางพีชคณิตของอนุพันธ์

ทฤษฎีบท ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g ที่ x หาค่าได้จะได้ว่า

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$
5. $(cf)'(x) = cf'(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที

8.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ทฤษฎีบท

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

4. $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = nf^{n-1}(x)\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 17 จงหาอนุพันธ์ของ $y = 2x^3-3x^2+5x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^3-3x^2+5x)\\ &= \frac{d}{dx}(2x^3)-\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(5x)\\ &= 2\frac{d}{dx}(x^3)-3\frac{d}{dx}(x^2)+5\frac{d}{dx}(x)\\ &= 2(3x^2)-3(2x)+5\\ &= 6x^2-6x+5\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 18 จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{3/4}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{3/4})\\ &= \frac{3}{4}x^{-1/4}\\ &= \frac{3}{4x^{1/4}}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 19 จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{4/3}+\frac{1}{x^2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{4/3}+\frac{1}{x^2})\\ &= \frac{d}{dx}(x^{4/3}+x^{-2})\\ &= \frac{4}{3}x^{1/3}+(-2)x^{-3}\\ &= \frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 20 จงหาอนุพันธ์ของ $y = (x+\sqrt{x})^2$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})^2$$

$$= 2(x+\sqrt{x})\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})$$

$$= 2(x+\sqrt{x})(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

ตัวอย่าง 21 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)$$

$$\frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2-1)\right](x^3+2)-(x^2-1)\left[\frac{d}{dx}(x^3+2)\right]}{(x^3+2)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x3+\ 2)-(x^2-1)(3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{3x^2+4x-x^4}{(x^3+2)^2}$$

ตัวอย่าง 22 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = \frac{x^3}{3}$ ที่จุด $(2, \frac{8}{3})$

วิธีทำ

$$y = \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= x^2$$

$$\therefore y'(x) = x^2$$

$$y'(2) = 2^2 = 4$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสกราฟ = 4

แบบฝึกหัด

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยอาศัยทฤษฎีบท

(ก) $y = 3-5x$

(ข) $y = ax^2+bx^3$ a และ b เป็นค่าคงที่

(ค) $y = x^{1/2}+2$

(ง) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$

(จ) $y = \dfrac{3-2x}{4+5x}$

(ฉ) $y = 3x^{1/2} - 4x^{1/3}+2$

(a) $y = (x^{1/3}+2)^2$

(ซ) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

(RI) $y = (2x+1)(3x-1)$

2. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดที่กำหนดให้

(ก) $y = 2x^2-4x+3$ ที่จุด (1, 1)

(ข) $y = 2x - \dfrac{1}{x}$ ที่จุด (-1, -1)

3. จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ของ

(ก) $y = 2t^2+5t-3$, $t = 2$

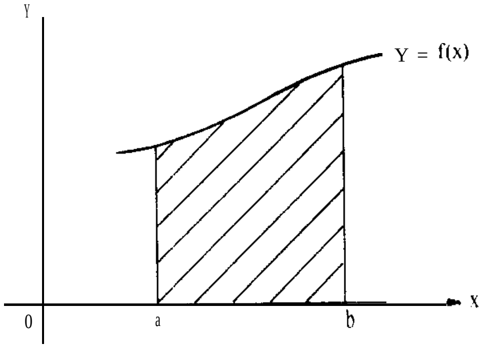
(ข) $y = t^3-3t^2$, $t = 3$

8.5 การอินทิเกรต

ดังได้กล่าวแล้วว่าการศึกษาแคลคูลัสจะเกี่ยวข้องกับเรื่องใหญ่ ๆ 2 เรื่อง ซึ่งในหัวข้อที่ผ่านมาได้ศึกษาถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแคลคูลัสอินทิกรัล (integral calculus) ก่อนอื่นจะกล่าวถึงการหาพื้นที่ และปัญหาระยะทางและความเร็ว เพื่อเป็นแนวทางไปสู่ความหมายของอินทิกรัลของฟังก์ชันเช่นเดียวกับในเรื่องของอนุพันธ์

การหาพื้นที่ (The Area Problem)

สำหรับการหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมอาจจะหาได้ง่ายกว่ารูปอื่น โดยเฉพาะอย่างยิ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือสี่เหลี่ยมจตุรัส แต่ถ้าพิจารณาการหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟ $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, แกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูป การหาพื้นที่จะยากขึ้น



ตัวอย่าง 23 ถ้าต้องการหาพื้นที่ของบริเวณ A ซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = x^2 + 1$, แกน x บน ช่วง $0 \leqslant x \leqslant 2$

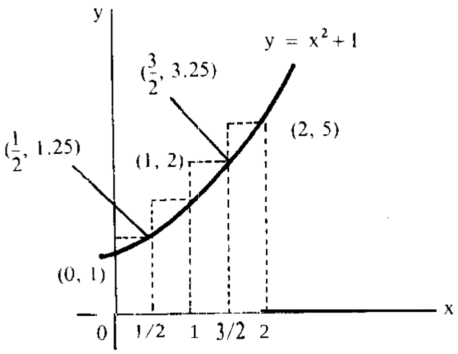
วิธีหนึ่งซึ่งจะประมาณพื้นที่ของบริเวณนี้ได้โดยการแบ่งพื้นที่นี้ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ บน [0, 2] แล้วหาผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งในที่นี้เราแบ่งช่วง [0, 2] บนแกน x ออกเป็นสี่ส่วนย่อย ๆ เท่า ๆ กัน

วิธีที่ 1 ถ้าให้ความสูงของแต่ละรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นจุดสูงสุดของ f ในแต่ละช่วงย่อย ดังรูปที่ 1

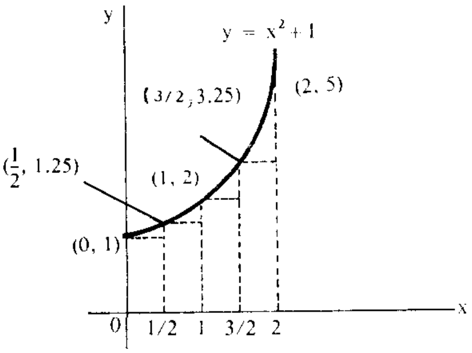
ดังนั้นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเป็น $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(2)$ และด้านกว้างเท่ากันคือ 0.5

$$\therefore \text{ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า } = f(\tfrac{1}{2})(0.5) + f(1)(0.5) + f(\tfrac{3}{2})0.5 + f(2)(0.5)$$

$$= 0.5(1.25 + 2 + 3.25 + 5) = 5.75$$



รูปที่ 1



รูปที่ 2

ซึ่งจะเห็นว่าผลบวกของพื้นที่นี้จะมากกว่าพื้นที่ของบริเวณ A มาก เนื่องจากบริเวณ A อยู่ในรูปผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

วิธีที่ 2 ถ้าให้ความสูงของแต่ละรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นจุดต่ำสุดของ f ในแต่ละช่วงย่อย ดังรูป (2) ดังนั้นความสูงจะเป็น $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$ และด้านกว้างเท่าเดิมคือ 0.5

ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= 0.5(1+1.25+2+3.25) = 3.75$

ซึ่งผลบวกของพื้นที่นี้จะน้อยกว่าพื้นที่ A เพราะเป็นเพียงส่วนหนึ่งของ A เท่านั้น

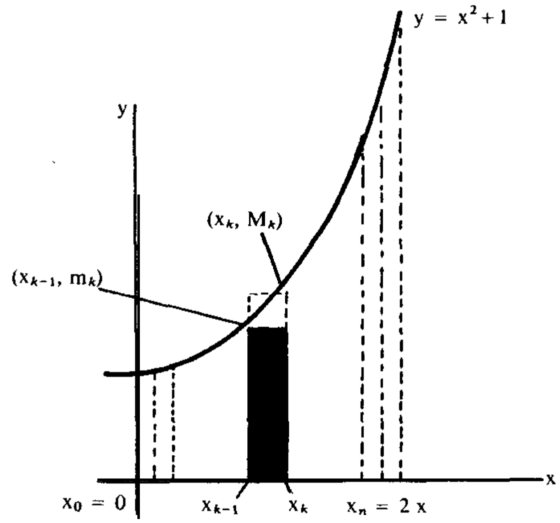
จากทั้ง 2 วิธีเราทราบว่า

$$3.75 \leqslant A \leqslant 5.75$$

ถ้าพิจารณาแบ่งช่วง [0, 2] ใหม่โดยแบ่งออกเป็น 8 ส่วนย่อย ๆ เท่า ๆ กัน และหาผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยทั้ง 2 วิธี จะพบว่าโดยวิธีที่ 1 จะได้ผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ 5.1875 และโดยวิธีที่ 2 จะได้เท่ากับ 4.1875 ซึ่งจะเห็นว่าถ้าแบ่งช่วง [0, 2] มากขึ้น จะทำให้ผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 มีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น และพื้นที่ของ A ก็จะประมาณได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

ดังนั้นถ้าต้องการหาพื้นที่ของ A จะแบ่งช่วง [0, 2] ออกเป็น n ช่วง ให้จุดแบ่งคือ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $x_0 = 0$ และ $x_n = 2$

พิจารณาช่วง $[x_{k-1}, x_k]$ ค่า $f(x)$ ที่ให้ค่ามากที่สุดเรียก M_k ดังนั้น $M_k = f(x_k)$ ดังรูป



∴ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคิดตามวิธีที่ 1 ที่ $x_k = M_k \cdot \Delta x = f(x_k) \cdot \Delta x$ และผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเรียกว่า **ผลบวกบน** (upper sum) ของ f เขียนแทนด้วย U

$$\begin{aligned} U &= M_1 \cdot \Delta x + M_2 \cdot \Delta x + \ldots + M_n \cdot \Delta x \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x \\ &= (x_1^2+1)\left(\frac{1}{n} - 0\right) + (x_2^2+1)\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \ldots + (x_n^2+1)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+2 \end{aligned}$$

ถ้าพิจารณาค่า f(x) ที่ให้ค่าน้อยที่สุดบน $[x_{k-1}, x_k]$ เรียก m_k ซึ่งจะได้ว่า $m_k = f(x_{k-1})$

ผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเรียกว่า **ผลบวกล่าง** (lower sum) ของ f เขียนแทนด้วย L

$$\begin{aligned} L &= m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + \ldots + m_n \cdot \Delta x \\ &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= (x_0^2+1)\left(\frac{1}{n} - 0\right) + (x_1^2+1)\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \ldots + (x_{n-1}^2+1)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)+2 \end{aligned}$$

$$\therefore L \leqslant A \leqslant U$$

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)+2 \leqslant A \leqslant \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+2$$

เมื่อ n มีค่ามากขึ้น $\frac{1}{n}$ จะมีค่าน้อยลงเข้าใกล้ 0

∴ L และ U จะมีค่าเข้าใกล้ $\frac{4}{3}(1)(2)+2 = \frac{14}{3}$

ดังนั้นพื้นที่ของ A $= \frac{14}{3}$

โดยทั่ว ๆ ไปสำหรับช่วง $I = [a, b]$ ถ้าต้องการหาพื้นที่ของบริเวณ $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นเซตจุดแบ่งย่อย (Partition) ของช่วงปิด [a, b] ซึ่งจะได้ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

ให้ M_k และ m_k เป็นค่าสูงที่สุดและค่าต่ำที่สุดของ f(x) บน $[x_{k-1}, x_k]$

ผลบวกบนของ f คือ U(P) จะมีค่าเป็น

$$U(P) = M_1\Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + M_n \cdot \Delta n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

ผลบวกล่างของ f คือ L(P) จะมีค่าเป็น

$$L(P) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

พื้นที่ใต้กราฟ $y = f(x)$ จะมีค่าเท่ากับ A ซึ่ง

$$L(P) \leqslant A \leqslant U(P)$$

นอกจากปัญหาการหาพื้นที่แล้ว สำหรับปัญหาระยะทางและความเร็วก็ใช้วิธีคิดเหมือนกัน

ระยะทางและความเร็ว

ถ้า $v(t)$ เป็นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t และวัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง จะหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในช่วง $[a, b]$ ได้ดังนี้

ให้ $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ เป็นเซตของจุดแบ่งย่อยของ $[a, b]$

พิจารณาบนช่วงย่อย $[t_{k-1}, t_k]$ เนื่องจาก v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะหาค่าสูงสุด (maximum) M_k และค่าต่ำสุด (minimum) m_k ได้

สำหรับ $t \in [t_{k-1}, t_k]$ จะได้

$$m_k \leqslant v(t) \leqslant M_k$$

$$U(P) = M_1\Delta t_1 + M_2\Delta t_2 + \ldots + M_n\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta t_k$$

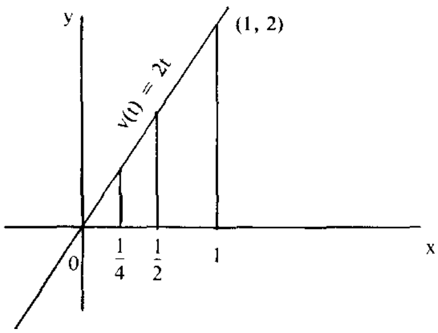
$$L(P) = m_1\Delta t_1 + m_2\Delta t_2 + \ldots + m_n\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta t_k$$

ให้ s เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในช่วงเวลา $[a, b]$

$$s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

$$L(P) \leqslant s \leqslant U(P)$$

ตัวอย่าง 24 ถ้าความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง เมื่อเวลา t เป็น $v(t) = 2t$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปได้ไกลเท่าใดในช่วงเวลา [0, 1]



$$P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$$

$$U(P) = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 2(1)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{8}$$

$$L(P) = 2(0)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leqslant s \leqslant \frac{13}{8}$$

ซึ่งจะเห็นว่าการหาระยะทางก็คือการหาพื้นที่ใต้กราฟ $v(t) = 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$ นั่นเอง

ถ้าดูจากรูป พ.ท. ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}(1)(2) = 1$

$\therefore$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปได้ไกล 1 หน่วย

8.6 อินทิกรัลจำกัดเขต (The definition of definite integral)

จะเห็นว่าวิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟและการหาระยะทางใช้เทคนิคแบบเดียวกัน เราจึงรวมความคิดนั้นเรียกว่าการอินทิเกรตซึ่งจะให้นิยามได้ดังนี้

นิยามที่ 7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [a, b] \rightarrow R$ และ P เป็นเซตจุดแบ่งย่อย $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ โดยที่

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

และ $$U(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

เมื่อ m_k, M_k เป็นค่าต่ำที่สุด และค่าสูงที่สุดของ f(x) บนช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

ถ้ามีเลขจำนวนจริง S ซึ่ง $L(P) \leqslant S \leqslant U(P)$ สำหรับทุก ๆ P

จะเรียก S ว่า **อินทิกรัลจำกัดเขต** (definite integral) ของ f บน [a, b] และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ หรือ $\int_a^b f$

เราอาจจะเรียก $\int_a^b f$ ว่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน f บน [a, b] และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน [a, b] และเรียก a ว่า **ลิมิตล่าง** (lower limit) b เรียกว่า **ลิมิตบน** (upper limit) ของอินทิกรัล

คุณสมบัติของอินทิกรัล

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. สำหรับ $a \leqslant c \leqslant b$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ในที่นี้จะเว้นการพิสูจน์ ผู้ที่สนใจจะสามารถค้นคว้าได้จากหนังสือแคลคูลัสทั่ว ๆ ไป

วิธีอินทิเกรต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีขั้นพื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัส ซึ่งนำไปใช้หาอินทิกรัลของฟังก์ชันได้โดยไม่ต้องอาศัยนิยาม

ทฤษฎีพื้นฐานของอินทิกรัลแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a, b] สำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$.

ให้ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ จะได้ว่า F(x) จะมีอนุพันธ์ทุกค่า x ในช่วง [a, b]

และ $\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\int_a^x f(t)dt] = f(x)$

นิยามที่ 8 ถ้า F เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่ง $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ ทุก x ในช่วงใดช่วงหนึ่ง จะกล่าวว่า F เป็น **ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) ของ f

ดังนั้นจากทฤษฎีพื้นฐาน จะได้ว่า $\int_a^x f(t)dt$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

ทฤษฎีบท ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน [a, b] จะได้

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่าง 24 ถ้า $F(x) = \int_1^x (\frac{1}{t})dt$ จงหา $F'(3)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท $\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\int_1^x (\frac{1}{t})dt] = \frac{1}{x}$

$$\therefore F'(3) = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 25 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 5x^3$

วิธีทำ $\because \frac{d}{dx}[5\cdot\frac{x^4}{4}] = 5(\frac{4}{4})x^3 = 5x^3$

$\therefore \frac{5}{4}x^4$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $5x^3$

โดยทั่ว ๆ ไปปฏิยานุพันธ์ของ x^n คือ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

เพราะว่า $\frac{d}{dx}[\frac{x^{n+1}}{n+1}] = \frac{n+1}{n+1}\cdot x^n = x^n$

ดังนั้นจากทฤษฎีจะได้

$$\int_a^b x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 26 จงหาค่าของ $\int_1^2 4x^3 dx$

วิธีทำ

$$\int_1^2 4x^3dx = 4\int_1^2 x^3dx$$

$$= [4\frac{x^4}{4}]_1^2 = (2)^4-1^4 = 16-1 = 15$$

ตัวอย่าง 27 จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 (x^2-5x+3)dx$

วิธีทำ

$$\int_{-1}^1 (x^2-5x+3)dx = \int_{-1}^1 x^2dx - \int_{-1}^1 5xdx + \int_{-1}^1 3dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^2dx - 5\int_{-1}^1 xdx + 3\int_{-1}^1 dx$$

$$= [\frac{x^3}{3}]_{-1}^1 - 5[\frac{x^2}{2}]_{-1}^1 + 3[x]_{-1}^1$$

$$= [\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3})] - 5(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + 3(1-(-1)) = \frac{2}{3}+6 = \frac{20}{3}$$

จากนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต จะเห็นว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $[a, b]$ และ $f(x) \geqslant 0$ ทุก $x \in [a, b]$ แล้ว พื้นที่ของบริเวณระหว่างกราฟของ f กับแกน x, $a \leqslant x \leqslant b$ ก็คือค่าอินทิกรัลของ f จาก a ถึง b นั่นคือ

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

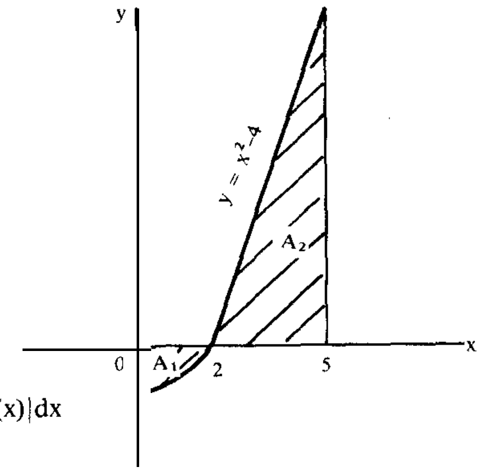
ถ้า $f(x) \leqslant 0$ ทุก $x \in [a, b]$ สำหรับกรณีนี้จะได้พื้นที่ $A = \int_a^b (-f(x))dx$

จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ของบริเวณระหว่างกราฟของฟังก์ชัน f กับแกน x ในช่วง [a, b] เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน [a, b] มีค่าเท่ากับ

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

ตัวอย่าง 28 จงหาพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2-4, 0 \leqslant x \leqslant 5$

วิธีทำ พื้นที่ของบริเวณที่ต้องการหาคือพื้นที่ใต้กราฟ $y = x^2-4$, แกน x และ $0 \leqslant x \leqslant 5$ ดังรูป คือพื้นที่ A_1 และ A_2



$$A = \int_0^5 |f(x)|dx$$

$$= \int_0^5 |x^2-4|dx$$

จากกราฟ $A = \int_0^2 [-f(x)]dx + \int_2^5 f(x)dx$

$$= \int_0^2 [-(x^2-4)]dx + \int_2^5 (x^2-4)dx$$

$$= [-\frac{x^3}{3}+4x]_0^2 + [\frac{x^3}{3} - 4x]_2^5$$

$$= \frac{16}{3} + 27 = \frac{97}{3}$$

8.7 **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** (The Indefinite Integrals)

ถ้า $\frac{x^2}{2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x แล้วจะเห็นว่า

$\frac{x^2}{2}+1$ หรือ $\frac{x^2}{2}-5$ หรือ $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}, \ldots$

ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x ทั้งสิ้น ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ของ x รูปทั่ว ๆ ไปคือ $\frac{x^2}{2}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบท ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว ปฏิริยานุพันธ์ทั้งหมดของ f อยู่ในรูป $F(x)+c$ ทุก ๆ x เมื่อ c เป็นค่าคงที่

นิยามที่ 9 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน $[a, b]$, $a \leqslant x \leqslant b$ และ c เป็นค่าคงที่ เรียก $\int_a^x f(t)dt+c$ ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ** f และใช้สัญลักษณ์ $\int f(x)dx$

ดังนั้น ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

หรือ
$$\int F'(x)dx = F(x)+C$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\int F'(x)dx\right) = \frac{d}{dx}F(x)$$

หรือ
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

จึงกล่าวได้ว่า การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตเป็นการดำเนินการกลับกันกับการหาอนุพันธ์ ดังนั้นเราสามารถรวบรวมสูตรการอินทิเกรตได้ดังนี้

8.8 สูตรการอินทิเกรต

1. $\int dx = \int 1\cdot dx = x+c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ $(n \neq -1)$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k เป็นค่าคงที่)
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. ถ้า u เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีตัวแปรตัวเดียวและหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในโดเมน

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

ตัวอย่าง 29 จงหา $\int(3x^2-\sqrt{x})dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int(3x^2-\sqrt{x})dx &= \int 3x^2dx - \int\sqrt{x}\,dx \\ &= 3\int x^2dx - \int x^{1/2}dx \\ &= x^3 - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 30 จงหา $\int \frac{4x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= 4\int\frac{x^2}{x^{1/3}}\,dx \\ &= 4\int x^{5/3}dx \\ &= 4\frac{x^{8/3}}{\frac{8}{3}} + c \\ &= \frac{3}{2}x^{8/3} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 31 จงหา $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx &= \int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \int x^2dx + 2\int dx + \int x^{-2}dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + c \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 32 จงหา $\int\sqrt{2x-3}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned}u &= 2x-3 \\ du &= 2dx \\ \therefore dx &= \frac{du}{2} \\ \int\sqrt{2x-3}\,dx &= \int\sqrt{u}\,\frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int u^{1/2}du\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + c$$

ตัวอย่าง 33 จงหา $\int x^2(1-2x^3)^{-\frac{2}{3}}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$u = 1 - 2x^3$$

$$du = -6x^2dx$$

$$x^2dx = \frac{du}{-6}$$

$$\int x^2(1-2x^3)^{-\frac{2}{3}}dx = \int u^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{du}{-6} \right)$$

$$= -\frac{1}{6}\int u^{-\frac{2}{3}}du$$

$$= -\frac{1}{2}u^{1/3} + c$$

$$= -\frac{1}{2}(1-2x^3)^{1/3} + c$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (ก) $f(x) = 4x^2$

   (ข) $f(x) = x^4-5x$

2. จงหา $F'(x)$ เมื่อ $F(x) = \int_2^x (t^2-1)dt$

3. จงอินทิเกรตหาค่าของ

   (ก) $\int_{-2}^{1} 5x^3dx$

   (ข) $\int_{1}^{4} x^2\sqrt{x}\,dx$

   (ค) $\int_{-8}^{0} (x^{1/3}+2)x\,dx$

   (ง) $\int_{-1}^{3} (x+2)^2dx$

(จ) $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx$

(ฉ) $\int_0^1 \sqrt{4+5y}\, dy$

4 . จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ

(ก) $\int (3-5x)dx$

(V) $\int x^{-3}(x-1)^2 dx$

(ค) $\int x^2(1-2x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$

(ง) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$

(จ) $\int (ax-x^3)dx$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย

(ก) $y = 2x-6, \quad 2 \leqslant x \leqslant 5$

(ข) $y = 1-x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

(ค) $y = x-x^2$ และแกน x