บทที่ 6
วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)และ วิธีจัดหมู่(Combination)

6.1 เครื่องหมายแฟกทอเรียล (Factorial symbol)

ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

ผลคูณของจำนวนจาก 1 ถึง n เรียกว่า แฟกทอเรียล n กำหนดโดย n! นั่นคือ

$$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots\ldots \times (n-2)\times(n-1)\times n$$

หรือ $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$ (1)

เพราะว่า $(n-1)! = (n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$$

$$= n\times(n-1)! \quad (2)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า 7!

วิธีทำ $7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$= 5040$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\frac{7!}{6!}$

วิธีทำ $\frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

$= 7$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\frac{4!\times 5!}{3!}$

วิธีทำ $\frac{4!\times 5!}{3!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1}$

$= 4\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$= 480$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\frac{n!}{(n-1)!}$

วิธีทำ $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1).(n-2).\,...\,3.2.1}{(n-1).(n-2).\,...\,3.2.1}$

n

จากสมการ (2) เพราะว่า $n! = n\times(n-1)!$

ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า

$$1! = 1\times(1-1)!$$

$$1 = 1\times 0!$$

$$1 = 0!$$

นั่นคือ $0! = 1$ (3)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\frac{(n+2)!}{n!}$

วิธีทำ $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2).(n+1).n.(n-1).\,....\,4.3.2.1}{n.(n-1).(n-2).\,....\,4.3.2.1}$

$$= (n+2).(n+1)$$

$$= n^2+3n+2$$

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาค่าของแฟกทอเรียลต่อไปนี้

1. $6!$
2. $7!$
3. $8!$
4. $9!$
5. $\frac{7!\times 3!}{5!}$
6. $\frac{8!\times 4!}{9!}$
7. $\frac{n!\times(n+2)!}{(n+3)!}$
8. $\frac{(n-3)!\times(n-6)!}{(n-1)!}$
9. $\frac{n!}{(n-3)!}$
10. $\frac{n!\times(n-3)!}{(n-1)!\times(n-4)!}$

6.2 หลักเบื้องต้นของการนับ (Fundamental Principle of Counting)

ถ้าการทดลองหนึ่งแบ่งเป็นสองขั้นตอน โดยขั้นตอนที่ 1 มีผลการทดลองเป็น n_1 วิธี และแต่ละผลการทดลองเหล่านี้ให้ผลการทดลองขั้นที่ 2 เป็น n_2 วิธี จำนวนผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้จะมี n_1n_2 วิธี

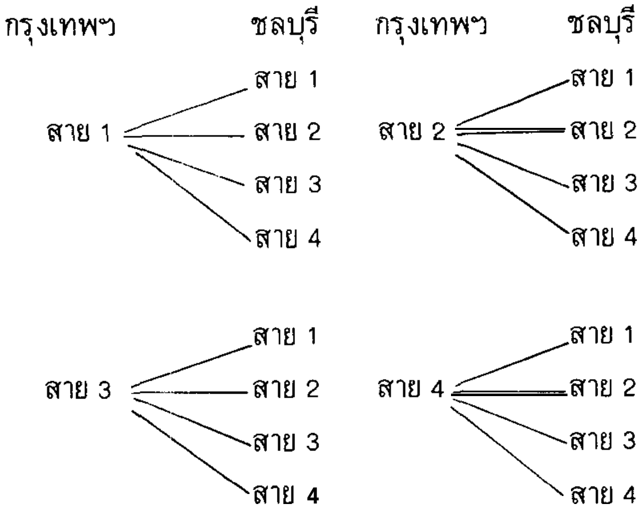
ตัวอย่างที่6 นาย ก. ต้องการจะเดินทางจากกรุงเทพฯ ถึง ชลบุรี ถ้ามีรถประจำทางวิ่งระหว่างกรุงเทพฯ ถึงชลบุรีอยู่ 4 สายคือ สาย 1, สาย 2, สาย 3, และสาย 4 อยากทราบว่า นาย ก. เดินทางจากกรุงเทพฯ ถึงชลบุรีและเมื่อเสร็จธุระแล้วเดินทางกลับกรุงเทพฯ ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ เนื่องจากมีรถประจำทางวิ่งระหว่างสองจังหวัด 4 สาย นาย ก. จึงสามารถเลือกนั่งรถประจำทางสายใดสายหนึ่งใน 4 สายก็ได้ นั่นคือ นาย ก. มีโอกาสเลือกได้ 4 วิธี และเมื่อเดินทางกลับก็เลือกได้ 4 วิธี เช่นกัน

เพราะฉะนั้น นาย ก. เลือกรถประจำทางไปกลับได้เท่ากับ $4 \times 4 = 16$ วิธี คือ

1. ไปสาย 1-กลับสาย 1
2. ไปสาย 1-กลับสาย 2
3. ไปสาย 1-กลับสาย 3
4. ไปสาย 1-กลับสาย 4
5. ไปสาย 2-กลับสาย 1
6. ไปสาย 2-กลับสาย 2
7. ไปสาย 2-กลับสาย 3
8. ไปสาย 2-กลับสาย 4
9. ไปสาย 3-กลับสาย 1
10. ไปสาย 3-กลับสาย 2
11. ไปสาย 3-กลับสาย 3
12. ไปสาย 3-กลับสาย 4
13. ไปสาย 4-กลับสาย 1
14. ไปสาย 4-กลับสาย 2
15. ไปสาย 4-กลับสาย 3
16. ไปสาย 4-กลับสาย 4

หรือสามารถเขียนเป็นแผนผัง (tree diagram) ได้ดังนี้



"ถ้าการทดลองประกอบด้วยการทดลองย่อย p วิธีโดยแต่ละการทดลองย่อยมีทางที่จะเป็นไปได้ต่างกันคือ การทดลองที่ 1 มีผลการทดลอง n_1 วิธี การทดลองที่ 2 มีผลการทดลอง n_2 วิธี การทดลองที่ 3 มีผลการทดลอง n_3 วิธี.......การทดลองที่ p มีผลการทดลอง n_p วิธี

ดังนั้น ผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้มี $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$ วิธี

ตัวอย่างที่ 7 การโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง ผลการทดลองเป็นอย่างไร

วิธีทำ

เพราะว่า เมื่อโยนเหรียญอันที่ 1 จะได้หัว (H) หรือก้อย (T)

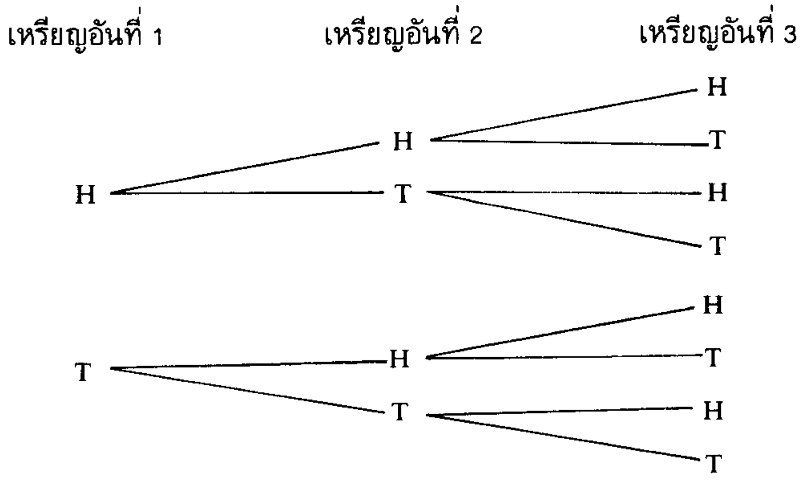
เมื่อโยนเหรียญอันที่ 2 จะได้หัว (H) หรือก้อย (T)

และ เมื่อโยนเหรียญอันที่ 3 จะได้หัว (H) หรือก้อย (T)

นั่นคือเหรียญแต่ละอันมีโอกาสเป็นได้ 2 วิธี

ดังนั้นโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง จะได้ $2 \times 2 \times 2 = 8$ ผลลัพธ์ดังนี้ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT.

การทดลองนี้อาจแสดงโดย tree diagram ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 8 การโยนลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง หน้าลูกเต๋าที่จะเกิดได้นั้นมีกี่วิธี

วิธีทำ

เพราะว่าลูกเต๋าลูกหนึ่งมี 6 หน้า ซึ่งแต่ละหน้ามีเลข 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6

ดังนั้น การโยนลูกเต๋าครั้งที่หนึ่งมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้ 6 วิธี

และ การโยนลูกเต๋าครั้งที่สองมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้ 6 วิธี

เพราะฉะนั้นการโยนลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้งจึงมีโอกาสหรือวิธีที่หน้าลูกเต๋าจะเกิดได้ $6 \times 6 = 36$ วิธี คือ

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ตัวอย่างที่ 9 มีเลขอยู่สามจำนวนคือ 1, 2, 3 จะนำเลขทั้งสามจำนวนมาสร้างเป็นเลขหลักร้อยได้กี่จำนวน

วิธีทำ เพราะว่าเลขหลักร้อยประกอบด้วย

หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย

หลักหน่วย สามารถเลือกได้ 3 วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกได้ 2 วิธี (เมื่อหลักหน่วยเลือกไปแล้ว 1 ตัวก็จะเหลือเลขอีก 2 จำนวน)

หลักร้อย สามารถเลือกได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นจะสร้างเลขหลักร้อยได้ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธีคือ

123, 132, 213, 231, 312, 321

ตัวอย่างที่ 10 ถ้านักศึกษาลงทะเบียนเรียนภาคฤดูร้อน 3 กระบวนวิชา แล้วผลการสอบของนักศึกษาจะเป็นอย่างไรได้บ้าง

วิธีทำ

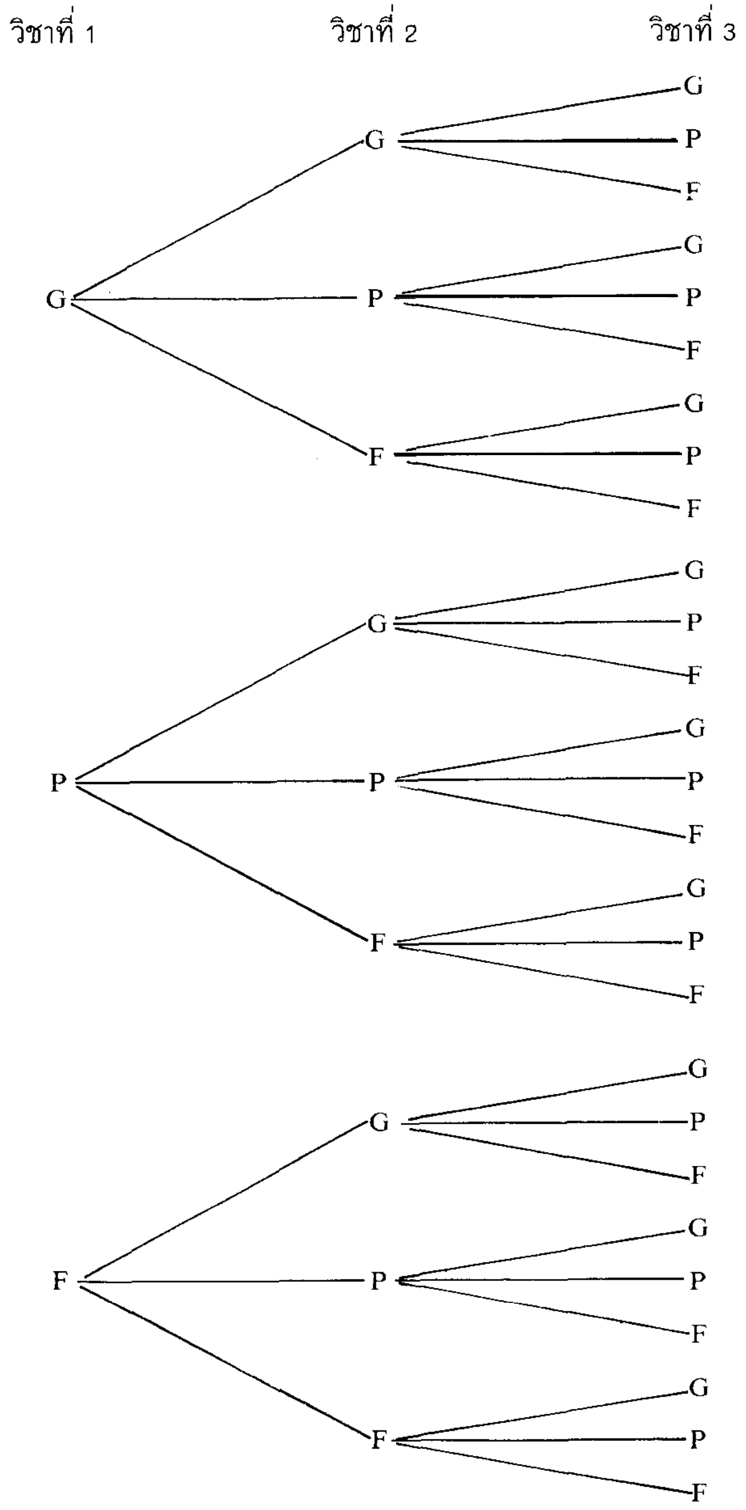
เพราะว่าแต่ละวิชานักศึกษาสามารถจะสอบได้เกรด G, P หรือ F เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

นั้นคือแต่ละวิชาสามารถสอบได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้นผลการสอบเป็นไปได้ $3 \times 3 \times 3 = 27$ วิธี คือ

GGG, GGP, GGF, GPG, GPP, GPF, GFG, GFP, GFF, PGG, PGP, PGF, PPG, PPP, PPF, PFG, PFP, PFF, FGG, FGP, FGF, FPG, FPP, FPF. FFG, FFP, FFF.

หรืออาจเขียนเป็นแผนผัง (tree diagram) ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 6.2

1. มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋า 1 ลูกสามครั้ง
2. มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋า 1 ลูกสามครั้ง และไม่เกิดหน้าซ้ำกันเลย
3. มีกี่วิธีในการโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง
4. มีเลขสามหลักที่น้อยกว่า 400 อยู่กี่จำนวนที่เลือกมาจาก 1, 2, 3, 4, 5, 6
5. มีถนน 3 สายเชื่อมระหว่างกรุงเทพฯ กับชลบุรี และ 4 สายเชื่อมระหว่างชลบุรีกับระยอง อยากทราบว่ามีกี่วิธีที่นักศึกษาเดินทางโดยรถประจำทางจากกรุงเทพฯ ถึงระยอง และเดินทางกลับจากระยองถึงกรุงเทพฯ

   ก. ถ้าเดินทางกลับใช้ถนนสายใดก็ได้

   ข. ถ้าเดินทางกลับห้ามใช้ถนนซ้ำกัน
6. คณะวิทยาศาสตร์มีประตูเข้าออกอยู่ 4 ทาง และคณะมนุษยศาสตร์มีประตูเข้าออก 3 ทาง มีกี่วิธีที่นักศึกษาจะเดินจากคณะวิทยาศาสตร์ไปยังคณะมนุษยศาสตร์ แล้วเดินกลับมายังคณะวิทยาศาสตร์อย่างเดิม

   ก. เมื่อใช้ประตูใดก็ได้

   ข. ห้ามใช้ประตูซ้ำกัน
7. บริษัทปลูกบ้านจัดสรรแห่งหนึ่งมีแบบบ้านให้เลือก 7 แบบ มีเนื้อที่ขนาดต่าง ๆ ให้เลือก 5 ขนาด และมีสีต่าง ๆ ให้เลือก 10 สี ถ้านักศึกษาจะซื้อบ้านจัดสรร 1 หลัง อยากทราบว่ามีกี่วิธีที่นักศึกษาจะเลือกบ้าน 1 หลัง
8. ในการลงทะเบียนวิชาบังคับ 4 วิชา คือ EN 101 มีโอกาสให้เลือก 10 sections, TH 101 มี 5 sections, MA 111 มี 3 sections, และ SO 103 มี 5 sections จะมีกี่วิธีที่นักศึกษาจะลงทะเบียนเรียนวิชาบังคับทั้ง 4 วิชานี้
9. สุ่มตัวอย่างนักศึกษามา 5 คนเพื่อถามความเห็นเกี่ยวกับการเปิดวิทยาเขตรามคำแหงว่าเห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วย จะมีคำตอบที่ได้จากนักศึกษาเหล่านี้เป็นจำนวนเท่าใด
10. บริษัทรถยนต์ผลิตรถยนต์รุ่นใหม่ออกมา 6 แบบ และมีสีให้เลือก 5 สี รถมีชนิด 2 ประตู และ 4 ประตู และมีลูกล้อให้เลือก 2 แบบ

    อยากทราบว่าบริษัทรถยนต์จะต้องผลิตออกมาทั้งหมดกี่แบบ
11. ให้ตัวเลข 5 ตัวคือ 1, 2, 3, 4, 5 ถ้านำมาสร้างจำนวนที่มากกว่า 4,000 จะได้กี่จำนวน

6.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

สมมุติเรามีสิ่งของอยู่จำนวนหนึ่ง ถ้าเราต้องการจะเรียงสับเปลี่ยนกันไปมาเราจะเรียงสิ่งของเหล่านั้นได้กี่วิธี

วิธีการที่นำเอาสิ่งของที่มีอยู่นั้นมาเรียงสับเปลี่ยนกันโดยถือลำดับเป็นสำคัญเรียกว่า "วิธีเรียงสับเปลี่ยน" (Permutation)

เช่น ถ้าเรามีเลขอยู่ 4 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4 มาสร้างเลข 4 ตำแหน่งจะได้เป็น

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,

4123, 4132, 4231, 4213, 4312, 4321.

นั่นคือเลข 4 จำนวนนำมาสร้างเลข 4 ตำแหน่งได้ 24 จำนวน และการจัดเรียงสับเปลี่ยนนี้ลำดับเป็นสิ่งสำคัญมากถ้าสลับลำดับกัน เลขจำนวนที่ได้จะแตกต่างกัน

จากหลักเบื้องต้นจะมีทั้งหมด $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 11 การเลือกตั้งกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วย ประธาน, รองประธาน, เลขานุการ, เหรัญญิก โดยถือเอาผู้ได้รับคะแนนสูงสุดเป็นประธาน ส่วนคะแนนรอง ๆ ลงมาก็เป็นตำแหน่งรองลงมา ถ้ามีผู้สมัครทั้งหมด 4 คน จงหาวิธีทั้งหมดในการเลือกกรรมการชุดนี้

วิธีทำ จากหลักเบื้องต้น

เพราะว่าผู้สมัครทั้ง 4 คนต่างมีโอกาสได้รับเลือกให้เป็นประธานดังนั้นจึงมีโอกาสหรือ

วิธีเลือกประธานได้ 4 วิธี

เมื่อเลือกประธานไปแล้ว 1 คนจะเหลือผู้สมัคร 3 คนที่ต่างก็มีโอกาสได้รับเลือกเป็นรองประธาน ดังนั้นจึงมีโอกาสหรือ

วิธีเลือกรองประธานได้ 3 วิธี

ในทำนองเดียวกันเมื่อเลือกรองประธานแล้วจะมีโอกาสหรือ

วิธีเลือกเลขานุการได้ 2 วิธี และ

วิธีเลือกเหรัญญิกได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้น วิธีทั้งหมดในการเลือกกรรมการชุดนี้คือ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

สมมุติว่า มีสิ่งของอยู่จำนวน n สิ่ง ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนกันโดยนำมาเพียง r สิ่ง ($r \leqslant n$) ในแต่ละครั้ง จะสามารถเรียงสับเปลี่ยนได้กี่วิธี ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12 ให้เลข 1, 2, 3, 4 เป็นเลขสี่จำนวน ถ้านำมาเรียงสลับเปลี่ยนโดยใช้เลข 2 ตัว จะมีอยู่กี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่าเลขตัวที่ 1 มีทางเลือกได้ 4 วิธี

และตัวที่ 2 มีทางเลือกได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้น การเรียงสลับเปลี่ยนโดยเลข 2 ตัวจะมี $4 \times 3 = 12$ วิธีคือ

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43

ตัวอย่างที่ 13 จงหาจำนวนวิธีในการเลือกกรรมการชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วย ประธาน, รองประธาน, เลขานุการ, เหรัญญิก จากผู้สมัครทั้งหมด 7 คน

วิธีทำ เพราะว่า ประธานเลือกได้ 7 วิธี

รองประธานเลือกได้ 6 วิธี

เลขานุการเลือกได้ 5 วิธี

เหรัญญิกเลือกได้ 4 วิธี

เพราะฉะนั้นการเลือกกรรมการชุดนี้มีทั้งหมด $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ วิธี

ตัวอย่างที่ 14 ให้ตัวเลข 7 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ถ้านำมาสร้างจำนวนที่มากกว่า 6,000 จะได้กี่จำนวน

วิธีทำ หลักพันเลือกได้ 2 วิธี (คือ 6, 7)

หลักร้อยเลือกได้ 6 วิธี

หลักสิบเลือกได้ 5 วิธี

หลักหน่วยเลือกได้ 4 วิธี

เพราะฉะนั้นเลขที่มากกว่า 6,000 มีอยู่ $2 \times 6 \times 5 \times 4 = 240$ วิธี

จากตัวอย่างที่แสดงว่า จะพบว่าถ้ามีของ n สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนกันโดยนำมาเพียง r สิ่งในแต่ละครั้ง จะพบว่าวิธีเรียงสับเปลี่ยนนั้นมีทั้งหมด ${}^nP_r$ วิธี

${}^nP_r$ อ่านว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดโดยนำมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

ทฤษฎีบท 1 ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

พิสูจน์ ในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งต่าง ๆ กันครั้งละ r สิ่ง พบว่า

ตำแหน่งที่ 1 เรียงสิ่งของได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เรียงสิ่งของได้ $n-1$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เรียงสิ่งของได้ $n-2$ วิธี

ตำแหน่งที่ r เรียงสิ่งของได้ $n-r+1$ วิธี

เพราะฉะนั้นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งต่าง ๆ กันครั้งละ r สิ่งได้ทั้งหมด

$^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ วิธี

จาก $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

คูณเทอมด้านขวามือด้วย $\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1}$$

จะเห็นว่า $= \frac{n!}{(n-r)!}$ เทอมเศษคือ n! และเทอมส่วนคือ $(n-r)!$

นั่นคือ $^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า $^{5}P_{3}$

วิธีทำ

$$^{5}P_{3} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}$$

$$= 60$$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่า $^{4}P_{4}$

วิธีทำ

$$^{4}P_{4} = \frac{4!}{(4-4)!}$$

$$= \frac{4!}{0!}$$

$$= \frac{4!}{1}$$

$$= 4\times3\times2\times1$$

$$= 24$$

ตัวอย่างที่ 17 ถ้ามีอักษรอยู่ 5 ตัวคือ ก, ข, ค, ง, จ. ถ้านำมาเรียงสลับเปลี่ยนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 ตัวจะได้กี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่า $n = 5, r = 3$

เพราะฉะนั้น

$$^{n}P_{r} = {}^{5}P_{3} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\text{x}1}$$

$$= 60$$

นั้นคือ ถ้านำมาเรียงเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 ตัวจะเรียงได้ 60 วิธี

ตัวอย่างที่ 18 มีเลขอยู่ 4 ตัวคือ 2, 4, 1, 3 ถ้านำมาสร้างเป็นเลข 2 ตัวจะได้กี่จำนวน

วิธีทำ เพราะว่า $n = 4, r = 2$

เพราะฉะนั้น

$$^{n}P_{r} = {}^{4}P_{2} = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!}$$

$$= \frac{4\times3\times2\times1}{2\text{x}1}$$

$$= 12$$

นั่นคือสร้างเลข 2 ตัวได้ 12 จำนวน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเมื่อมีบางสิ่งซ้ำกัน (Permutation with Repeatitions)

สมมุติมีสิ่งของอยู่ n สิ่ง แต่มีบางสิ่งซ้ำกัน เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนกันครั้งละ r สิ่ง จะเรียงสับเปลี่ยนกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดเลข 4 จำนวนคือ 1, 2, 2, 4 จงหาวิธีทั้งหมดในการสร้างเลขทั้ง 4 จำนวนนี้

วิธีทำ ทดลองเขียนดูจะได้

1224, 1242, 1422, 2214, 2241, 2142, 2412, 2124, 2421, 4122, 4212, 4221,

จะได้เลข 4 ตัว 12 จำนวน

ทฤษฎีบท 2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งซึ่งมีบางสิ่งซ้ำกันแบ่งเป็น k กลุ่ม โดย

กลุ่มที่ 1 ซ้ำกัน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 ซ้ำกัน n_2 สิ่ง

กลุ่มที่ 3 ซ้ำกัน n_3 สิ่ง

กลุ่มที่ k ซ้ำกัน n_k สิ่ง

แล้วจะเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของได้ทั้งหมด $= \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,\ldots\,n_K!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดเลข 3 จำนวนคือ 1, 2, 2 ถ้านำมาสร้างเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 ตัวจะได้กี่จำนวน

วิธีทำ เพราะว่า $n = 3,\ n_1 = 2$

เพราะฉะนั้นมีทั้งหมด $= \dfrac{n!}{n_1!}$

$$= \frac{3!}{2!}$$

= 3 จำนวน คือ

122, 212 และ 221

ตัวอย่างที่ 21 ถ้านำอักษรจากคำว่า "Tennessee" มาเรียงสลับเปลี่ยนกัน จะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ อักษรทั้งหมดมี 9 ตัว

อักษรตัว e ซ้ำกัน $n_1 = 4$ ตัว

อักษรตัว n ซ้ำกัน $n_2 = 2$ ตัว

อักษรตัว s ซ้ำกัน $n_3 = 2$ ตัว

เพราะฉะนั้นจะมีทั้งหมด $= \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$

$$= \frac{9!}{4!\,2!\,2!}$$

$$= \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1\times2\times1}$$

= 3780 วิธี

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาค่าของ ${}^{8}P_{3}$
2. จงหาค่าของ ${}^{10}P_{2}$
3. จงหาจำนวนวิธีในการเปลี่ยนยางใหม่ 4 เส้นในรถยนต์ของท่าน
4. ร้านขายของชำมีสินค้าที่ต่างกันอยู่ 10 อย่าง แต่เจ้าของขาย 3 ชิ้น 10 บาท จงหาจำนวนวิธีที่นักศึกษาจะซื้อของจากร้านนี้ 10 บาท
5. มีอักษรอยู่ 6 ตัวคือ A, B, C, D, E และ F จงหาจำนวนวิธีที่จะเรียงเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 ตัวอักษร
6. ถ้ามีเก้าอี้รับแขกอยู่ 7 ตัว และมีผู้มาเยี่ยม 11 คน แล้วนักศึกษาจะมีวิธีจัดให้แขกนั่งเก้าอี้ได้เป็นจำนวนเท่าใด
7. นักศึกษาจงหาจำนวนในการจัดหนังสือ 5 เล่มวางบนชั้นหนังสือ
8. ถ้านักศึกษามีน้อง 4 คน และมีของเล่นอยู่ 4 อย่าง จงหาจำนวนวิธีในการจัดของเล่นให้กับน้องทั้ง 4 คน
9. จงหาค่าของ ${}^{4}P_{1} + {}^{4}P_{2} + {}^{4}P_{3} + {}^{4}P_{4}$
10. จงหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนจากอักษรต่อไปนี้

    (ก) ''letters'' (ข) battle (ค) Missouri

    (ง) Louisiana

12. ถ้ามีจำนวนอยู่ 5 จำนวนคือ 2, 2, 3, 3, 5 จงหาจำนวนวิธีในการสร้างเลข 5 ตัว

6.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม (Cyclic Permutation)

การนำสิ่งของมาเรียงอย่างต่อเนื่องกัน เช่น การจัดเก้าอี้ประชุมเป็นวงกลม, วงรี หรือสี่เหลี่ยม เรียกว่าวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมนี้จะต้องยึดสิ่งหนึ่งคงที่ไว้ ส่วนสิ่งอื่น ๆ สามารถสลับกันอย่างไรก็ได้

ดังนั้น ถ้ามีที่ว่างอยู่ n ที่มีสิ่งของ n สิ่ง ตำแหน่งหนึ่ง เมื่อกำหนดที่ว่างหนึ่งให้ (ที่ใดก็ได้) คงที่ไว้ จึงเหลือที่ว่างอยู่อีกเพียง $(n-1)$ ที่สำหรับสิ่งของ $n-1$ สิ่ง ซึ่งสิ่งของ $n-1$ สิ่งนี้ สามารถเรียงในที่ว่าง $n-1$ ที่ ได้ $(n-1)!$ วิธี

นั่นคือ สิ่งของ n สิ่งจัดเรียงในที่ว่าง n ที่ในเชิงวงกลมได้ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 22 ในการประชุมกรรมการบริษัทชุดหนึ่ง ซึ่งมีสมาชิก 10 คน ถ้าเก้าอี้ประชุมจัดเป็นวงกลมจะมีจำนวนวิธีในการจัดสมาชิกทั้ง 10 คน นั่งบนเก้าอี้ได้เท่าไร

วิธีทำ เพราะว่าในกรรมการชุดนี้ ให้ประธานนั่งเก้าอี้ประจำตำแหน่ง ส่วนกรรมการที่เหลืออีก 9 คน นั่งเก้าอี้ตัวใดก็ได้

เพราะฉะนั้นจะจัดได้ทั้งหมด $= (10-1)!$ วิธี

$= 9!$

$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 362880$ วิธี

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาจำนวนวิธีในการจัดเด็ก 5 คนนั่งเป็นวงกลม
2. จงหาจำนวนวิธีในการจัดนักบาสเกตบอล 5 คน ยืนกลางสนามบาสเกตบอล
3. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 6 คน รับประทานอาหารบนโต๊ะอาหารตัวเดียวกัน
4. จงหาจำนวนวิธีที่ชาย 7 คนจะนั่งเล่นไพ่วงเดียวกัน
5. ถ้านำลูกปัดสี แดง, ม่วง, น้ำเงิน, เขียว และขาวมาทำเป็นสายสร้อยคอ จะมีวิธีเรียงสลับกันได้เป็นจำนวนเท่าใด
6. จงหาจำนวนวิธีที่จะนำดอกมะลิ, กุหลาบ, กระดังงา, ดอกรัก และพุทธรักษามาทำเป็นพวงมาลัยโดยเรียงสลับกัน

6.5 วิธีจัดหมู่ (Combination)

บ่อยครั้งที่เราอยากทราบจำนวนวิธีที่จะเลือกสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง $(0 \leqslant r \leqslant n)$ โดยไม่คำนึงถึงอันดับของสิ่งของในกลุ่ม จะเรียงกันอย่างไรก็ได้ เช่น

เสื้อ, กางเกง กับ กางเกง, เสื้อ ถือว่าเป็นกลุ่มเดียวกัน ดังนั้น การจัดสิ่งของ 2 สิ่งเป็นกลุ่ม จัดได้ 1 กลุ่ม หรือ 1 วิธี

แต่ถ้าคำนึงถึงอันดับแล้ว เสื้อ, กางเกง กับ กางเกง, เสื้อ ไม่เหมือนกัน ดังนั้น การจัดเรียงสับเปลี่ยนจัดได้ 2 วิธี

จำนวนวิธีของการเรียงสับเปลี่ยน มากกว่าจำนวนวิธีของวิธีจัดหมู่ เช่น

การจัดอักษร 3 ตัว คือ a, b, c, ครั้งละ 2 ตัว

แบบเรียงสับเปลี่ยน : ab, ac, bc

ba, ca, cb

แบบจัดหมู่ : ab, ac, bc

จะเห็นว่า แบบจัดหมู่ จัดได้ $= \frac{6}{2} = 3$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหมู่ $=$ $\dfrac{\text{จำนวนวิธีของการเรียงสับเปลี่ยน}}{\text{จำนวนสิ่งในหมู่ที่จัด !}}$

ให้ $\binom{n}{r}$ หรือ $^{n}C_{r}$ แทนจำนวนวิธีจัดหมู่ แล้วจะได้ว่า

$$^{n}C_{r} = \frac{^{n}P_{r}}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

โดยที่ n เป็นสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่ง และ r เป็นจำนวนสิ่งของที่จัดในแต่ละหมู่

สัญลักษณ์อื่น ๆ ที่ใช้คือ $_{n}C_{r}$, C^{n}_{r}, $C_{n,r}$

ถ้าต้องการหา $^{n}C_{n-r}$ แทนค่าลงในสูตร

$$^{n}C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \ (n-n+r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)! \ r!}$$

$$= \frac{n!}{r! \ (n-r)!}$$

$$= {}^{n}C_{r}$$

เนื่องจาก $0! = 1$ ดังนั้น

ในกรณีที่ $r = 0$ หรือ n จะได้ว่า

$$^{n}C_{0} = {}^{n}C_{n} = 1$$

และในกรณีที่ $n = 0$ และ $r = 0$ จะได้ว่า $^{0}C_{0} = 1$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B, C โดยใช้อักษรทั้ง 3 ตัว ในการจัด

วิธีทำ โดยใช้อักษรทั้ง 3 ตัวในการจัดจะได้จำนวนวิธีของการเรียงสับเปลี่ยน 6 วิธี คือ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA แต่จะมีวิธีจัดหมู่เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของ ${}^{15}C_5$

วิธีทำ $${}^{15}C_5 = \frac{15!}{5!\ 10!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 10!}$$

$$= 3003$$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เลือกคน 3 คน จากคนทั้งหมด 5 คน

วิธีทำ n คือ จำนวนคนทั้งหมด = 5

r คือ จำนวนคนที่เลือกมา = 3

$$\therefore {}^{5}C_3 = \frac{5!}{3!\ 2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1}$$

$$= 10$$

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด = 10 วิธี # # #

ตัวอย่างที่ 26 ให้ ${}^{n}C_2 = 66$ จงหาค่า n

วิธีทำ $${}^{n}C_2 = 66$$

$$\frac{n!}{2!\ (n-2)!} = 66$$

$$\frac{n(n-1)\ (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 66$$

$$n(n-1) = 132$$

$$n^2 - n - 132 = 0$$

$$(n+11)\ (n-12) = 0$$

$$n = -11, \quad 12$$

ดังนั้น $n = 12$

ตัวอย่างที่ 27 จงแสดงว่า $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

วิธีทำ เพราะว่า $k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$= k \times \frac{n!}{(n-k)!\,k(k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

และ $n\binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

ดังนั้น $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ #

ตัวอย่างที่ 28 จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ 5 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง (52 ใบ)

วิธีทำ ${}^{52}C_5 = \frac{52!}{5!\,47!}$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 2,598,960$$ #

ตัวอย่างที่ 29 จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบ 5 ข้อจากข้อสอบทั้งหมด 9 ข้อ ได้กี่วิธี

วิธีทำ ${}^{9}C_5 = \frac{9!}{5!\,4!}$

$$= 126$$ #

ตัวอย่างที่ 30 กลุ่มคนกลุ่มหนึ่งมีชาย 5 คน และหญิง 7 คน มีวิธีเลือกกลุ่มคน 5 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 2 คน และหญิง 3 คน ได้กี่วิธี

วิธีทำ วิธีที่จะเลือกชาย $= {}^{5}C_2$

$$= \frac{5!}{2!\,3!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!}$$

$= 10$ วิธี

วิธีที่จะเลือกหญิง $= {}^{7}C_3$

$$= \frac{7!}{3!\,4!}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times4!}$$

$$= 35 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น วิธีที่จะเลือกกลุ่มคน 5 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 2 คน และหญิง 3 คน

$$= ({}^{5}C_2)\,({}^{7}C_3)$$

$$= 10\times35$$

$$= 350 \text{ วิธี}$$

#

แบบฝึกหัด 6.5

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   ${}^{15}C_{15}$, ${}^{15}C_{13}$, ${}^{15}C_{0}$, ${}^{15}C_{1}$, ${}^{46}C_{44}$, ${}^{52}C_{5}$, ${}^{16}C_{3}$, ${}^{12}C_{4}$, ${}^{8}C_{5}$, ${}^{9}C_{7}$, ${}^{10}C_{6}$, ${}^{5}C_{2}$, ${}^{7}C_{3}$, ${}^{14}C_{2}$, ${}^{6}C_{4}$, ${}^{20}C_{17}$, ${}^{18}C_{15}$, ${}^{20}C_{3}$, ${}^{8}C_{3}$

2. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบสลาก 2 ชิ้น จากสลากที่มีอยู่ทั้งหมด 9 ชิ้น
3. ถ้า ${}^{n}P_{r} = 20$ และ ${}^{n}C_{r} = 10$ จงหา n และ r
4. ในถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 3 ลูก และลูกบอลสีดำ 2 ลูก จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก และสีดำ 1 ลูก
5. จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ 3 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งโดยให้มีไพ่ตัว King 1 ใบ
6. จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ 3 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง โดยให้มีไพ่ตัว King อย่างน้อย 1 ใบ
7. นักเรียนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยนักเรียนชาย 9 คน และนักเรียนหญิง 3 คน

   (ก) จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ ซึ่งประกอบด้วยนักเรียน 4 คน

   (ข) จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ ซึ่งประกอบด้วยนักเรียน 4 คน โดยมีนักเรียนหญิงอย่างน้อย 1 คน

   (ค) จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ ซึ่งประกอบด้วยนักเรียน 4 คน โดยมีนักเรียนหญิงเพียงคนเดียว

8. สมศรีมีเพื่อนสนิท 11 คน

(ก) จงหาจำนวนวิธีที่จะเชิญเพื่อน 5 คนจาก 11 คน มารับประทานอาหารเย็น

(ข) จงหาจำนวนวิธีที่จะเชิญเพื่อน 5 คน จาก 11 คน โดยที่มีเพื่อน 2 คนที่สมรสกัน และต้องได้รับเชิญมาพร้อมกัน

(ค) จงหาจำนวนวิธีที่จะเชิญเพื่อน 5 คน จาก 11 คน โดยที่มีเพื่อน 2 คน ไม่พูดกัน และไม่ได้รับเชิญมาพร้อมกัน

9. มีจุด 10 จุด คือ A, B, C, ... อยู่บนระนาบเดียวกัน โดยที่เส้นตรงแต่ละเส้นผ่านจุดได้เพียง 2 จุดเท่านั้น

(ก) มีกี่เส้นที่เกิดจากจุดเหล่านี้

(ข) มีกี่เส้นที่ไม่ผ่านจุด A หรือจุด B

(ค) มีสามเหลี่ยมกี่รูปที่เกิดจากจุดเหล่านี้

(ง) มีสามเหลี่ยมกี่รูปที่ประกอบด้วยจุด A

(จ) มีสามเหลี่ยมกี่รูปที่ประกอบด้วยด้าน AB

10. จงแสดงว่า $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$, $1 \leqslant r \leqslant n$

11. คณะกรรมการชุดหนึ่งมีกรรมการ 7 คน ประกอบด้วยพรรคชาติไทย 2 คน พรรคประชาธิปัตย์ 2 คน และพรรคกิจสังคม 3 คน โดยกรรมการเหล่านี้เลือกมาจาก พรรคชาติไทย 5 คน พรรคประชาธิปัตย์ 6 คน และพรรคกิจสังคม 4 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกคณะกรรมการชุดนี้

12. ในการสอบวิชา MA 103 นักศึกษาต้องตอบคำถาม 7 ข้อ จากข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ จงหา

(ก) จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาตอบคำถาม 7 ข้อ จากข้อสอบ 10 ข้อ

(ข) จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาตอบคำถามอย่างน้อย 3 ข้อ จาก 5 ข้อแรก

13. คณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วยชาย 3 คน และหญิง 2 คน โดยเลือกมาจากชาย 8 คน และหญิง 6 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกกรรมการชุดนี้

14. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ นักศึกษาต้องตอบคำถาม 8 ข้อ จากข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ จงหา

(ก) จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาตอบคำถาม 8 ข้อจากข้อสอบ 10 ข้อ

(ข) จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาต้องตอบคำถาม 3 ข้อแรก

(ค) จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาต้องตอบคำถามอย่างน้อย 4 ข้อ จาก 5 ข้อแรก

15. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ครูจะเลือกนักเรียนอย่างน้อย 1 คน จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน

16. จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการ ซึ่งประกอบด้วยนักเคมี 3 คน นักชีววิทยา 2 คน และนักคณิตศาสตร์ 1 คน ได้กี่วิธี เมื่อให้เลือกจากนักเคมี 5 คน นักชีววิทยา 4 คน และนักคณิตศาสตร์ 3 คน

6.6 ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง n, r เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $0 \leqslant r \leqslant n$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

$$= \binom{n}{0} a^nb^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} a^0b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}b^r$$

$$+ \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

พิสูจน์ การพิสูจน์จะพิสูจน์โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

1. เมื่อ $n = 1$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1b^0 + \binom{1}{1} a^0b^1$$

$$= a+b$$

2. ให้สูตรนี้เป็นจริงสำหรับ $n = k$ นั่นคือ

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!} a^{k-2}b^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!} a^{k-r+1}b^{r-1}$$

$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!} a^{k-r}b^r + \ldots + kab^{k-1} + b^k$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $a+b$ จะได้

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + ka^kb + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r$$

$$+ \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \ldots + b^{k+1} \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$= a^{k+1} + (k+1)\ a^kb + \ldots + \frac{(k+1)k\ldots(k-r+2)}{r!}a^{k-r+1}b^r$$

$$+ \ldots + b^{k+1} \qquad \ldots\ldots (2)$$

เอาตัวร่วม $\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!}$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของเทอม $a^{k-r+1}b^r$ ในสมการ (1) ออก จึงได้ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทั้งสองเป็น

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!}\left[\frac{k-r+1}{r}+1\right]$$

$$= \frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!}\left[\frac{k-r+1+r}{r}\right]$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!r}$$

$$= \frac{(k+1)k\ldots(k-r+2)}{r!}$$

จะเห็นว่า ทางขวามือของสมการ (2) คือ สูตรของการกระจายของ $(a+b)^n$ เมื่อ $n = k+1$ นั่นเอง

นั่นคือ สูตรนี้เป็นจริง เมื่อ $n = k+1$

ดังนั้น เราจึงพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ได้ตามหลักการพิสูจน์โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

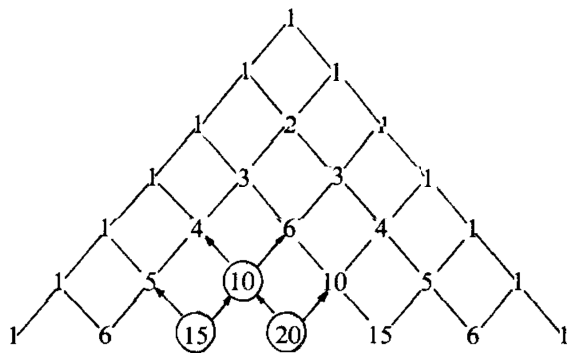
การกระจายของ $(a+b)^n$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. การกระจายนี้มีเทอมทั้งหมด $n+1$ เทอม
2. เทอมแรกของ $(a+b)^n$ คือ a^n
3. เทอมที่สองของ $(a+b)^n$ คือ $na^{n-1}b$
4. เทอมสุดท้ายหรือเทอมที่ $(n+1)$ ของ $(a+b)^n$ คือ b^n
5. ผลรวมของเลขยกกำลังของ a และ b คือ n
6. เลขยกกำลังของ a ลดลงทีละหนึ่งจาก n ถึง 0 ส่วนเลขยกกำลังของ b เพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง จาก 0 ถึง n
7. สัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอม คือ $\binom{n}{r}$ เมื่อ r คือเลขยกกำลังของ a หรือ b
8. ถ้าสัมประสิทธิ์ของเทอม ๆ หนึ่งคูณกับกำลังของ a ในเทอมนั้น และหารผลคูณนี้ด้วยกำลังของ b บวกกับ 1 ผลลัพธ์จะได้เป็นสัมประสิทธิ์ของเทอมต่อไป
9. สัมประสิทธิ์ของเทอมที่มีระยะห่างจากเทอมปลายทั้งสองข้างเท่ากันจะเหมือนกัน
10. สัมประสิทธิ์ของเทอมในการกระจาย $(a+b)^n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)

สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's triangle)

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

เมื่อเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ของการกระจายข้างต้น จะได้ว่า



จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์แต่ละตัวได้จากการนำจำนวน 2 จำนวนที่อยู่ติดกันและเหนือขึ้นไปมาบวกกัน เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทวินามเมื่อนำมาเขียนแล้วอยู่ในรูปคล้ายรูปสามเหลี่ยม ผู้ที่สังเกตเห็นคุณสมบัติของจำนวนเหล่านี้ คือ ปาสคาล (Blaise Pascal) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสจึงเรียกรูปแบบของจำนวนดังกล่าวว่าสามเหลี่ยมปาสคาล

สามเหลี่ยมปาสคาล มีคุณสมบัติที่น่าสนใจ คือ

1. เทอมแรก และเทอมสุดท้ายในแต่ละแถว คือ 1
2. สัมประสิทธิ์ที่อยู่ในสามเหลี่ยมปาสคาลนี้ (นอกจาก 1 ข้างบน) เป็นผลบวกของเลข 2 ตัวบนที่อยู่แถวถัดขึ้นไป เช่น $3 = 1+2$, $4 = 1+3$, $6 = 3+3$, $10 = 4+6$, $15 = 5+10$, $20 = 10+10$

ทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบใด ๆ และ $0 \leqslant r \leqslant n$ จะได้ว่า

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

พิสูจน์
$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{rn!}{r(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{rn!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{rn! + (n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{[r+(n-r+1)]n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{r}$$ #

ตัวอย่างที่ 31 จงกระจาย $(a+b)^5$

วิธีทำ $$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5\times 4}{1\times 2}a^3b^2 + \frac{5\times 4}{1\times 2}a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$ #

ตัวอย่างที่ 32 จงแสดงว่า $2^4 = 16 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

วิธีทำ กระจาย $(1+1)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

$$2^4 = (1+1)^4$$

$$= \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3 1^1 + \binom{4}{2}1^2 1^2 + \binom{4}{3}1^1 1^3 + \binom{4}{4}1^4$$

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$ #

ตัวอย่างที่ 33 จงกระจาย $(2-3x)^4$

วิธีทำ $$(2-3x)^4 = \binom{4}{0}2^4(-3x)^0 + \binom{4}{1}2^3(-3x)^1 + \binom{4}{2}2^2(-3x)^2 + \binom{4}{3}2^1(-3x)^3 + \binom{4}{4}2^0(-3x)^4$$

$$= 16 - 96x + 216x^2 - 216x^3 + 81x^4$$

ตัวอย่างที่ 34 จงแสดงว่า ถ้า $|nx|$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว $(1+x)^n$ จะมีค่าประมาณ $1+nx$ นั่นคือ

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

และหาค่าประมาณของ $(.996)^{16}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า $a = 1,\ b = x$ ดังนั้น

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

ถ้า $|nx|$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แล้ว

$$\left|\frac{n(n-1)x^2}{2!}\right| \leqslant \frac{(nx)^2}{2!}$$

และ $$\left|\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}\right| \leqslant \frac{|nx|^3}{3!}$$

ดังนั้น

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

จาก $(.996)^{16} = (1-.004)^{16}$

$$\approx 1+16(-.004)$$

$$= .936$$

ดังนั้น $(.996)^{16}$ มีค่าประมาณ .936

และจากการคำนวณค่าที่แท้จริงของ $(.996)^{16}$ จะได้ว่ามีค่าเท่ากับ .938

ดังนั้น ค่าประมาณที่หาได้ จึงเป็นค่าประมาณที่ดีพอสมควร

ข้อสังเกต ในการกระจาย $(a+b)^n$ จะเห็นว่า $\binom{n}{r} a^{n-r}b^r$ **เป็นเทอมที่** $r+1$ **และเรียกเทอม**ที่ $r+1$ นี้ว่าเทอมทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$

ตัวอย่างที่ 35 จงหาเทอมกลางของการกระจาย $(x+3)^{12}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินาม จะเห็นว่า เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ **จะได้ทั้งหมด** $n+1$ เทอม

ดังนั้น เทอมกลางของ $(x+3)^{12}$ จึงเป็นเทอมที่ 7

เทอมที่ 7 ของการกระจาย $(x+3)^{12} = \binom{12}{6} x^{12-6}3^6$

$$= 673,596\,x^6$$ #

ตัวอย่างที่ 36 ในการกระจาย $(p+q)^{12}$ จงหาเทอมที่มี p^8

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 12,\ r = 4$

ดังนั้น เทอมที่มี p^8 คือ $\binom{12}{4}\ p^{12-4}q^4$

$$= \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8!}{4!\times 8!}\ p^8q^4$$

$$= 495\ p^8q^4$$ #

ตัวอย่างที่ 37 ในการกระจาย $(a^2+2b)^{12}$ จงหาเทอมที่ 6 และเทอมที่มี b^4

วิธีทำ ต้องการหาเทอมที่ 6 ดังนั้น $r = 5$ เทอมที่ 6 ของการกระจาย $(a^2+2b)^{12}$

$$= \binom{12}{5} (a^2)^7 (2b)^5$$

$$= \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{5! \times 7!} a^{14} (32b^5)$$

$$= 792 \times 32\ a^{14}b^5$$

$$= 25344\ a^{14}b^5$$

และเนื่องจาก $n = 12,\ r = 4$

ดังนั้น เทอมที่มี b^4 คือ $\binom{12}{4} (a^2)^8(2b)^4$

$$= 7920\ a^{16}b^4$$

ตัวอย่างที่ 38 จงหาค่าของ $(1.01)^8$ ให้ถูกต้องโดยมีทศนิยม 6 ตำแหน่ง และหาค่าประมาณด้วย

วิธีทำ $(1.01)^8 = (1+0.01)^8$

$$= 1^8+8(1^7)(.01)+\frac{8\times7}{2!}(1^6)(.01)^2+\frac{8\times7\times6}{3!}(1^5)(.01)^3$$

$$+\frac{8\times7\times6\times5}{4!}(1^4)(.01)^4+\ldots$$

$$= 1+.08+.0028+.000056+.0000007+\ldots$$

$$= 1.082856$$

$$(1.01)^8 \approx 1+8(.01)$$

$$= 1+.08$$

$$= 1.08$$

ดังนั้น $(1.01)^8$ มีค่าประมาณ 1.08 #

แบบฝึกหัด 66

ข้อ 1 ถึงข้อ 7 จงใช้ทฤษฎีบททวินาม กระจายเทอมต่อไปนี้

1. $(a+b)^6$
2. $(2x + y^2)^5$
3. $(x^2 - 2y)^6$
4. $(2x + y^2)^3$
5. $(x^2 - 3y)^4$
6. $(\frac{1}{2}a + 2b)^5$
7. $(2a^2 - b)^6$

จากข้อ 8 ถึงข้อ 9 จงหาเทอมต่าง ๆ

8. เทอมที่ 3 ของการกระจาย $(p+2)^5$
9. เทอมที่ 5 ของการกระจาย $(x+2y^3)^{17}$
10. จงหาเทอมที่มี x^8 จากการกระจาย $(2x^2 - \frac{1}{2}y^3)^8$
11. จงหาเทอมที่มี y^6 จากการกระจาย $(3xy^2 - z^2)^7$
12. จงหาเทอมที่มี x^{20} จากการกระจาย $(x+2y)^{35}$
13. จงหาสัมประสิทธิ์ของ xy^4 จากการกระจาย $(2x+y^2)^3$
14. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2y^3 จากการกระจาย $(x^2 - 3y)^4$
15. จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^2b^3 จากการกระจาย $(\frac{1}{2}a + 2b)^5$
16. จงหาสัมประสิทธิ์ของ a^6b^3 จากการกระจาย $(2a^2 - b)^6$
17. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^3y^4 จากการกระจาย $(x+2y)^7$
18. จงแสดงว่า $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$

    $= 2”$

19. จงแสดงว่า $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0$

20. จงเขียนสามเหลี่ยมปาสคาล เริ่มตั้งแต่ $n = 0$ ถึง $n = 10$

21. จงแสดงว่าจำนวนเซตย่อย (subset) ของ A ซึ่งมีสมาชิก n ตัว เท่ากับ

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

จากข้อ 22 ถึงข้อ 25 จงใช้ทฤษฎีบททวินามช่วยในการกระจายจำนวนต่อไปนี้ในรูปทศนิยม

22. $(1.004)^2$

23. $(.993)^3$

24. $(.995)^4$

25. $(.989)^2$