บทที่ 7
ความน่าจะเป็น
(Probability)

ความน่าจะเป็น (Probability) จัดเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับสถิติอย่างมาก ความน่าจะเป็นนี้เป็นการศึกษาการสุ่มหรือการทดลองที่ไม่มีการกำหนดล่วงหน้ามาก่อนเพื่อที่จะดูถึง "โอกาส" ที่จะเป็นไปได้ว่ามีมากน้อยสักเพียงใดหรือบางทีก็เป็นการคาดคะเนความหวังของมนุษย์อย่างหนึ่ง เช่น "ข้าพเจ้ามีโอกาสสอบ MA 103 ได้ 50%" หรือ "การแข่งขันฟุตบอลอุดมศึกษาปีนี้ทีมฟุตบอลรามคำแห่งมีหวังชนะเลิศ 80%" หรือ "โอกาสที่ฝนจะตกวันนี้มีน้อย" เป็นต้น การศึกษาถึงความน่าจะเป็นนี้สามารถนำไปใช้ช่วยในการตัดสินใจต่าง ๆ ให้ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น

7.1 การทดลองสุ่มและแซมเปิลสเปซ (Random experiment and sample space)

การทดลองสุ่ม (Random experiment) หมายถึงการทดลองที่ไม่สามารถกำหนดหรือไม่สามารถพยากรณ์ให้แน่ลงไปว่าผลลัพธ์จะเป็นอย่างไร ? เนื่องจากว่าผลลัพธ์ที่ได้นั้นอาจจะเกิดขึ้นได้มากมายหลายอย่างซึ่งอาจเป็นอะไรก็ได้

แซมเปิลสเปซ (Sample space) คือเซ็ตของผลลัพธ์ทั้งหลายที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มนั้น มักแทนด้วยสัญลักษณ์ "S"

ตัวอย่าง 1 การโยนเหรียญ 1 อัน หนึ่งครั้งจะถือว่าเป็นการทดลองสุ่มเพราะไม่สามารถพยากรณ์ผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องแน่นอน ผลลัพธ์ที่สนใจคือหน้าที่หงายขึ้นซึ่งอาจจะมีผลลัพธ์เป็นหัว (H) หรือก้อย (T) อย่างใดอย่างหนึ่งนั่นคือแซมเปิลสเปซ ได้แก่เซ็ต S ซึ่งมีอีลีเมนต์ 2 อีลีเมนต์คือ $S = \{H, T\}$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 2 ในการโยนเหรียญ 2 อัน หนึ่งครั้ง ก็เป็นการทดลองสุ่มเช่นเดียวกัน ผลลัพธ์ที่สนใจคือด้านของเหรียญที่จะหงายขึ้นโดยแซมเปิลสเปซคือ $S_1 = \{HH, HT, TH, TT\}$ แต่ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ **จำนวนเหรียญที่ออกก้อย** (T) โดยไม่สนใจการเรียงลำดับว่าเป็นอย่างไร แล้วจะได้ว่าแซมเปิลสเปซคือ $S_2 = \{0, 1, 2\}$ คือผลลัพธ์ที่ได้จะไม่มีออกก้อยเลย (0) มีก้อย 1 อัน แล้วก็มีก้อยทั้ง 2 อัน ดังนั้น แซมเปิลสเปซคือ $\{0, 1, 2\}$

ตัวอย่าง 3 ในการโยนเหรียญ 3 อัน หนึ่งครั้งก็เป็นการทดลองสุ่มโดยแซมเปิลสเปซ คือ S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

ข้อสังเกต

1. ในการโยนเหรียญ 1 อันหนึ่งครั้งจำนวนอีลีเมนต์ในแซมเปิลสเปซจะมี 2 อีลีเมนต์ คือ H กับ T

   ถ้าโยนเหรียญ 2 อันหนึ่งครั้งจำนวนอีลีเมนต์ในแซมเปิลสเปซจะมี 4 อีลีเมนต์ คือ HH, HT, TH, TT

   ถ้าโยนเหรียญ 3 อันหนึ่งครั้งจำนวนอีลีเมนต์, ในแซมเปิลสเปซจะมี 8 อีลีเมนต์ คือ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

   ดังนั้น โดยทั่ว ๆ ไปถ้าโยนเหรียญ n เหรียญหนึ่งครั้งจำนวนอีลีเมนต์ ในแซมเปิลสเปซจะเท่ากับ 2^n (n คือจำนวนเหรียญ)

   อนึ่ง แซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ n เหรียญหนึ่งครั้งกับโยนเหรียญ 1 อัน n ครั้งจะเหมือนกัน
2. การหาแซมเปิลสเปซของสิ่งใด ๆ ที่อาจเป็นไปได้ 2 อย่าง ก็จัดเข้าแบบเดียวกับเหรียญได้ เช่น ตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่าง 4 ในการตรวจสภาพของหลอดไฟฟ้าโดยการเลือกหยิบขึ้นมาตรวจ 3 หลอดโดยการสุ่ม คือ หยิบโดยไม่เจาะจง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือสภาพของหลอดไฟที่หยิบขึ้นมาว่า "ดีหรือเสีย"

ดังนั้นแซมเปิลสเปซจะมีอีลีเมนต์ทั้งหมดเป็น $2^3 = 8$ อีลีเมนต์ ให้ดีแทนด้วย "ด", เสีย แทนด้วย "ส"

$\therefore$ S = {ดดด, ดดส, ดสด, ดสส, สดด, สดส, สสด, สสส}

ตัวอย่าง 5 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้งโดยการทดลองสุ่ม ผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนแต้มของหน้าที่หงายขึ้น ผลลัพธ์อาจจะเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต้มใดแต้มหนึ่งก็ได้

นั่นคือ แซมเปิลสเปซ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ตัวอย่าง 6 ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง ผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มบนหน้าลูกเต๋าที่อาจจะเกิดขึ้นแต่ละลูก

ดังนั้นแซมเปิลสเปซคือ $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

โดย (x, y) หมายถึงลูกเต๋าลูกแรกออกแต้ม x ลูกเต๋าลูกที่สองออกแต้ม y

$\therefore$ (3, 5) จึงหมายถึงลูกเต๋าลูกแรกออกแต้ม 3 ลูกเต๋าลูกที่สองออกแต้ม 5

ข้อสังเกต

จำนวนอีลีเมนต์ในแซมเปิลสเปซของการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งจะมีเท่ากับ 6^n อีลีเมนต์ (n คือจำนวนลูกเต๋า) เมื่อผลลัพธ์ที่สนใจ คือจำนวนแต้มที่จะขึ้นในลูกเต๋าแต่ละลูก

ตัวอย่าง 7 จงหาแซมเปิลสเปซของผลที่ทีมฟุตบอลคณะศึกษาศาสตร์ลงแข่งกับทีมฟุตบอลคณะวิทยาศาสตร์โดยสนใจผลที่ทีมคณะศึกษาศาสตร์จะได้รับ

แซมเปิลสเปซคือ {ชนะ, เสมอ, แพ้}

แบบฝึกหัด 7.1

จงหาเซ็ตของแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

1. ในการโยนเหรียญ 2 อัน หนึ่งครั้งและสนใจด้านที่หงายขึ้น
2. ในการโยนเหรียญ 2 อัน หนึ่งครั้งและสนใจจำนวนก้อยที่หงายขึ้น
3. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งและสนใจจำนวนแต้มของลูกแรกต้องน้อยกว่าลูกที่สอง
4. ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญและลูกเต๋า 1 ลูก หนึ่งครั้งพร้อมกันสนใจด้านของเหรียญและลูกเต๋าที่หงายขึ้น
5. ในการสอบถามแม่บ้านจำนวนหนึ่งเกี่ยวกับการจัดบริการรถเมล์ปรับอากาศ
6. ในการสมัครเข้ารับเลือกตั้งเป็นสมาชิกสภาผู้แทนราษฎรสนใจผลที่ผู้สมัครจะได้รับ
7. หยิบลูกบอลในกล่องใบหนึ่งซึ่งมีบอลสีดำ สีแดงและสีขาว สนใจสีของลูกบอลที่จะหยิบได้
8. หยิบลูกบอลในกล่องใบหนึ่งซึ่งมี 10 ลูก หยิบครั้งละ 2 ลูก สนใจจำนวนวิธีที่จะหยิบ
9. ทอดลูกเต๋า 3 ลูกหนึ่งครั้ง สนใจจำนวนวิธีที่แต้มจะขึ้นได้ทั้งหมด

10. โยนเหรียญ 6 อันหนึ่งครั้ง สนใจจำนวนวิธี ทั้งหมด

11. ในการสอบ MA 103 ครั้งหนึ่ง สนใจเกรดที่จะ

7.2 เหตุการณ์ (Event)

ในการทดลองสุ่มที่กำหนดให้โดยมีเซ็ตของ ลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด เป็นแซมเปิลสเปซนั้น เราอาจจะสนใจเฉพาะผลลัพธ์อ ย่างหนึ่งก็ได้ ซึ่งจะเรียกเซ็ตของผลลัพธ์ที่เราสนใจเฉพาะนี้ว่า "เหตุการณ์"

เช่น ถ้าโยนเหรียญ 2 อันจะได้ S = {HH, HT, TH, TT}

เราอาจสนใจเฉพาะการได้หัวอันเดียวเท่านั้นก็จะได้ HT และ TH

หรือเราสนใจเฉพาะการได้หัวอย่างน้อย 1 อันก็จะได้ HH, HT, TH

จะเห็นว่าเซ็ตของสิ่งที่เราสนใจเฉพาะนี้ต่างก็เป็นเซ็ตย่อยของแซมเปิลสเปซทั้งสิ้น คืออาจเขียนเป็นเซ็ตได้เป็น

$$E_1 = \{HT, TH\}$$

$$E_2 = \{HH, HT, TH\}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $E_1 \subseteq S$ และ $E_2 \subseteq S$ จึงอาจกล่าวได้ว่าทั้ง E_1 และ E_2 ต่างก็เป็นเหตุการณ์ จึงอาจกล่าวสรุปความหมายของเหตุการณ์ได้ว่า

เหตุการณ์ (Event) คือเซ็ตใด ๆ ที่เป็นสับเซ็ตของแซมเปิลสเปซมักเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "E"

หมายเหตุ

1. จากความหมายของ "เหตุการณ์" จะเห็นว่าแซมเปิลสเปซก็เป็นเหตุการณ์ได้ และ Φ (เซ็ตเปล่า) ก็เป็นเหตุการณ์ได้

2. บางทีเราเรียก "เหตุการณ์" ที่มีอีลีเมนต์เพียงอีลีเมนต์เดียวว่า "เหตุการณ์เชิงเดียว" (simple event) และเหตุการณ์ที่มีอีลีเมนต์มากกว่าหนึ่งอีลีเมนต์เราเรียกว่า "เหตุการณ์เชิง-ประกอบ" (compound event)

ตัวอย่าง 8 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้งให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่, F เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4 จงเขียนเซ็ตของเหตุการณ์ E กับเหตุการณ์ F

ในที่นี้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นแซ สเปซ

เราสนใจเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ ลขคู่

$\therefore E = \{2, 4, 6\}$ ซึ่งเป็นเซ็

F เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4

$\therefore F = \{1, 2, 3\}$ ซึ่งเป็นเซ็ตย่อยของ S เช่นกัน

อนึ่ง เนื่องจากเหตุการณ์และแซมเปิลสเปซที่กล่าวถึงนี้ต่างก็เป็นเซ็ตจึงสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเซ็ตมาใช้ประกอบการศึกษาได้ด้วย

ผลรวมของเหตุการณ์ (Union of events)

ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว ผลรวมของเหตุการณ์ E กับ F ซึ่งเขียนแทนด้วย "$E \cup F$" ก็คือเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยอีลีเมนต์ที่เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ E หรือของเหตุการณ์ F หรือของทั้งสองเหตุการณ์ (อ่าน "$E \cup F$" ว่า E ยูเนียน F หรือยูเนียนของเหตุการณ์ E และ F)

เช่นจากตัวอย่าง 8 เราจะได้ว่า

$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือแต้มต่ำกว่า 4

ส่วนร่วมของเหตุการณ์ (Intersection of events)

ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว ส่วนร่วมของเหตุการณ์ E และ F ซึ่งเขียนแทนด้วย "$E \cap F$" คือเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยอีลีเมนต์ที่เป็นสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ E และเหตุการณ์ F (อ่าน "$E \cap F$" ว่า E อินเตอร์เซค F หรืออินเตอร์เซคชันของเหตุการณ์ E กับ F)

เช่น จากตัวอย่าง 8 จะได้ว่า

$E \cap F = \{2\}$ เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และต่ำกว่า 4

เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (Disjoint events or mutually exclusive)

ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ และ $E \cap F = \Phi$ แล้วจะเรียกเหตุการณ์ E กับ F ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกัน

เช่น ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง แซมเปิลสเปซ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่

$\therefore E = \{2, 4, 6\}$

F เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคี่

$\therefore F = \{1, 3, 5\}$

$\therefore$ จะได้ว่า $E \cap F = \Phi$

ดังนั้นจะเรียก E กับ F ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกัน (เป็น **mutually exclusive**)

ผลต่างของเหตุการณ์ (Difference of events)

ให้ E กับ F เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ ผลต่างของเหตุการณ์ E กับ F ซึ่งเขียนแทนด้วย "E – F" คือเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยอีลีเมนต์ที่เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ E แต่ไม่เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ F

(อ่าน "E – F" ว่า E ลบ F หรือ E ดิฟเฟอเรน F)

เช่น จากตัวอย่าง 8 จะได้

$E - F = \{4, 6\}$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นแต้มคู่และไม่ต่ำกว่า 4

และ $F - E = \{1, 3\}$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นแต้มต่ำกว่า 4 และไม่เป็นแต้มคู่

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement of an event)

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว "คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E" หรือ "ไม่ E" เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\bar{E}$" (อ่านว่า "อีบาร์") คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยอีลีเมนต์ที่เป็นสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ E นั่นคือ $\bar{E} = S-E$ นั่นเอง

เช่นจากตัวอย่าง 8 จะได้

$\bar{E} = \{1, 3, 5\}$ คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มคู่

$\bar{F} = \{4, 5, 6\}$ คือเหตุการณ์ที่แต้มไม่ต่ำกว่า 4

หมายเหตุ การที่เราใช้เซ็ตแทนเหตุการณ์นั้น ช่วยให้เราเขียนเหตุการณ์ได้เป็น

1. เหตุการณ์ E หรือ F เขียนได้เป็น "$E \cup F$"
2. เหตุการณ์ E และ F เขียนได้เป็น "$E \cap F$"
3. เหตุการณ์ E แต่ไม่ F เขียนได้เป็น "E – F"
4. เหตุการณ์ F แต่ไม่ E เขียนได้เป็น "F – E"
5. เหตุการณ์ไม่ E เขียนได้เป็น "$S - E = \bar{E}$"

แบบฝึกหัด 7.2

1. ถ้า $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เป็นแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ คือ

$$E_1 = \{1, 3, 5\}$$

$$E_2 = \{2, 4\}$$

$$E_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E_4 = \{1, 2, 3\}$$

จงหาสมาชิกของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(ก) $E_1 \cup E_2$

(ข) $E_3 \cup E_4$

(ค) $E_1 \cap E_2$

(ง) $E_1 \cap E_3$

(จ) $E_1 - E_3$

(ฉ) มีเหตุการณ์คู่ใดบ้างที่เป็น mutually exclusive กัน

(ช) $E_1 \cap \bar{E}_3$

(ซ) $\bar{E}_4$

(ฌ) $\overline{E_2 \cap E_4}$

(ญ) $(E_1 \cap E_3) \cap \bar{E}_4$

(ฎ) $E_1 \cup (E_2 \cap E_4)$

2. จากการสอบถามนักศึกษา 4 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

(ก) จงเขียนอีลีเมนต์ทั้งหมดที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S โดยใช้อักษร
"ป" แทนนักศึกษาที่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง และ
"ม" แทนนักศึกษาที่ไม่ได้เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

(ข) เขียนอีลีเมนต์ของเหตุการณ์ A ที่นักศึกษาเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงทั้งสามคน

(ค) เขียนอีลีเมนต์ของเหตุการณ์ B ที่นักศึกษาอย่างน้อย 2 คนเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

(ง) เขียนอีลีเมนต์ของเหตุการณ์ C ที่มีนักศึกษาเพียงคนเดียวเท่านั้นที่เป็นสมาชิกข่าว-รามคำแหง

7.3 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of events)

ในการทดลองสุ่มที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ แต่ละอีลีเมนต์ของแซมเปิลสเปซจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันเสมอ เช่น การทดลองสุ่มของการโยนเหรียญ โอกาสที่จะได้ H กับ T จะเท่ากันหรือในการทอดลูกเต๋าโอกาสที่จะได้แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ก็มีเท่า ๆ กัน

ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เราสนใจในการทดลองสุ่มอย่างหนึ่งแล้ว เรามักอยากทราบว่าเหตุการณ์ E จะมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเรากำหนดจำนวนเลขซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนอีลีเมนต์ในเหตุการณ์ E กับจำนวนอีลีเมนต์ใน

แซมเปิลสเปซ เราจะเรียกอัตราส่วนของตัวเลขนี้ว่า "ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E" **(probability of E)**

ซึ่งจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "P(E)"

นั่นคือ อาจกล่าวได้ว่า

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ "ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E" คือ

$$P(E) = \frac{\text{จำนวนอีลีเมนต์ในเหตุการณ์ } E}{\text{จำนวนอีลีเมนต์ในแซมเปิลสเปซ}}$$

จากอัตราส่วนนี้จะทำให้ทราบว่าเหตุการณ์ E ที่เราสนใจมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด เช่น

ถ้า $P(E) = 0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

เช่น E เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 9 จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก หนึ่งครั้ง

$$\therefore P(E) = 0$$

ถ้า $P(E) = 1$ หมายความว่าเหตุการณ์ E จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน

เช่น E เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวหรือก้อยจากการโยนเหรียญหนึ่งอัน หนึ่งครั้ง

$$\therefore P(E) = 1$$

ถ้า $P(E) = \frac{1}{2}$ หมายความว่าโอกาสที่เหตุการณ์ E จะเกิดกับไม่เกิดเป็นครึ่งกับครึ่งคือ 50% เช่น E เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัว จากการโยนเหรียญหนึ่งอันหนึ่งครั้ง

$$\therefore P(E) = \frac{1}{2}$$

ถ้า $P(E) = \frac{1}{6}$ และ $P(F) = \frac{5}{6}$ หมายความว่าเหตุการณ์ F มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นมากกว่าเหตุการณ์ E เป็นต้น

คุณสมบัติเบื้องต้นของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะกล่าวได้ว่า

1. $P(E) \geqslant 0$
2. $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ ถ้า $E \cap F = \Phi$
3. $P(S) = 1$ (S คือ แซมเปิลสเปซ)

ตัวอย่าง 9 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้งมีแซมเปิลสเปซ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 2 จงหา $P(E_1)$
2. ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่ จงหา $P(E_2)$

3. ให้ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 5 จงหา $P(E_3)$
4. ให้ E_4 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคี่ จงหา $P(E_4)$
5. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือต่ำกว่า 5
6. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และต่ำกว่า 5
7. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มคู่และไม่ต่ำกว่า 5
8. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มไม่ต่ำกว่า 5
9. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มคู่และแต้มคี่
10. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มคู่หรือแต้มคี่

วิธีทำ ในที่นี้แซมเปิลสเปซ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ มี 6 อีลีเมนต์

1. เราได้ว่า $E_1 = \{2\}$ มี 1 อีลีเมนต์

จาก $P(E_1) = \dfrac{\text{จำนวนอีลีเมนต์ในเหตุการณ์ } E_1}{\text{จำนวนอีลีเมนต์ในแซมเปิลสเปซ } S}$

$$\therefore P(E_1) = \frac{1}{6}$$

2. เราได้ว่า $E_2 = \{2, 4, 6\}$

$$\therefore P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. เราได้ว่า $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\therefore P(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4. เราได้ว่า $E_4 = \{1, 3, 5\}$

$$\therefore P(E_4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5. เราได้ว่า $E_2 \cup E_3 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$\therefore P(E_2 \cup E_3) = \frac{5}{6}$$

6. เราได้ว่า $E_2 \cap E_3 = \{2, 4\}$

$$\therefore P(E_2 \cap E_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

7. เราได้ว่า $E_2 - E_3 = \{6\}$

$$\therefore P(E_2 - E_3) = \frac{1}{6}$$

8. เราได้ว่า $\bar{E}_3 = \{5, 6\}$

$$\therefore P(\bar{E}_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

9. เราได้ว่า $E_2 \cap E_4 = \Phi$

$$\therefore P(E_2 \cap E_4) = \frac{\text{จำนวนอีลีเมนต์ในเซ็ต } E_2 \cap E_4}{\text{จำนวนอีลีเมนต์ใน } S}$$

$$= \frac{0}{6} = 0$$

10. เราได้ว่า $E_2 \cup E_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\therefore P(E_2 \cup E_4) = \frac{6}{6} = 1$$

ตัวอย่าง 10 นักศึกษากลุ่มหนึ่งมีนักศึกษาปีที่ 1 อยู่ 4 คน นักศึกษาปีที่ 2 อยู่ 5 คน นักศึกษาปีที่ 3 อยู่ 6 คน และนักศึกษาปีที่ 4 อยู่ 5 คน ถ้าเลือกนักศึกษาคนหนึ่งออกมาโดยสุ่มเพื่อจะเป็นตัวแทนของนักศึกษากลุ่มนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 1
2. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 2
3. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 3
4. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 4
5. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 1 หรือ 4
6. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 3 หรือ 4
7. เลือกออกมาได้เป็นนักศึกษาปีที่ 2 และปี 4

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเซ็ตของนักศึกษาปีที่ 1 ซึ่งมี 4 อีลีเมนต์

E_2 เป็นเซ็ตของนักศึกษาปีที่ 2 ซึ่งมี 5 อีลีเมนต์

E_3 เป็นเซ็ตของนักศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมี 6 อีลีเมนต์

E_4 เป็นเซ็ตของนักศึกษาปีที่ 4 ซึ่งมี 5 อีลีเมนต์

แซมเปิลสเปซทั้งหมดมี $4+5+6+5 = 20$

$\therefore$ 1. $P(E_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

2. $P(E_2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

3. $P(E_3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

4. $P(E_4) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

5. $P(E_1 \cup E_4) = \frac{9}{20}$

6. $P(E_3 \cup E_4) = \frac{11}{20}$

7. $P(E_2 \cap E_4) = 0$ ($\because$ เราเลือกนักศึกษามาเพียงคนเดียว)

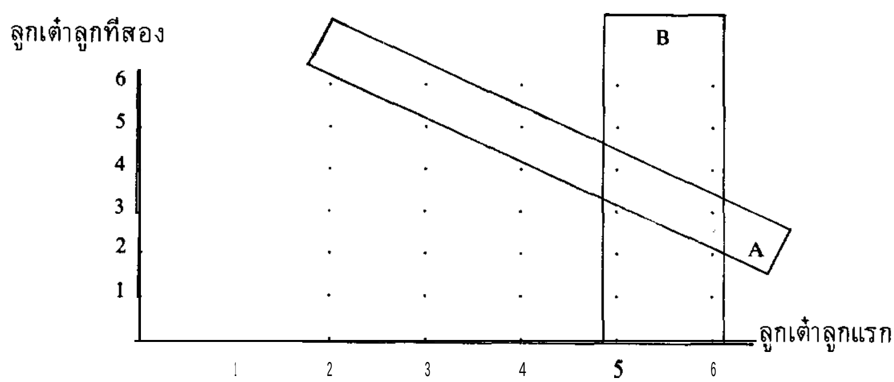
ตัวอย่าง 11 ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งให้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1. ผลบวกของแต้มเป็น 9
2. ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นอย่างน้อยเป็นแต้ม 5
3. ผลบวกเป็น 9 และลูกแรกขึ้นอย่างน้อย 5

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็น 9

B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นอย่างน้อย 5

ในการทอดลูกเต๋าสองลูกจะได้แซมเปิลสเปซ $= 6^2 = 36$ อีลีเมนต์ อาจเขียนได้ดังรูป



สำหรับคู่ลำดับ (x, y) ให้ x แทนแต้มของลูกเต๋าลูกแรก, y แทนแต้มของลูกเต๋าลูกที่สอง

1. $\therefore A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

$\therefore P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2. $B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3),$
$(6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$\therefore P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

3. $A \cap B = \{(5, 4), (6, 3)\}$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ตัวอย่าง 12 นักศึกษาหญิงกลุ่มหนึ่งมี 9 คน ซึ่งในจำนวนนั้นมีอยู่ 3 คน ที่มีตาสีดำ ถ้าสุ่มเลือกออกมา 2 คน

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ได้นักศึกษาที่มีตาสีดำทั้งสองคน
2. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักศึกษาที่มีตาสีดำหนึ่งคน
3. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักศึกษาที่มีตาไม่ใช่สีดำ 2 คน

วิธีทำ มีนักศึกษาหญิงอยู่ทั้งหมด 9 คน ดังนั้นจะมีวิธีเลือกทีละ 2 คนได้

$${}^9C_2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = 36 \text{ วิธี}$$

∴ แซมเปิลสเปซมี 36 อีลีเมนต์

1. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มได้ตาสีดำทั้งสองคน

   ในจำนวนนั้นมีตาสีดำอยู่ 3 คน เราจะสุ่มเลือกมา 2 คน

   จะมีวิธีเลือกได้ ${}^3C_2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

   $$\therefore P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

2. ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้ตาสีดำหนึ่งคน

   ในจำนวนตาสีดำ 3 คน ต้องเลือกมา 1 คนและพวกที่เหลือ 6 คนต้องเลือกมา 1 คน

   จะมีวิธีเลือก ${}^3C_1 \cdot {}^6C_1 = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{6!}{1!5!} = 3 \times 6 = 18$ วิธี

   $$\therefore P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

3. ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่เลือกไม่ได้ตาสีดำทั้ง 2 คน

   คือเลือกจากพวกที่ไม่ใช่ตาสีดำซึ่งมี 6 คน เลือกมา 2 คน

   มีวิธีเลือก ${}^6C_2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$

   $$\therefore P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

ตัวอย่าง 13 ในกล่องใบหนึ่งมี บอลสีขาว 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบบอลออกมาครั้งละ 3 ลูก จงหา

1. ความน่าจะเป็นที งสามลูก
2. ความน่าจะเป็นที่จะ งสามลูก
3. ความน่าจะเป็นที่จะ ง 2 ลูก และบอลขาว 1 ลูก
4. ความน่าจะเป็นที่จะ ดง 1 ลูก และบอลขาว 2 ลูก
5. ความน่าจะเป็นที่จะได้ อลขาวอย่างน้อย 2 ลูก

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการหยิบบอล 3 ลูกจากบอล 10 ลูก มีวิธีหยิบได้

$$^{10}C_3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{3\times2\times1\times7!} = 120$$

1. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลแดงทั้ง 3 ลูก

   จำนวนวิธีที่จะหยิบให้ได้บอลแดง 3 ลูก จากบอลแดงทั้งหมด 6 ลูก

   จะมีวิธีหยิบ $^6C_3 = 20$ วิธี

   $$\therefore P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

   นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้บอลสีแดงทั้งสามลูกเป็น $\frac{1}{6}$

2. ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีขาวทั้งสามลูก

   จำนวนวิธีที่จะหยิบบอลขาว 3 ลูก จากบอลสีขาวซึ่งมีทั้งหมด 4 ลูก

   จะมีวิธีหยิบ $^4C_3 = 4$ วิธี

   $$\therefore P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

   นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้บอลสีขาวทั้งสามลูกเป็น $\frac{1}{30}$

3. ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีแดง 2 ลูก และบอลสีขาว 1 ลูก

   โอกาสที่จะหยิบได้บอลสีแดง 2 ลูก จากบอลสีแดง 6 ลูก

   เท่ากับ $^6C_2 = 1$ วิธี

   โอกาสที่จะหยิบได้บ 1 ลูก จากบอลสีขาว 4 ลูก

   เท่ากับ $^4C_1 = 4$ วิธี

   ดังนั้น จำนวนวิธีที่ได้จากการหยิบได้บอลสีแดง 2 ลูก และขาว 1 ลูก

คือ $15 \times 4 = 60$ วิธี

$$\therefore P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้บอลสีแดง 2 ลูก และบอลสีขาว 1 ลูก เท่ากับ $\frac{1}{2}$

4. ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก และบอลขาว 2 ลูก

   โอกาสที่จะหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก จากบอลแดง 6 ลูก เท่ากับ ${}^6C_1 = 6$ วิธี

   โอกาสที่จะหยิบได้บอลสีขาว 2 ลูก จากบอลขาว 4 ลูก เท่ากับ ${}^4C_2 = 6$ วิธี

   ดังนั้น จำนวนวิธีที่ได้จากการหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก และขาว 2 ลูก

   คือ $6 \times 6 = 36$ วิธี

$$\therefore P(D) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

   ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะได้จากการหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก และขาว 2 ลูก จึงเท่ากับ $\frac{3}{10}$

5. ให้ E เป็นเหตุการณ์ได้บอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก

   นั่นคือ เหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีขาว 2 ลูก แดง 1 ลูก กับหยิบได้สีขาวทั้ง 3 ลูก คือได้เหตุการณ์ D กับเหตุการณ์ B ซึ่งมีจำนวนวิธีรวมกันเป็น

$$36 + 4 = 40$$

$$\therefore P(E) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

   นั่นคือ จำนวนวิธีที่หยิบได้บอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก จึงเท่ากับ $\frac{1}{3}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยคุณสมบัติเบื้องต้นของความน่าจะเป็นดังกล่าวมาแล้ว

ทฤษฎีบทที่ 1 $P(\Phi) = 0$ เมื่อ Φ คือเซ็ตเปล่า

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(E-F) = P(E) - P(E \cap F)$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

(ถ้า $E \cap F = \Phi$ แล้วเราจะได้ต่อไปว่า $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$)

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P\bar{E} = 1 - P(E)$$

ต่อไปนี้จะแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทแต่ละบทที่กล่าวมาข้างต้นคือ

ทฤษฎีบทที่ 1 $P(\Phi) = 0$ เมื่อ Φ คือเซ็ตเปล่า

เพราะว่า $\Phi \cap \Phi = \Phi$

โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ 2. จึงได้ว่า

$$P(\Phi \cup \Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) \qquad \text{.........(1)}$$

แต่ $\Phi \cup \Phi = \Phi$

ดังนั้น $P(\Phi \cup \Phi) = P(\Phi)$ ....(2)

จาก (1) กับ (2) ได้ว่า

$$P(\Phi) + P(\Phi) = P(\Phi)$$

ดังนั้น $P(\Phi) = P(\Phi) - P(\Phi)$

$= 0$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(E-F) = P(E) - P(E\cap F)$$

พิสูจน์ เพราะว่า $E = (E-F) \cup (E\cap F)$

และ $(E-F) \cap (E\cap F) = \Phi$

ดังนั้น $P(E) = P((E-F) \cup (E\cap F))$

$= P(E-F) + P(E\cap F)$ (โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ 2)

เพราะฉะนั้น $P(E-F) = P(E) - P(E\cap F)$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$$

พิสูจน์ เพราะว่า $E\cup F = F\cup (E-F)$

และ $F \cap (E-F) = \Phi$

ดังนั้น $P(E\cup F) = P(F \cup (E-F))$

$$= P(F)+P(E-F) \quad \text{(โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ 2)}$$

แต่ $\quad P(E-F) = P(E) - P(E\cap F)$

เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า

$$P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

ข้อสังเกต

จะสังเกตเห็นว่า ท.บ. 3 กับคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ 2. นั้นต่างกันเล็กน้อยคือ ในคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ 2. ระบุว่าเหตุการณ์ E กับ F ต้องมีคุณสมบัติว่า $E\cap F = \Phi$ แต่ใน ท.บ. 3 นี้ E กับ F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ก็ได้

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(\bar{E}) = 1-P(E)$$

พิสูจน์ เพราะว่า $\quad \bar{E} = S - E$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(S-E) \\ &= P(S) - P(S\cap E) \quad \text{(โดย ท.บ. 2)} \\ &= 1 - P(E) \end{aligned}$$

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่แสดงถึงการใช้ทฤษฎีบทดังกล่าวข้างต้นมาคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ตัวอย่าง 14 ให้ E และ F เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{3}{8}$, $P(E \cup F) = \frac{5}{8}$ จงหา

1. $P(E \cap F)$	6. $P(\overline{E \cup F})$
2. $P(E - F)$	7. $P(\overline{E \cap F})$
3. $P(F - E)$	8. $P(\overline{F - E})$
4. $P(\bar{E})$	9. $P(E - E)$
5. $P(\bar{F})$	10. $P(E\cap\bar{F})$

วิธีทำ

1. จากสูตร $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$

$$\therefore P(E\cap F) = P(E) + P(F) - P(E\cup F)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$

2. จากสูตร $P(E-F) = P(E) - P(E\cap F)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. $P(F-E) = P(F) - P(F\cap E)$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

4. $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. $P(\bar{F}) = 1 - P(F)$

$$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

6. $P(EUF) = 1 - P(EUF)$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

7. $P(E\cap F) = 1 - P(E\cap F)$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

8. $P(F - E) = 1 - P(F-E)$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

9. $P(E-E) = P(E) - P(E\cap E)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

หรือ $E-E = \Phi$

นั่นคือ $P(E-E) = P(\Phi) = 0$

10. $P(E\cap\bar{F}) = P(E-F) = P(E) - P(E\cap F)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง 15 สมมุติว่าในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 4 ลูก โดยเป็นบอลสีดำ 2 ลูก สีแดง 1 ลูก สีขาว 1 ลูก ถ้าสุ่มหยิบบอลมา 1 ลูก

1. จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้บอลสีดำ

2. จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้บอลสีดำและบอลสีแดง

3. จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้บอลสีแดง หรือ สีดำ

4. จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบไม่ได้บอลสีแดงหรือบอลสีดำ

วิธีทำ ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีดำ

F เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีแดง

1. $P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2. เหตุการณ์ที่หยิบได้บอลแดงและบอลดำ คือเหตุการณ์ $E \cap F$ เราได้ว่าเมื่อเราหยิบลูกบอลขึ้นมา 1 ลูก จะได้บอลสีแดงและบอลสีดำ ขณะเดียวกันไม่ได้ นั่นคือ

$$E \cap F = \Phi$$

$$\therefore P(E \cap F) = P(\Phi) = 0$$

3. เหตุการณ์ที่หยิบได้บอลแดงหรือบอลดำก็คือเหตุการณ์ $E \cup F$

จาก $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$$\therefore P(E \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0$$

$$= \frac{3}{4} = 0.75$$

4. เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้บอลสีแดงหรือสีดำก็คือ $\overline{E \cup F}$

$$\therefore P(E \cup F) = 1 - P(E \cup F)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} = 0.25$$

ตัวอย่าง 16 ผลการสำรวจนักเรียน 200 คนเป็นดังนี้

80 คน ชอบคณิตศาสตร์

65 คน ชอบวิทยาศาสตร์

55 คน ชอบภาษาอังกฤษ

20 คน ชอบทั้งวิทยาศาสตร์และภาษาอังกฤษ

25 คน ชอบทั้งคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

15 คน ชอบทั้งคณิตศาสตร์ และ ภาษาอังกฤษ

และ 5 คน ชอบทั้ง 3 วิชา

1. จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะชอบคณิตศาสตร์
2. จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะชอบวิทยาศาสตร์หรือภาษาอังกฤษ
3. จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะชอบคณิตศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์
4. จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะชอบคณิตศาสตร์หรือภาษาอังกฤษ

วิธีทำ ให้ A แทนเซ็ตของนักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์

B แทนเซ็ตของนักเรียนที่ชอบวิทยาศาสตร์

C แทนเซ็ตของนักเรียนที่ชอบภาษาอังกฤษ

ดังนั้น จากโจทย์เราได้ว่า

$$P(A) = \frac{80}{200}$$

$$P(B) = \frac{65}{200}$$

$$P(C) = \frac{55}{200}$$

$$P(B \cap C) = \frac{20}{200}$$

$$P(A \cap B) = \frac{25}{200}$$

$$P(A \cap C) = \frac{15}{200}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{200}$$

ดังนั้น 1. $P(A) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5} = 0.4$

2. เซ็ตของนักศึกษาที่ชอบวิทยาศาสตร์หรือภาษาอังกฤษคือ $B \cup C$

$$\therefore P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$= \frac{65}{200} + \frac{55}{200} - \frac{20}{200}$$

$$= \frac{100}{200}$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะชอบวิทยาศาสตร์หรือภาษาอังกฤษเป็น 0.5

3. เซ็ตของนักศึกษาที่ชอบคณิตศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์คือ $A \cup B$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{80}{200} + \frac{65}{200} - \frac{25}{200}$$

$$= \frac{120}{200} = \frac{3}{5} = 0.6$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะชอบคณิตศาสตร์ หรือภาษาอังกฤษเป็น 0.6 หรือ 60%

4. เซ็ตของนักศึกษาที่ชอบคณิตศาสตร์หรือภาษาอังกฤษ คือ $A \cup C$

$$\therefore P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$= \frac{80}{200} + \frac{55}{200} - \frac{15}{200}$$

$$= \frac{120}{200}$$

$$= \frac{3}{5} = 0.6$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะชอบคณิตศาสตร์หรือภาษาอังกฤษเป็น 0.6 หรือ 60%

แบบฝึกหัด 7.3

1. ถ้า $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เป็นแซมเปิลสเปซ

และเหตุการณ์คือ

$$E_1 = \{1, 3, 5\}$$
$$E_2 = \{2, 4\}$$
$$E_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$E_4 = \{1, 2, 3\}$$

จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(ก) $P(E_1)$ (จ) $P(E_1 \cup E_2)$

(ข) $P(E_2)$ (ฉ) $P(E_3 \cup E_4)$

(ค) $P(E_3)$ (ช) $P(E_1 \cap E_2)$

(ง) $P(E_4)$ (ซ) $P(E_1 \cap E_3)$

(ฌ) $P(E_1-E_3)$

(ญ) $P(\overline{E}_4)$

(ฎ) $P(\overline{E_2 \cap E_4})$

(ฏ) $P(\overline{E_1 \cup E_4})$

(ฐ) $P((E_1 \cap E_2) \cap \overline{E}_4)$

(ฑ) $P(E_1 \cup (E_2 \cap E_4))$

(ฒ) $P(\overline{E}_3 \cup E_2)$

2. ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง
   (ก) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม 2
   (ข) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2
   (ค) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2 หรือเป็นเลขคี่
   (ง) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2 และเป็นเลขคี่
   (จ) จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่ได้แต้มคี่

3. จากการสอบถามนักศึกษา 4 คนเกี่ยวกับการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง
   (ก) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงทั้ง 4 คน
   (ข) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาอย่างน้อย 2 คนเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง
   (ค) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาอย่างน้อย 1 คนเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง
   (ง) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบว่านักศึกษาเพียงคนเดียวเท่านั้นที่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

4. นักศึกษากลุ่มหนึ่งมีนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์จำนวน 50 คน นักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์จำนวน 30 คน นักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์ 35 คน นักศึกษาคณะนิติศาสตร์ 70 คน นักศึกษาคณะมนุษยศาสตร์ 20 คน นักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ 45 คน
   ถ้าสุ่มนักศึกษาออกมา 1 คน
   (ก) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นนักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ
   (ข) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์
   (ค) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นนักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์
   (ง) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นนักศึกษาคณะนิติศาสตร์หรือคณะมนุษยศาสตร์
   (จ) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นนักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์

5. ในกล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่ 20 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1 ถึง 20 เขียนกำกับไว้ถ้าหยิบสลากสลากหนึ่งโดยการสุ่มให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้สลากที่มีหมายเลขเขียนกำกับไว้เป็น
   (ก) จำนวนคี่
   (ข) จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว

(ค) จำนวนคี่ที่หารด้วย 5 ลงตัว

(ง) จำนวนที่ถอดรากที่สองได้เป็นจำนวนเต็ม

(จ) จำนวนที่หารด้วย 12 ลงตัว

6. ผลการชั่งน้ำหนักของนักเรียน 100 คน มีผลดังตารางต่อไปนี้

น้ำหนัก	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
จำนวนนักเรียน	5	3	8	12	20	15	10	5	13	7	2

ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะมีน้ำหนักเป็น

(ก) 50

(ข) 45 หรือ 55

(ค) 46 และ 60

(ง) เกินกว่า 50

(จ) น้อยกว่า 50

7. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) เหตุการณ์ที่ผลบวกบนหน้ารวมกันได้ 5

(ข) เหตุการณ์ที่ได้แต้มบนหน้าของทั้งสองลูกเหมือนกัน

(ค) เหตุการณ์ที่ผลคูณของหน้าบนลูกเต๋าทั้งสองเกิน 20

8. ถ้าจะบรรจุคน 2 คนเข้าทำงานจากชาย 5 คน หญิง 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่การบรรจุนั้นจะได้เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน

9. ในกล่องใบหนึ่งมีบอลสีแดง 4 ลูก บอลสีดำ 3 ลูก บอลสีขาว 2 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลออกมาครั้งละ 1 ลูก

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีแดง

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บอลแดงหรือบอลขาว

(ค) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บอลแดงหรือบอลขาวหรือบอลดำ

(ง) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บอลดำและแดง

10. ในกล่องใบหนึ่งมีบอลสีแดง 4 ลูก, บอลสีดำ 3 ลูก, บอลสีขาว 2 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละ 2 ลูก

(ก) จงหาความน่าจะเป็นของการได้บอลแดงทั้ง 2 ลูก

(ข) จงหาความน่าจะเป็นของการได้บอลดำทั้ง 2 ลูก

(ค) จงหาความน่าจะเป็นของการได้บอลขาวทั้ง 2 ลูก

(ง) จงหาความน่าจะเป็นของการได้บอลแดงและขาวอย่างละลูก

(จ) จงหาความน่าจะเป็นของการได้บอลแดงและดำอย่างละลูก

11. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ และ $P(A \cap B) = 0.1$ จงหา

(ก) $P(A \cup B)$ (ค) $P(B)$

(ข) $P(A-B)$ (ง) $P(\overline{A \cup B})$

12. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ จงหา

(ก) $P(B)$ (ง) $P(A \cap \bar{B})$

(ข) $P(A)$ (จ) $P(B \cap \bar{A})$

(ค) $P(\bar{A})$ (ฉ) $P(\overline{A \cap B})$

13. ในห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียนชาย 10 คน นักเรียนหญิง 20 คน ครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งชายและหญิงมีตาสีน้ำตาล จงหาความน่าจะเป็นที่เลือกนักเรียนคนหนึ่งออกมาโดยสุ่มได้เป็นนักเรียนหญิงหรือมีตาสีน้ำตาล

14. นักเรียนชายห้องหนึ่งมี 30 คน มีคนที่เป็นนักฟุตบอล 20 คน มีคนที่เป็นนักบาสเกตบอล 15 คน และมีคนที่เป็นนักบาสเกตบอลหรือนักฟุตบอล 25 คน

(ก) ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะเป็นทั้งนักฟุตบอลและนักบาสเกตบอล

(ข) ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะไม่เป็นทั้งนักฟุตบอลและนักบาสเกตบอล

(ค) ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะเป็นนักฟุตบอล แต่ไม่ใช่นักบาสเกตบอล

15. ในกลุ่มของนักเรียน 100 คน เป็นนักเรียนหญิง 70 คน, เป็นผู้ที่ไว้ผมยาว 50 คน, เป็นนักกีฬา 35 คน, จากจำนวนดังกล่าวมีผู้ที่เป็นหญิงและไว้ผมยาว 30 คน, เป็นหญิงและเป็นนักกีฬา 15 คน, เป็นผู้ที่ไว้ผมยาวและเป็นนักกีฬา 10 คน, และเป็นหญิงที่ไว้ผมยาวและเป็นนักกีฬาด้วย 5 คน ให้หาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งจะเป็น

(ก) หญิงและไม่เป็นนักกีฬา

(ข) หญิงและไม่ไว้ผมยาว

(ค) ผู้ไว้ผมยาวแต่ไม่เป็นผู้หญิง

(ง) เป็นหญิงหรือไว้ผมยาว

(จ) เป็นหญิงหรือเป็นนักกีฬา