บทที่ 5
เมตริกซ์และตัวกำหนด
(Matrices and Determinants)

5.1 เมตริกซ์ (เอกพจน์ matrix, พหูพจน์ matrices)

แม่บ้านนักคณิตศาสตร์ผู้หนึ่ง ได้ทำตารางรายการจ่ายประจำวันให้แก่บุตร 4 คน ดังนี้

รายการ/ชื่อบุตร	อาหาร	รถ	อื่น ๆ
นุชรี	15	10	15
พีระพันธุ์	20	6	10
นันทนา	15	10	15
พาสุข	20	6	10

ตารางข้างบนนี้เขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 15 \\ 20 & 6 & 10 \\ 15 & 10 & 15 \\ 20 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

เรียกว่าเมตริกซ์

นิยาม 1 เมตริกซ์ คือ กลุ่มของสมาชิกที่เรียงในแนวนอน เรียกว่า **แถว** และเรียงในแนวตั้งเรียกว่า **หลัก** เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก สมาชิกทั้งหมดอยู่ภายในวงเล็บ [ ] หรือ ( )

เช่น

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc}\textbf{หลักที่ 1} & \textbf{หลักที่ 2} & \textbf{หลักที่ 3}\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow\end{array} & \\ \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \textbf{แถวที่ 1}\\ \leftarrow \textbf{แถวที่ 2}\end{array} \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix} \qquad (2)$$

และ

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 18.5\end{bmatrix} \qquad (3)$$

เป็นต้น

เมตริกซ์ที่กำหนดให้ใน (1) มี 2 แถว และ 3 หลัก จึงกล่าวว่าเมตริกซ์นี้มีขนาด 2×3 (อ่านว่า 2 บาย 3) อย่าลืมว่าแถวมาก่อน แล้วตามด้วยหลัก

เมตริกซ์ใน (2) มีขนาด 3×3 และใน (3). มีขนาด 3×1 แต่ละสิ่งในวงเล็บเรียกว่า **สมาชิกของเมตริกซ์** ในการกล่าวถึงสมาชิกของเมตริกซ์ต้องระบุว่า เป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวใด และหลักใด ดังเช่นเมตริกซ์ใน (2)

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 3 คือ 1
สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 3 หลักที่ 1 คือ 0
สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 2 คือ 2
สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 3

โดยทั่วไปชื่อของเมตริกซ์ถ้ากำหนด (ไม่กำหนดชื่อก็ได้) เป็นภาษาอังกฤษให้ใช้ตัวพิมพ์ใหญ่ และสมาชิกถ้าเป็นภาษาอังกฤษใช้ตัวพิมพ์เล็ก เช่น เมตริกซ์ A มีขนาด (มิติ) $p\times n$ ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

หรือเขียนแบบสั้น ๆ ได้ในรูป

$A = [a_{ij}]_{p\times n}$ หรือ $[a_{ij}]$

สัญลักษณ์ a_{ij} แทนสมาชิกของเมตริกซ์ทั่ว ๆ ไป เมื่อสมาชิกนั้นอยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j

ดรรชนีล่าง i (subscript i) แทนแถว ดังนั้น

$i = 1, 2, 3, \ldots, p$

และ ดรรชนีล่าง j (subscript j) แทนหลัก ดังนั้น

$j = 1, 2, 3, \ldots, n$

ถ้า $i = 2,\ j = 3,\ a_{ij}$ คือ a_{23}

แทนสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3

ถ้า $i = 1,\ j = 5,\ a_{ij}$ คือ a_{15}

แทนสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 5

ถ้าเมตริกซ์ใด ๆ มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก หรือ $p = n$ เรียกเมตริกซ์นั้นว่า **เมตริกซ์จัตุรัส** (square matrix) เขียนเป็นรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ในกรณีนี้สมาชิก $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ วางอยู่ตาม **แนวทแยงมุมหลัก** (main diagonal) **แนวทแยงมุมหลัก** ของเมตริกซ์ คิดจากมุม **บนซ้ายสุด** ไปยัง **ล่างขวาสุด**

หมายเหตุ สมาชิกของเมตริกซ์ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวน อาจเป็นฟังก์ชัน ตัวดำเนินการ (operators) หรืออื่น ๆ เช่น

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \left[\int_0^1 (t^2+1)dt \quad t^2 \quad \sqrt{3t} \quad 2\right]$$

เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×3

(2) $B = [-1 \quad 1 \quad 3 \quad 2$; B เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 1×4

(3) $C = [3]$; C เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 1×1

(4) $D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; D เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3×1

(5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; E เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3×4

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & -4 & 3 \\ 9 & 8 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

แล้ว (1) A มีขนาด (มิติ) 4×5

(2) $a_{11} = a_{24} = a_{45} = 2$

(3) $a_{43} = -5$

(4) $a_{12} = a_{31} = 4$

(5) $a_{13} = a_{21} = a_{23} = 0$

(6) $a_{33} = 6$

แบบฝึกหัด 5.1

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 5 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(ก) จงหาขนาดของเมตริกซ์ A

(ข) จงหาสมาชิกต่อไปนี้ a_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{31}, a_{24} และ a_{34}

2. จงบอกขนาด (มิติ) ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) 13 = [5]

(ค) $C = [3 \quad 3 \quad -2 \quad -1]$

(ง) $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(จ) $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

3. กำหนดให้

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 8 & -7 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา

1) ขนาดของ D	2) d_{12}	3) d_{13}
4) d_{14}	5) d_{35}	6) d_{34}
7) d_{23}	8) d_{25}	9) d_{44}
10) d_{33}		

4. ถ้า $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ โดยที่ $b_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ และ $b_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ จงเขียนเมตริกซ์ B

5.2 การดำเนินการ (Operations)

1. การเท่ากันของเมตริกซ์ ความสัมพันธ์อย่างง่ายที่สุดของ 2 เมตริกซ์ คือ **การเท่ากัน** ซึ่งกำหนดว่าสองเมตริกซ์เท่ากันก็ต่อเมื่อ สมาชิกที่สมนัยกันเท่ากัน ในกรณีนี้เมตริกซ์ทั้งสองต้องมีขนาดเดียวกันด้วย

นิยาม 1 สองเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{p\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อ A และ B มีขนาดเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, p\ ;\ \ j = 1, 2, 3, \ldots, n)$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$

แสดงว่า $x = 3,\ y = 2$

และ $\begin{bmatrix} 5x+2y \\ x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

แสดงว่า $5x+2y = 7$ และ $x - 3y = 1$

2. การบวกของเมตริกซ์

นิยาม 2 ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ มีขนาด **px n** ทั้งคู่ แล้ว **A+ B** คือเมตริกซ์ $C = [c_{ij}]_{p\times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a,+ b_{ij}$ **(i = 1, 2, 3 ,..., p; j = 1, 2, 3 ,..., n)**

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-6) \\ 7+2 \\ (-2)+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+3 \\ 3+(-1) \\ (-1)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4

$$\begin{bmatrix} t^2 & 5 \\ 3t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ t & -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2+1 & -1 \\ 4t & -t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5

เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ - & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

บวกกันไม่ได้ เพราะมีขนาด **ไม่** เท่ากัน

สามารถแสดงได้ว่าการบวกเมตริกซ์เป็นไปตามคุณสมบัติ **การสลับที่** และเป็นไปตามคุณสมบัติ **การเปลี่ยนกลุ่ม**

ดังนั้น ถ้า A, B, C แทนเมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดเดียวกันแล้ว

(1) $A + B = B + A$ (สลับที่)

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (เปลี่ยนกลุ่ม)

ให้ O แทนเมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ แล้วจะได้คุณสมบัติของการบวก

(3) $A + O = A$

การลบของเมตริกซ์ก็เช่นเดียวกับการบวก คือต้องเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน และนำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาลบกัน

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

3. สเกลาร์ (scalar) **คูณเมตริกซ์**

เช่น $7\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -21 & 28 \end{bmatrix}$

และ $t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 3t & 2t \end{bmatrix}$

นิยาม 3 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $p \times n$ เมตริกซ์ และ r เป็นสเกลาร์ แล้ว rA คือเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ เมื่อ $b_{ij} = ra_{ij}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, p\ ;\ j = 1, 2, 3, \ldots, n)$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $5A - \frac{1}{2}B$ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 6 & -20 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5A - \frac{1}{2}B &= 5\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -20 \\ 18 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ -9 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-0 & 5-3 \\ -4+6 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

สามารถแสดงได้ว่า ถ้า a_1 และ a_2 เป็นสเกลาร์ และ **A, B** เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดเดียวกัน แล้ว

(4) $a_1A = Aa_1$

(5) $a_1(A+B) = a_1A + a_1B$

(6) $(a_1+a_2)A = a_1A + a_2A$

(7) $a_1(a_2A) = (a_1a_2)A$

แบบฝึกหัด 5.2

1. ถ้า $\begin{bmatrix} 2 & p & 3 \\ -3 & 5 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

   แล้ว p และ q มีค่าเท่าไร

2. ถ้า $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ แล้ว

   x, y, z มีค่าเท่าไร

3. จงหาค่าของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง เมื่อกำหนดให้ A = B

   (ก) $A = [x+y \quad 4 \quad 2]$, $\qquad B = [0 \quad 4 \quad y]$

   (ข) $A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & y \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & z+1 & 2 \end{bmatrix}$

   (ค) $A = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ -2 & x-z \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & y-x \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & p \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   ถ้า A + B = C จงหาเมตริกซ์ A ที่เป็นจำนวนจริง

5. จงหาเมตริกซ์ $5A - 3B$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

6. จงหา C ถ้า $4A + 3C = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 17 & -1 & 3 \\ -24 & -1 & -16 \\ -7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. จงหา $6A - xB$ & $A = \begin{bmatrix} x^2 & 2x-1 \\ 4 & 1/x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x^2-1 & 6 \\ 3/x & x^2+2x+1 \end{bmatrix}$

8. จงหา $3A + 2B$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

9. ร้านขายเสื้อผ้าสำเร็จรูปร้านหนึ่ง ทำตารางแสดงจำนวนเสื้อชนิดต่าง ๆ ก่อนขายดังนี้

	เสื้อเชิ้ต	**เสื้อยืด**	**เสื้อกีฬา**
เบอร์ S	150	120	80
เบอร์ M	100	230	100
เบอร์ L	90	100	75

หลังจากขายไปแล้วเหลือเสื้อผ้าดังตารางข้างล่างนี้

	เสื้อเชิ้ต	**เสื้อยืด**	**เสื้อกีฬา**
เบอร์ s	30	35	12
เบอร์ M	28	12	19
เบอร์ L	35	42	40

จงหาจำนวนเสื้อแต่ละชนิดที่ขายไป

10. ครูแสดงผลการทดสอบของเด็กกลุ่มแมว สองครั้ง ซึ่งแต่ละวิชามีคะแนนเต็ม 50 ด้วยตารางดังนี้

ครั้งที่ 1

ชื่อ/วิชา	คณิตศาสตร์	เคมี	ชีววิทยา	ฟิสิกส์	ภาษาอังกฤษ
ปัญญ์	48	32	42	29	25
วิชญ์	35	43	34	40	38
ชนิตย์	40	20	35	25	25
กฤช	43	38	28	32	30

ครั้งที่ 2

ชื่อ/วิชา	คณิตศาสตร์	เคมี	ชีววิทยา	ฟิสิกส์	ภาษาอังกฤษ
ปัญญ์	42	28	36	24	22
วิชญ์	32	40	28	35	30
ชนิตย์	38	14	26	18	20
กฤช	37	32	25	28	22

1) จงสร้างตารางผลรวมของการทดสอบทั้งสองครั้ง
2) ถ้าให้ครั้งที่ 1 แทนด้วยเมตริกซ์ A ครั้งที่ 2 แทนด้วย B และผลรวมของการทดสอบแทนด้วยเมตริกซ์ C
   จงเขียนความสัมพันธ์ของเมตริกซ์ในรูป $A + B = C$
3) จาก 2) จงหา c_{23}, c_{32}, c_{44}, c_{45}
4) จงสร้างตารางแสดงผลต่างของการทดสอบทั้งสองครั้ง
5) ให้ตารางผลต่างแทนด้วยเมตริกซ์ C
   จงเขียนความสัมพันธ์ของเมตริกซ์ในรูป $A - B = C$
6) จาก 5) จงหา c_{23}, c_{32}, c_{44} และ c_{45}

5.3 การคูณระหว่างเมตริกซ์

นิยาม 4 ถ้า A = $[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$ เป็นเมตริกซ์ที่มี 1 แถว n หลัก เรียก A ว่า เมตริกซ์-แถว (row matrix) และถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์ที่มี n แถว 1 หลัก เรียก A ว่าเมตริกซ์หลัก (column matrix)

นิยาม 5 ถ้า A = $[a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}]$ เป็นเมตริกซ์แถว และ

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์หลัก

ผลคูณ AB จะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 1×1 โดยที่

$$AB = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}]$$

ข้อสังเกต จำนวนหลักของ A จะเท่ากับจำนวนแถวของ B จึงหาผลคูณ AB ได้

ตัวอย่างที่ 8

(1) $$[2 \quad 4 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 4(-1) + (-1)(2)]$$

$$= [2 \quad -4 \quad -2]$$

$$= [-4]$$

(2) $$[-3 \quad 0 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [(-3)(-1) + 0.0 + 1(-1) + 2.3]$$

$$= [3 + 0 - 1 + 6]$$

$$= [8]$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A = [4\ \ 1\ \ -2]$, $B = [1\ \ 3]$, $C = [2\ \ 1\ \ 4]$, $D = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

(1) $BD = [1(-2)+3(2)] = [-2+6] = [4]$

(2) $CE = [2.1+1.2+4.3] = [2+2+12] = [16]$

(3) $AE = [4.1+1.2+(-2).3] = [4+2-6] = [0]$

(4) $AF = [4.3+1.2+(-2).1] = [12+2-2] = [12]$

(5) $CF = [2.3+1.2+4.1] = [6+2+4] = [12]$

(6) BE หาผลคูณไม่ได้ เพราะว่าจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ E

(7) AD หาผลคูณไม่ได้ เพราะว่าจำนวนหลักของ A ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ D

นิยาม 6 ให้ $A = [a_{ij}]_{k\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณ $AB = C$ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $k \times p$ โดยที่สมาชิก c_{ij} ของ C เกิดจากการคูณเมตริกซ์แถวที่ i ของ A ด้วยเมตริกซ์หลักที่ j ของ B แล้วนำมาบวกกัน

ข้อสังเกต จากนิยามจะเห็นว่า

(1) A และ B จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B ดังนั้นถ้ากำหนด A และ B โดยให้

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

แล้วจะหาผลคูณ AB ได้ เพราะว่า A มี 3 หลัก และ B มี 3 แถว แต่หาผลคูณ BA ไม่ได้ เพราะว่า B มี 4 หลัก ในขณะที่ A มีเพียง 2 แถวเท่านั้น

(2) ถ้าหาผลคูณของ AB ได้ เมตริกซ์ AB จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ A และมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

ดังนั้น ผลคูณ AB เมื่อ A และ B กำหนดให้ใน (6) จะมี 2 แถว และ 4 หลัก เพราะว่า A มี 2 แถว และ B มี 4 หลัก

จากข้อสังเกตทั้งสองข้อนี้ เขียนหลักของการคูณได้ว่า

A มีขนาด 2×3 และ B มีขนาด 3×4 เขียนได้เป็น

$$(2 \times \underbrace{3)(3}_{} \times 4) \qquad (7)$$

ถ้าจำนวนประชิด (ดังใน (7)) เท่ากัน (ในที่นี้เป็น 3) แล้วจะหาผลคูณของ **AB** ได้

ขนาดของเมตริกซ์ผลคูณ หรือเมตริกซ์ผลลัพธ์ หาได้โดยตัดจำนวนประชิดที่เท่ากันออก แล้วจำนวนที่เหลืออีกสองจำนวน คือขนาดของเมตริกซ์ผลคูณ

ดังนั้น ใน (7) ตัด 3 ออก ที่เหลือคือ 2×4 เป็นขนาดของเมตริกซ์ **AB**

ในทำนองเดียวกัน ถ้า A มีขนาด 4×3 และ B มีขนาด 3×5 การหาขนาดของผลคูณ AB ทำได้ดังนี้คือ

$$(4 \times \underbrace{3)(3}_{} \times 5)$$

ดังนั้น AB มีขนาด 4×5

แต่หาผลคูณ BA ไม่ได้ เพราะ $(3 \times \underbrace{5)(4}_{} \times 3)$ มีจำนวนประชิดไม่เท่ากัน

โดยทั่วไปสามารถเขียนแสดงการหาขนาดของเมตริกซ์ผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$(k \times \underbrace{n)(n}_{} \times p) = (k \times p)$$

(3) ถ้าผลคูณของ AB = C หาได้ โดยที่ $C = [c_{ij}]$ แล้วสมาชิก c_{ij} หาได้โดยการคูณสมาชิกในแถวที่ i ของ A ด้วยสมาชิกที่สมนัยในหลักที่ j ของ B แล้วนำมาบวกกัน (ดังนิยาม 6)

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ A มีขนาด 2×3 และ B มีขนาด 3×2 จึงหา AB และ **BA** ได้

AB จะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2

ส่วน BA จะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3×3

$$\text{ให้ } AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad \text{และ } BA = D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

จะได้ c_{11} = ผลบวกของ (แถวที่ $\underline{1}$ ของ A × หลักที่ $\underline{1}$ ของ B)

$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

c_{12} = ผลบวกของ (แถวที่ $\underline{1}$ ของ A × หลักที่ $\underline{2}$ ของ B)

$= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

c_{21} = ผลบวกของ (แถวที่ $\underline{2}$ ของ A × หลักที่ $\underline{1}$ ของ B)

$= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

c_{22} = ผลบวกของ (แถวที่ $\underline{2}$ ของ A × หลักที่ $\underline{2}$ ของ B)

$= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

ในทำนองเดียวกัน d_{11} = ผลบวกของ (แถวที่ 1 ของ B × หลักที่ 1 ของ A)

$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}$

d_{12} = ผลบวกของ (แถวที่ 1 ของ B × หลักที่ 2 ของ A)

$= b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}$

d_{13} = ผลบวกของ (แถวที่ 1 ของ B × หลักที่ 3 ของ A)

$= b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}$

d_{21} = ผลบวกของ (แถวที่ 2 ของ B × หลักที่ 1 ของ A)

d_{22} = ผลบวกของ (แถวที่ 2 ของ B × หลักที่ 2 ของ A)

$= b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}$

d_{23} = ผลบวกของ (แถวที่ 2 ของ B × หลักที่ 3 ของ A)

$= b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}$

d_{31} = ผลบวกของ (แถวที่ 3 ของ B × หลักที่ 1 ของ A)

$= b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21}$

d_{32} = ผลบวกของ (แถวที่ 3 ของ B × หลักที่ 2 ของ A)

$= b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22}$

d_{33} = ผลบวกของ (แถวที่ 3 ของ B × หลักที่ 3 ของ A)

$= b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดเมตริกซ์ A และ B ดังข้างล่างนี้ จงพิจารณาดูว่าสามารถหาผลคูณของ AB และ BA ได้หรือไม่ ถ้าหาได้จงบอกขนาดของเมตริกซ์ผลคูณนั้น

(1) $A = [a_{ij}]_{2\times3}$; $B = [b_{ij}]_{3\times2}$

หา AB ได้ และมีขนาด 2×2

หา BA ได้ และมีขนาด 3×3

(2) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$; $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$

หา AB ได้ และมีขนาด 2×3

หา BA ไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

(3) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$; $B = [b_{ij}]_{3\times 1}$

หา AB ได้ และมีขนาด 3×1

หา BA ไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

ตัวอย่างที่ 11 จงหา AB ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+1(4) & 2(1)+1(-2) & 2(5)+1(1) & 2(-1)+1(0) \\ -1(3)+0(4) & -1(1)+0(-2) & -1(5)+0(1) & -1(-1)+0(0) \\ 3(3)+1(4) & 3(1)+1(-2) & 3(5)+1(1) & 3(-1)+1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 11 & -2 \\ -3 & -1 & -5 & 1 \\ 13 & 1 & 16 & -3 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้หาผลคูณ BA ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 12 จงหา AB และ BA ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4)+1(1) & 2(0)+1(2) \\ -1(4)+3(1) & -1(0)+3(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2)+0(-1) & 4(1)+0(3) \\ 1(2)+2(-1) & 1(1)+2(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา AB และ BA ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 12 สามารถหาผลคูณของ AB และ BA ได้แต่ $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 13 สามารถหาผลคูณของ AB และ BA ได้ และ $AB = BA$

นั่นแสดงว่า การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ **ไม่**เป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

โดยทั่วไป การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์จะสอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $A(BC) = (AB)C$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)

(2) $A(B+C) = AB+AC$ (กฎการกระจายทางซ้าย)

(3) $(B+C)A = BA+CA$ (กฎการกระจายทางขวา)

เมื่อ A, B, C มีขนาดตามที่กำหนด

จากคุณสมบัติข้อหนึ่งของจำนวนจริง

ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$ หรือทั้ง x และ y เป็น 0 แต่ในเมตริกซ์ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อนี้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 14 จงหา AB ถ้า

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(3)+2(-6) & 4(-4)+2(8) \\ 2(3)+1(-6) & 2(-4)+1(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าทั้ง A และ B ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ แต่ผลคูณเป็นเมตริกซ์ศูนย์

การคูณเมตริกซ์ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติอีกข้อหนึ่งคือ ถ้า **AB = AC** แล้ว ไม่จำเป็นที่ B = C ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 15 จงหา **AB** และ **AC** ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+2(2) & 4(1)+2(1) \\ 2(1)+1(2) & 2(1)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2)+2(0) & 4(2)+2(-1) \\ 2(2)+1(0) & 2(2)+1(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

แสดงว่าการคูณเมตริกซ์ไม่เป็นไปตามคุณสมบัติการตัดออก (Cancellation law) จะเห็นว่าการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์สัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 5x-3y+2z &= 14 \\ x+y-4z &= -7 \\ 7x-3z &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการหาค่า x, y, z ได้โดยการแทนค่า (วิธีหนึ่ง)

นำระบบสมการเชิงเส้นนี้ไปเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้ ซึ่งสมการเมตริกซ์อยู่ในรูป

$$\boxed{AX = B} \tag{9}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เรียก A ว่า **เมตริกซ์สัมประสิทธิ์** (coefficient matrix)

คือเมตริกซ์ ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x, y, z ใน (8)

หมายเหตุ ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ของ x อยู่ในหลักที่ 1

ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ของ y อยู่ในหลักที่ 2

ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ของ z อยู่ในหลักที่ 3

สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 2 หรือในตำแหน่งที่ (3, 2) เป็นศูนย์เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ y' ในสมการที่ 3 ของ (8) เป็น 0

เรียก X ว่า **เมตริกซ์ตัวแปร** (variable matrix)

คือเมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นตัวแปร (ตัวไม่ทราบค่า)

เมตริกซ์ตัวแปรต้องเป็นเมตริกซ์หลัก (column matrix)

เรียก B ว่า **เมตริกซ์ค่าคงที่** (constant matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์หลักเสมอเช่นกัน

โดยการใช้นิยามของการคูณเมตริกซ์ จึงได้ว่า

$$AX = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(x) + (-3)(y) + 2(z) \\ (1)(x) + (1)(y) + (-4)(2) \\ (7)(x) + (0)(y) + (-3)(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5x - 3y + 2z \\ x + y - 4z \\ 7x - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

จากนิยามการเท่ากันของเมตริกซ์ จึงเห็นได้ว่า (10) ก็คือระบบสมการใน (8)

ดังนั้นระบบสมการเชิงเส้น จึงเขียนเป็นรูปสมการเมตริกซ์ AX = B นั่นคือนิยามของการคูณเมตริกซ์สัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 16 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 5 \\ 2x + y - z &= 4 \\ 3x + 2y + 2w &= 0 \\ x - 2y + 3z + 4w &= -1 \end{aligned}$$

วิธีทำ จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ระบบสมการข้างบนนี้จะสมนัยกับระบบเมตริกซ์ $AX = B$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงพิจารณาดูว่าเมตริกซ์ A และ B ในข้อต่อไปนี้ สามารถหา AB และ BA ได้หรือไม่ ถ้าหาได้จงหาขนาดของเมตริกซ์ผลคูณ

   1) $A = [a_{ij}]_{3\times4}$, $B = [b_{ij}]_{4\times1}$

   2) $A = [a_{ij}]_{1\times1}$, $B = [b_{ij}]_{1\times2}$

   3) $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, $B = [b_{ij}]_{3\times2}$

   4) $A = [a_{ij}]_{3\times1}$, $B = [b_{ij}]_{1\times3}$

   5) $A = [a_{ij}]_{3\times5}$, $B = [b_{ij}]_{5\times3}$

2. จงหาผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

   1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

   2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 0

   1

   3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

3. จงหา AB และ BA ถ้า

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 3 & 2\end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix}4 & 2\\1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

4. จงหา AB และ BA ถ้า

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\-2 & 0 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix}5 & 7 & 9\\2 & 3 & -1\\-2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

5. จงหา AB ถ้า

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

มีเงื่อนไขใดจึงจะหา BA ได้

6. จงหา AB และ CB ถ้า

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix}1 & 6\\3 & -4\end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า AB $=$ CB แต่ A $\neq$ C

7. จงหา AB ถ้า

$$A = \begin{bmatrix}2 & 6\\3 & 9\end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix}3 & -6\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

หมายเหตุ AB $=$ 0 แต่ทั้ง A และ B ไม่ใช่เมตริกซ์ศูนย์

8. จงใช้คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9. จากข้อ 8 จงแสดงว่า $A(B+C) = AB+AC$

10. ถ้า A, B และ C มีขนาด 2×3, 3×2 และ 3×3 ตามลำดับแล้ว จงพิจารณาขนาดของ

1) C(BA)   2) B(AC)

3) (AC)B   4) (AB)C

11. จงเขียนระบบสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบของเมตริกซ์

$$\begin{aligned} x+z+y &= 2 \\ 3z+2x+y &= 4 \\ y+x &= 0 \end{aligned}$$

12. จงเขียนระบบสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบของเมตริกซ์

$$\begin{aligned} 5x+3y+2z+4w &= 5 \\ x+y+w &= 0 \\ 3x+2y+2z &= -3 \\ x+y+2z+3w &= 4 \end{aligned}$$

13. โรงเรียนแห่งหนึ่งจัดงานเพื่อหาเงินเป็นทุนการศึกษาสำหรับเด็กนักเรียนที่ยากจน จำนวนผู้มาช่วยงานแสดงด้วยตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1

	ผู้ใหญ่	เด็ก
ชาย	20	28
หญิง	12	15

โรงเรียนประสงค์จะตอบแทนผู้มาช่วยงาน เป็นค่าอาหาร และค่าพาหนะ โดยคิดเป็นจำนวนเงินดังตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 2

	ค่าพาหนะ (บาท)	ค่าอาหาร (บาท)
ผู้ใหญ่	12	35
เด็ก	6	25

1) โรงเรียนต้องจ่ายค่าอาหารสำหรับชายเท่าไร

2) โรงเรียนต้องจ่ายค่าอาหารสำหรับหญิงเท่าไร

3) โรงเรียนต้องจ่ายค่าพาหนะสำหรับชายเท่าไร

4) โรงเรียนต้องจ่ายค่าพาหนะสำหรับหญิงเท่าไร

5) จงเขียนตารางที่ 3 แสดงค่าอาหารและค่าพาหนะที่โรงเรียนต้องจ่ายให้แก่ชายและหญิง

6) จงเขียนตารางที่ 1, 2 และ 3 ให้อยู่ในรูป AB = C

เมื่อ A แทนตารางที่ 1

B แทนตารางที่ 2

และ C แทนตารางที่ 3

14. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$

และ AB = C แล้ว จงหา

1) c_{12} , c_{22}

2) c_{21} , c_{11}

5.4 แบบของเมตริกซ์

เมตริกซ์ที่จะแยกมากล่าวถึงมีดังต่อไปนี้

1. ทรานสโพสของเมตริกซ์

กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ

ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^t (อ่านว่า A - ทรานสโพส) เกิดจากการเปลี่ยนทุก ๆ แถวของ A เป็นหลักของ A^t

ดังนั้นแถวที่หนึ่งของ A จะกลายเป็นหลักที่หนึ่งของ A^t

แถวที่สองของ A จะกลายเป็นหลักที่สองของ A^t

และ แถวสุดท้ายของ A จะกลายเป็นหลักสุดท้ายของ A^t

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ แล้ว } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

และ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ แล้ว } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

นิยาม 7 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ แล้วทรานสโพสของ A แทนด้วย $A^t = [a^t_{ij}]$ เป็น $p \times n$ เมตริกซ์ เมื่อ $a^t_{ij} = a_{ji}$

คุณสมบัติของทรานสโพส

(1) $(A^t)^t = A$

(2) $(kA)^t = A^t$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์ (จำนวนจริง)

(3) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(4) $(A+B+C)^t = A^t + B^t + C^t$

(5) $(AB)^t = B^tA^t$

(6) $(ABC)^t = C^tB^tA^t$

ทรานสโพสของผลบวกและผลคูณของเมตริกซ์ที่มากกว่าสามเมตริกซ์ก็มีคุณสมบัติเช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 17 จงหา$(AB)^t$ และ B^tA^t ถ้า

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad (AB)^t = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต $(AB)' = B'A'$ แต่หา $A'B'$ ไม่ได้

2. **เมตริกซ์จัตุรัส** (square matrices) คือเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก **เช่น**

$$[5], \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ เป็นต้น

3. **เมตริกซ์ทแยงมุม** (diagonal matrices) คือเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ยกเว้นสมาชิกตามแนวทแยงมุมหลัก (main diagonal) (อย่าลืมว่าแนวทแยงมุมหลักคิดจากมุมบนซ้ายสุดไปยังล่างขวาสุด)เช่น
เป็นเมตริกฆซ์ทแยงมุมที่มีขนาด 2×2 และ 3×3 ตามลำดับ

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. **เมตริกซ์ศูนย์** (zero matrix) เป็นชนิดพิเศษของเมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวตามแนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์

เช่น $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็นต้น

5. **เมตริกซ์เอกลักษณ์** (identity matrix) คือเมตริกซ์ทแยงมุมซึ่งมีสมาชิกทุกตัวตามแนวทแยงมุมหลักเป็น 1

ใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ ดังนั้น

$$I_1 = [1], \quad I^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของเมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาด $n \times n$ แล้ว $AI_n = I_nA = A$

ตัวอย่าง เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. เมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) คือเมตริกซ์ที่เท่ากับทรานสโพสของมัน หรือ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรก็ต่อเมื่อ $A^t = A$ ตัวอย่างของเมตริกซ์สมมาตรได้แก่

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าสมาชิกของเมตริกซ์สมมาตรที่อยู่ใต้ และเหนือเส้นทแยงมุมหลักต้องเป็นชุดเดียวกัน และถ้าพับเมตริกซ์ตามแนวเส้นทแยงมุมหลัก สมาชิกที่มาทับกันจะต้องเท่ากัน

หมายเหตุ เมื่อ A แทนเมตริกซ์ใด ๆ

n แทนจำนวนเต็มบวก จะได้

$$A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ ครั้ง}}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 5.4

. จงแสดงว่า $(A+B)' = A' + B'$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

และ

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

   1) $(A+B)' = A' + B'$

   2) $(A-B)' = A' - B'$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

   $(5A)' = 5A'$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $(AB)' = B'A'$

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

   (ก) $AB = -BA$

   (ข) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

6. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า $A^2 - 4A - 5I = 0$ (เมตริกซ์ศูนย์)

7. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $[x \quad 4 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ x \end{bmatrix} = [20]$

8. จงหา A^3 ถ้า

$$(ก)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ข)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.5 ตัวกำหนด (Determinant)

ทุก ๆ เมตริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ กำหนดด้วยค่าจริงค่าหนึ่งจากเมตริกซ์ A ค่าจริงนี้เรียกว่า ตัวกำหนดของ A หรือดีเทอร์มิแนนท์ A (determinant A) เขียนแทนด้วย det (A) หรือ $|A|$

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ แล้ว

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

การหาค่าของตัวกำหนด

นิยาม 8 ถ้า $A = [a]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 1x1 แล้ว $\det(A) = a$

ตัวอย่าง เช่น

ตัวกำหนดของ $[5] = 5$

หรือ $|5| = 5$

ตัวกำหนดของ $[-3] = -3$

หรือ $|-3| = -3$

ตัวกำหนดของ $[0] = 0$

หรือ $|0| = 0$

นิยาม 9 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2 แล้ว

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ตัวอย่างที่ 18 จงหา $\det(A)$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(3) - (2)(4) = 3 - 8$$

$$= -5$$

ตัวอย่างที่ 19 จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) \quad (-1)(4)$$

$$= 6 + 4 = 10$$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหา det (A) ถ้า A = [8], [-8], $[\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}]$

2. จงหา |A| ถ้า A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงหา |A| ถ้า A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. จงหา |A|, |B| และ |AB| ถ้า A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 4 & [illegible] \\ -1 & [illegible] \end{bmatrix}$

   พร้อมทั้ง บอกความสัมพันธ์ระหว่างสามตัวกำหนด (determinant) นี้

5.6 การกระจายด้วยโคแฟกเตอร์ (Expansion by Cofactors)

นิยาม 10 กำหนดเมตริกซ์ A ให้ **ไมเนอร์** คือตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสย่อย (square submatrix) ใด ๆ ของ A

นั่นคือ เมื่อกำหนดเมตริกซ์จัตุรัส A ไมเนอร์คือตัวกำหนดของรูปเมตริกซ์ใด ๆ จาก A ที่ได้จากการตัดจำนวนแถวและจำนวนหลักที่เท่ากันออก ดังตัวอย่างเช่น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ ทั้งคู่เป็นไมเนอร์ เพราะว่า

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ ทั้งคู่เป็นเมตริกซ์ย่อยของ A

แต่ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ และ $|\ 1 \quad 2\ |$ ไม่เป็นไมเนอร์

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ ไม่ใช่เมตริกซ์ย่อยของ A

ถึงแม้ว่า $[1 \quad 2]$ เป็นเมตริกซ์ย่อยของ A แต่ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส ดังนั้น $|1 \quad 2|$ จึงไม่เป็นไมเนอร์

สิ่งที่จะต้องทราบในการหาค่าของตัวกำหนดอีกสิ่งหนึ่ง คือ โคแฟกเตอร์ (cofactor ของสมาชิกของเมตริกซ์

นิยาม 11 กำหนดเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]$ **โคแฟกเตอร์** ของสมาชิก a_{ij} คือ จำนวนจริงที่ได้จากการคูณ $(-1)^{i+j}$ ด้วยไมเนอร์ที่ได้จาก A ซึ่งตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออก

กล่าวได้ว่า **ในการคำนวณหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก** a_{ij} นั้น

1) ต้องหาเมตริกซ์ย่อยของ A โดยการตัดทั้งแถวและหลัก ที่สมาชิก a_{ij} ปรากฏอยู่
2) หาค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย
3) คูณตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยด้วย $(-1)^{i+j}$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก 4 ในเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า 4 ปรากฏอยู่ในตำแหน่ง (2, 1) เมตริกซ์ย่อยจึงได้จากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 1 ดังนั้น

$$\text{จาก} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ได้} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีค่าของตัวกำหนดเท่ากับ $(2)(9) - (3)(8) = -6$

เพราะว่า 4 ปรากฏในตำแหน่ง (2, 1) จึงมี $i = 2$ และ $j = 1$

ดังนั้น $(-1)^{i+j} = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$

นั่นคือ โคแฟกเตอร์ของ 4 คือ $(-1)(-6) = 6$

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดเมตริกซ์ A ดังเช่นตัวอย่างที่ 20 จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก 9

วิธีทำ สมาชิก 9 ปรากฏในตำแหน่ง (3, 3) จึงตัดสมาชิกในแถวที่ 3 และหลักที่ 3 ออก จึงได้เมตริกซ์ย่อย

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีค่าตัวกำหนดเท่ากับ $(1)(5) - (2)(4) = -3$

เพราะว่า ในกรณีนี้ $i = j = 3$

นั่นคือ โคแฟกเตอร์ของ 9 คือ $(-1)^{3+3}(-3) = (-1)^6(-3) = -3$

ต่อไปนี้ก็สามารถหาค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ใด ๆ ได้

การกระจายด้วยโคแฟกเตอร์

ในการหาค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีขนาดใดก็ตาม หาได้ดังนี้

1) เลือกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของเมตริกซ์เพียงแถวเดียวหรือหลักเดียว

2) หาโคแฟกเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัวในแถวหรือหลักที่เลือก

3) คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวหรือหลักที่เลือกด้วยโคแฟกเตอร์ของมัน แล้วนำมารวมกัน ผลบวกที่ได้คือตัวกำหนดของเมตริกซ์

ตัวอย่างที่ 22 จงหา det (A) ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ กระจายด้วยหลักที่ 2

$$\begin{aligned} |A| &= (5)(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 5) + (2)(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 2) + (-6)(\text{โคแฟกเตอร์ของ } -6) \\ &= (5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-6)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5(-1)(-4-3) + (2)(1)(12-0) + (-6)(-1)(3-0) \\ &= (-5)(-7) + (2)(12) + (6)(3) \\ &= 35 + 24 + 18 = 77 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 23 จงใช้ A ของตัวอย่างที่ 22 และกระจายด้วยแถวที่ 1 เพื่อหา det (A)

วิธีทำ $|A| = 3(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 3) + 5(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 5) + 0(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 0)$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (3)(1)(8+6) + (5)(-1)(-4\ -3)$$

$$= (3)(14) + (-5)(-7)$$

$$= 42 + 35 = 77$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 22 และตัวอย่างที่ 23 ทำให้ทราบถึงคุณสมบัติที่สำคัญ 2 ประการคือ

1) ค่าของตัวกำหนดจะเท่ากัน ไม่ว่ากระจายด้วยแถวหรือหลักใด

2) การกระจายด้วยแถวหรือหลัก ที่มี 0 ปรากฏอยู่ จะช่วยลดการคำนวณหาตัวที่เกี่ยวข้อง จึงควรเลือกแถวหรือหลักที่มี 0 มากที่สุด (ถ้ามี) ดังเช่น

ตัวอย่างที่ 24 จงหา det (A) ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ครั้งแรกควรตรวจสอบว่าแถวหรือหลักใดมี 0 มากที่สุด ในที่นี้คือหลักที่ 2 จึงเลือกกระจายด้วยหลักที่ 2

$|A| = 0(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 0) + 4(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 4) + 0(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 0)$
$+ 1(\text{โคแฟกเตอร์ของ } 1)$

$$= 0 + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

โดยการกระจายด้วยโคแฟกเตอร์ของแต่ละตัวกำหนดที่มีขนาดเป็น 3 จึงได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -22$$

และ $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8$$

ดังนั้น $|A| = 4(-22) - 8 = -88 - 8 = -96$

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

2. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

5 . จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

6. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

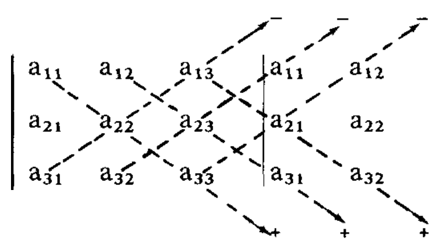
ข้อสังเกต

(1) ในการหาค่าของตัวกำหนด A เมื่อ A มีขนาด 3×3 คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

อาจหา det (A) โดยใช้หลักการคูณทแยง

วิธีการหา เพิ่มหลักที่ 4 หลักที่ 5 ของ $|A|$ โดยใช้สมาชิกหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ของเมตริกซ์ A เป็นสมาชิกของหลักที่ 4 และหลักที่ 5 ตามลำดับ แล้วคูณทแยงตามลูกศร ดังนี้



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ตัวอย่างเช่นจงหา $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

วิธีการหา

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right. = (2)(0)(0)+(3)(1)(2)+(1)(1)(1)-(2)(0)(1)-(1)(1)(2)-(0)(1)(3)$$

$$= 0+6+1-0-2-0$$

$$= 5$$

(2) สำหรับโคแฟกเตอร์ $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

เมื่อ C_{ij} คือ โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij}

M_{ij} คือ ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij}

ถ้า $i+j$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ $C_{ij} = M_{ij}$

ถ้า $i+j$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ $C_{ij} = -M_{ij}$

5.7 คุณสมบัติของตัวกำหนด (Properties of Determinants)

จากความรู้เรื่องการหาค่าของตัวกำหนด และการสังเกต พอจะรวบรวมคุณสมบัติที่สำคัญของตัวกำหนดได้ดังต่อไปนี้

1. ถ้าแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของเมตริกซ์จัตุรัส A เป็นศูนย์ทั้งหมด แล้ว $\det(A) = 0$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

โดยการกระจายด้วยแถวที่ 1 จะได้ $\det(A) = 0$

2. ถ้าสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่งหรือหลักคู่ใดคู่หนึ่ง แล้วตัวกำหนดจะเปลี่ยนเครื่องหมาย

พิจารณา $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

กระจายด้วยแถวที่ 3 ได้

$$|A| = a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

ต่อไปพิจารณาเมตริกซ์ B ซึ่งได้จาก A โดยการสลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

กระจายด้วยแถวที่ 2 จึงได้

$$|B| = -a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

ดังนั้น $|B| = -|A|$

หรือ $\det(B) = -\det(A)$

3. ถ้าสองแถวหรือสองหลักของตัวกำหนด มีสมาชิกเหมือนกันแล้ว ค่าของตัวกำหนดเป็นศูนย์ เช่น

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$ เมื่อสลับสมาชิกแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ได้

$\det(A) = -\det(A)$ (จากคุณสมบัติ 2)

$2\det(A) = 0$

จึงได้ $\det(A) = 0$

4. ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยการคูณทุก ๆ สมาชิกในหนึ่งแถวของ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $|B| = k|A|$ เช่น

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ka_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ka_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= k\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ข้อควรระวัง

$$8\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 16\\ 24 & 32\end{bmatrix}$$

แต่ $$8\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 24 & 32\end{vmatrix}$$

หรือ $$8\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 4(2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 16\\ 3 & 16\end{vmatrix}$$

5. สำหรับ $n \times n$ เมตริกซ์ A และจำนวนจริง k ใด ๆ $\det(kA) = k^n\det(A)$

จากคุณสมบัติ 4

$$\det(kA) = \det\left\{k\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det\left\{\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{vmatrix}$$

$$= k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{vmatrix}$$

$$= (k)(k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (k)(k)(k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k^3\det(A)$$

หมายเหตุ นี่สำหรับ 3×3 เมตริกซ์ ซึ่งมี $n = 3$

6. ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากเมตริกซ์ A โดยการบวกสมาชิกในแถว (หลัก) ใดแถว (หลัก) หนึ่งของ A ด้วยจำนวนจริงคูณสมาชิกในแถวหรือหลักอื่นของ A แล้ว $|A| = |B|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

และ $$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{bmatrix}$$

B เกิดจาก A โดยการบวกด้วย k คูณสมาชิกในแถวแรกของ A กับสมาชิกในแถวที่ 3 ของ A

เมื่อหาค่าของ $|A|$ และ $|B|$ จะได้ $|A| = |B|$

7. $\det(A) = \det(A^t)$

ถ้า $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ แล้ว

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

เมื่อกระจายหา $|A|$ และ $|A'|$ แล้ว จะได้

$$|A| = |A'|$$

8. ถ้า A และ B มีขนาดเดียวกันแล้ว det(A) det(B) = det (AB) จะละข้อแสดงว่าเป็นจริง[1]

ตัวอย่างที่ 25 เพื่อแสดงว่าคุณสมบัติ 8 เป็นจริง

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $|A| = 5, \; |B| = 31$

$$AB = \begin{bmatrix} 33 & \text{[illegible]} \\ 34 & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$$ ดังนั้น $|AB| = 155$
$= |A||B|$

แบบฝึกหัด 5.7

1. จงแสดงว่า คุณสมบัติ 5 เป็นจริง เมื่อ $k = -3$ และ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. จงแสดงถึงคุณสมบัติ 8 เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

---

[1]สำหรับการพิสูจน์คุณสมบัติ 8 ให้ดู E.D. Nearing, "Linear Algebra and Matrix Theory", P. 78 Wiley, New York, 1967.

3. จงแสดงว่า

$$\begin{vmatrix} 2a & 3r & x \\ 4b & 6s & 2y \\ -2c & -3t & -z \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

โดยไม่ต้องกระจายด้วยโคแฟกเตอร์

5.8 **กฎของคราเมอร์** (Cramer's Rule)

ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ในรูปของสมการเมตริกซ์ AX = B (ดูหัวข้อ 5.3) เมตริกซ์ X เกิดจากการหารของ **สอง** ตัวกำหนด (determinant)

ตัวกำหนดที่เป็นตัวตั้ง คือตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยแทนที่หลักที่ i ของ A ด้วยสมาชิกของเมตริกซ์ B

ตัวกำหนดที่เป็นตัวหาร คือ $|A|$

พิจารณาระบบสมการ ถ้า

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

เมื่อ x_1, x_2, x_3 เป็นตัวไม่ทราบค่า (unknown) แล้ว คราเมอร์กล่าวว่า

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

เมื่อ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a33 \end{vmatrix}$

ในการนำกฎของคราเมอร์ไปใช้ในการแก้สมการนั้นมีข้อจำกัดอยู่ 2 ประการคือ

1) เป็นระบบสมการที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร (ตัวไม่ทราบค่า) เพื่อให้เมตริกซ์ทั้งหมดที่เกี่ยวข้องเป็นเมตริกซ์จัตุรัส และหาค่าตัวกำหนดได้

2) ค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต้องไม่เท่ากับศูนย์ เพราะเป็นตัวหาร ถ้า $|A| = 0$ ก็ไม่สามารถใช้กฎของคราเมอร์ได้

ตัวอย่างที่ 26 จงแก้สมการ

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x + y = 6$$
$$2x + y = 1$$

วิธีทำ เขียนเป็นสมการเมตริกซ์ **AX = B** ได้

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 21 & & 0 \end{vmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

จากกฎของคราเมอร์ได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-5}{-1} = S$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{--I} = \frac{9}{-1} = -9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{16}{-1} = -16$$

เพราะฉะนั้น $x = 5, \quad y = -9, \quad z = -16$

ตัวอย่างที่ 27 จงแก้สมการ จากระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= -5 \\ y + 3z + w &= 6 \\ 2x + 3y + z + w &= 4 \\ x + z + w &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

จากกฎของคราเมอร์ได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{0}{20} = 0$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-20}{20} = -1$$

เพราะฉะนั้น $x = 0, y = 1, z = 2, w = -1$

หมายเหตุ หาค่าของตัวกำหนดที่มีขนาด 4 ได้ดังเช่นตัวอย่างที่ 20 ของหัวข้อ 5.6

แบบฝึกหัด 5.8

จงแก้สมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

1. $\begin{aligned} 2x-3y &= -1 \\ x+4y &= 5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x-4y &= -2 \\ 6x+12y &= 36 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x+y+z &= 4 \\ x-y+2z &= 15 \\ 2x-2y-z &= 5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x+3y+2z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ 5x+2y-3z &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x+y &= 2 \\ 2x-z &= 1 \\ 2y-3z &= -1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x-2y+z &= -1 \\ 3x+y-2z &= 4 \\ y-z &= 1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x+2y+z &= 1 \\ x-y+6z &= 21 \\ 3x+2y-z &= -4 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x+2y+z+w &= 7 \\ 3x+4y-2z-4w &= 13 \\ 2x+y-z+w &= -4 \\ x-3y+4z+5w &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x+y+z+w &= 0 \\ 2x-y+2z+w &= 4 \\ 3x+y-3z-w &= -3 \\ 4x+y+2z+2w &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3 &= 11 \\ x_1-2x_2+3x_3 &= 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3 &= 5 \end{aligned}$

5.9 เมตริกซ์ผกผัน (The Inverse)

นิยาม 12 เมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ คือ เมตริกซ์ B ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\boxed{AB = BA = I}$$

B เรียกว่าเมตริกซ์ผกผันของ A แทนด้วย A^{-1} อ่านว่า เมตริกซ์ผกผันของ A หรือ A อินเวอร์ส

ถ้าเมตริกซ์จัตุรัส A มีเมตริกซ์ผกผันจะกล่าวว่า A เป็นเมตริกซ์ที่**หาเมตริกซ์ผกผันได้** (invertible) หรือเป็น **เมตริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน** (nonsingular matrix)

ถ้า A ไม่มีเมตริกซ์ผกผัน หรือ หาเมตริกซ์ผกผันของ A ไม่ได้ จะกล่าวว่า A เป็นเอกฐาน (singular)

ตัวอย่างเช่น

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันได้ (invertible) ทั้งนี้เพราะมี

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 28 จงหา A^{-1} (ถ้ามี) จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ สมมติให้ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A ซึ่งทำให้ $AB = BA = I_2$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของเมตริกซ์ ได้

$a = 1,\quad b = 0$ และ

$2a+c = 0,\quad 2b+d = 1$

แก้สมการได้ $a = 1,\ b = 0,\ c = -2$ และ $d = 1$

เพราะฉะนั้น $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$

หมายเหตุ ควรทดสอบว่า

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 29 จงหา A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ สมมติให้ B $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A ซึ่งทำให้ AB = BA = I_2

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-4c & 2b-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากการเท่ากันของเมตริกซ์ ได้

$$a-2c = 1 \qquad\qquad b-2d = 1$$
และ
$$2a-4c = 0 \qquad\qquad 2b-4d = 0$$

ซึ่งแก้สมการหา a, b, c, d ไม่ได้ แสดงว่า A ไม่มีเมตริกซ์ผกผันของมัน

นั่นคือ A เป็นเอกฐาน (singular)

สูตรของการหาเมตริกซ์ผกผันที่มีขนาด 2×2

ด้วยวิธีการเดียวกับตัวอย่างที่ 28 และ 29

ถ้า A $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad-bc \neq 0$ แล้ว A เป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันได้

และ $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 30 จงหา A^{-1} เมื่อ A $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เพราะว่า $(2)(2)-(3)(-1) = 7 \neq 0$

แสดงว่า A เป็นเมตริกซ์ที่มีเมตริกซ์ผกผัน จากสูตร A^{-1} จึงได้

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

การหาเมตริกซ์ผกผันโดยการคำนวณจากโคแฟกเตอร์และเมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrices)

นิยาม 13 โคแฟกเตอร์เมตริกซ์ (cofactor matrix) ที่มีขนาด $n\times n$ เขียนแทนด้วย A^c เกิดจากการแทนที่แต่ละสมาชิกของ A ที่มีขนาด $n\times n$ ด้วยโคแฟกเตอร์ของมัน

ตัวอย่างที่ 31 จงหา A^c ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

วิธีทำ
$$A^c = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A^c = \begin{bmatrix} 18 & 16 & -11 \\ 0 & 16 & -8 \\ -6 & -16 & 17 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ถ้า $A = [a_{ij}]$ แล้ว $A^c = [a^c_{ij}]$ แทนโคแฟกเตอร์เมตริกซ์

ดังนั้น a^c_{ij} แทนโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

นิยาม 14 เมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ $n \times n$ เมตริกซ์ A คือทรานสโพสของโคแฟกเตอร์เมตริกซ์ของ A

ให้เมตริกซ์ผูกพัน A แทนด้วย A^a

อ่านว่า เมตริกซ์ผูกพัน A หรือ แอดจ๊อยท์ A

ดังนั้น $\boxed{A^a = (A^c)^t}$

ตัวอย่างที่ 32 จงหา A^a เมื่อกำหนด A ดังเช่นตัวอย่างที่ 31

วิธีทำ $A^a = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 16 & 16 & -16 \\ -11 & -8 & 17 \end{bmatrix}$

ทฤษฎี 1 $AA^a = A^aA = |A|I$

หารตลอดด้วย $|A|$ ถ้า $|A| \neq 0$ จึงได้

$$A\left(\frac{A^a}{|A|}\right) = \left(\frac{A^a}{|A|}\right)A = I$$

จากนิยามของเมตริกซ์ผกผัน จึงได้

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} A'/} \quad \text{ถ้า} \quad |A| \neq 0$$

นั่นคือ ถ้า $|A| \neq 0$ แล้ว A^{-1} เกิดจากการหารเมตริกซ์ผูกพันของ A ด้วยตัวกำหนดของ A

ตัวอย่างที่ 33 จงหา A^{-1} ของ A ในตัวอย่างที่ 31

วิธีทำ

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

จากตัวอย่างที่ 32 ได้ว่า

$$A^a = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 16 & 16 & -16 \\ -11 & -8 & 17 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A - ' = \left(\frac{A^a}{|A|}\right) = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 16 & 16 & -16 \\ -11 & -8 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/8 & 0 & -1/8 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -11/48 & -1/6 & 17/48 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 34 จงหา A^{-1} ถ้า $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $\det(A) = -1 \neq 0$ แสดงว่า มี A^{-1}

$$A^c = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -8 \\ 11 & -9 & 17 \\ 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^a = (A^c)^t = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 35 จงหา A^{-1} ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $|A| = -2$ เพราะฉะนั้น มี A^{-1}

$$A^c = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^a = (A^c)^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ข้อควรระวัง ในการหาตัวผกผันด้วยวิธีข้างบนนี้ ต้องระมัดระวังในการคำนวณหาโคแฟกเตอร์เมตริกซ์ เพราะต้องใช้คำนวณหาค่าตัวกำหนดอีกด้วย

แบบฝึกหัด 5.9

จงตรวจดูว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมตริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ (nonsingular) หรือหาไม่ได้ (singular) ถ้าหาได้ จงหาตัวผกผันนั้น

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5.10 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมตริกซ์ผกผัน

ให้ $AX = B$ เป็นสมการเมตริกซ์ที่แทนระบบสมการเชิงเส้น โดยที่ A มีขนาด $n \times n$ ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีตัวผกผันแล้ว รากของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

ใช้ในการหารากของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการ และจำนวนตัวแปรน้อย เพราะถ้า A มีขนาดมากกว่า 3 แล้ว จะยุ่งยากในการหา A^{-1}

สำหรับ $X = A^{-1}B$ ได้มาจากการเอา A^{-1} คูณสมการ

$$AX = B \quad \text{จึงได้}$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$I_nX = A^{-1}B$$

ดังนั้น $$X = A^{-1}B$$

ตัวอย่างที่ 36 จงหารากของระบบสมการเชิงเส้น

$$x-2y = -9$$

$$-3x+y = 2$$

วิธีทำ จากระบบสมการ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จากสูตร $$X = A^{-1}B$$

หา A^{-1} เช่นเดียวกับหัวข้อ 5.10 ได้

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

แทนค่าสูตร

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} -5 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของเมตริกซ์ ได้

$$x = 1, \quad y = 5$$

ตัวอย่างที่ 37 จงหาค่า x, y, z จาก

$$5x+8y+z = 2$$
$$2y+z = -1$$
$$4x+3y-z = 3$$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $x = 3, \; y = -2, \; z = 3$

แบบฝึกหัด 5.10

จงใช้ตัวผกผัน **(inverse)** หารากของระบบสมการต่อไปนี้

1. $4x+2y = 6$
   $2x-3y = 7$
2. $4l-p = 1$
   $5l-2p = -1$
3. $x+3y = 8$
   $x-2y = 3$
4. $2x+3y-z = 4$
   $-x-2y+z = -2$
   $3x-y = 2$
5. $2x+y+z = 1$
   $x-2y-3z = 1$
   $3x+2y+4z = 5$
6. $2x+3y-z = 4$
   $-x-2y+z = -2$
   $3x-y = 2$
7. $x_1+x_2 = 3$
   $2x_1-3x_2+x_3 = -1$
   $x_1+x_2-x_3 = 0$