บทที่ 4
เวคเตอร์ในระนาบ

4.1 ปริมาณเวคเตอร์ (vector quantity)

ปริมาณเวคเตอร์มีทั้งขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction)

เรานิยมเขียนแสดงปริมาณเวคเตอร์ด้วย directed line segment ดังรูป

เวคเตอร์จากจุด A ถึงจุด B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$

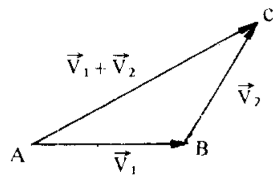
เวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ มีความยาว AB และมีทิศทางจาก A ถึง B

แต่เวคเตอร์ $\overrightarrow{BA}$ มีความยาว AB และมีทิศทางจาก B ถึง A

ดังนั้น $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

การบวกเวคเตอร์ อาจทำได้โดยการเขียน directed line segment ดังรูป

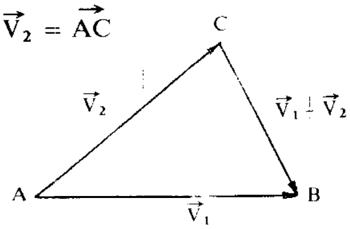
เมื่อให้ $\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{V}_2 = \overrightarrow{BC}$



$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

การลบเวคเตอร์ โดยการเขียน directed line segment ดังรูป

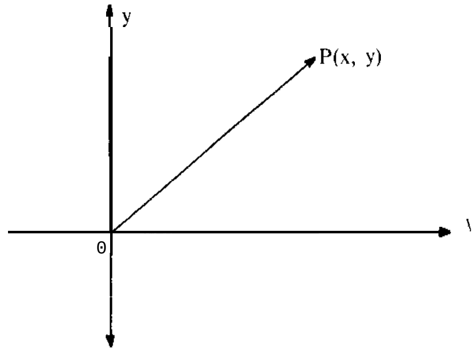
เมื่อให้ $\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{V}_2 = \overrightarrow{AC}$



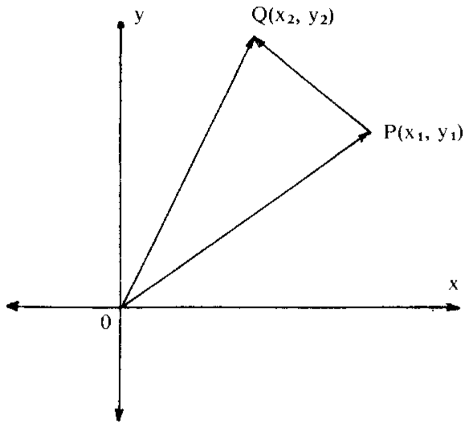
$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 + \vec{V}_1 = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

พีชคณิตเวคเตอร์ในระนาบ

เซต ของอันดับคู่ (ordered pairs) ของจำนวนจริง ซึ่งใช้แทนเซตของจุดทั้งหลายในระนาบพิกัดฉาก (rectangular coordinate plane) อาจใช้แทนเซตของเวคเตอร์ในระนาบ



จากรูป (x, y) แทนปริมาณเวคเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ หรือเขียนแทนด้วย $\vec{P}$
ฉะนั้น $\overrightarrow{PQ}$ แสดงถึงปริมาณเวคเตอร์ $\vec{Q} - \vec{P}$



จากรูป $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

นั่นคือ $\overrightarrow{PQ}$ แสดงถึงปริมาณเวคเตอร์ $\vec{Q} - \vec{P} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ตัวอย่าง 1 ถ้า $\vec{A}$ แสดงได้ด้วย (3, 7) และ $\vec{B}$ แสดงได้ด้วย (-5, 3) จงหาอันดับคู่ในระนาบแสดง $\overrightarrow{AB}$

วิธีทำ $\overrightarrow{AB}$ แสดงได้ด้วย $\vec{B} - \vec{A} = (-5, 3) - (3, 7) = (-8, -4)$ **ตอบ**

ถ้า A, B, C, D เป็นจุดใด ๆ AB จะขนานกับ CD เมื่อ a เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้ $\vec{B} - \vec{A} = a(\vec{D} - \vec{C})$

ตัวอย่าง 2 ให้ A, B, C, D มีโคออร์ดิเนตเป็น (3, 0), (-1, 2), (1, 7), (5, 5) ตามลำดับ จงแสดงว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

วิธีทำ

$$\vec{B} - \vec{A} = (-1, 2) - (3, 0) = (-4, 2)$$

$$\vec{C} - a = (1, 7)-(5, 5) = (-4, 2)$$

$$\therefore \quad \vec{B} - \vec{A} = 1(\vec{C} - \vec{D})$$

ดังนั้น AB ขนานกับ CD

นั่นคือ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

A, B, C เป็นจุดสามจุดที่แตกต่างกัน จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้

$\vec{A} = a\vec{B} + b\vec{C}$ และ $a + b = 1$

ตัวอย่าง 3 ให้ A, B, C มีโคออร์ดิเนตเป็น (3, 0), (-1, 2), (5, -1) ตามลำดับ จงแสดงว่า A, B, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และจงหาค่า a, b

วิธีทำ

$$8\text{-}A' = (-1, 2) - (3, 0) = (-4, 2) = 2(-2, 1)$$

$$\vec{C} - \vec{B} = (5, -1) - (-1, 2) = (6, -3) = -3(-2, 1)$$

$$\frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = -\frac{1}{3}(\vec{C} - \vec{B})$$

$$B - A = -\frac{2}{3}(\vec{C} - \vec{B})$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \frac{2}{3}(\vec{C} - \vec{B})$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C} - \frac{2}{3}\vec{B}$$

$$\vec{A} = (1 - \frac{2}{3})\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C}$$

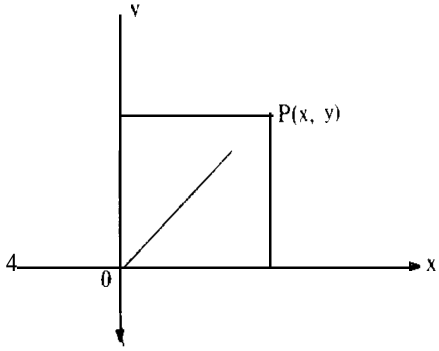
$$\vec{A} = \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

นั่นคือ A, B, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

และ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ **ตอบ**

4.2 ขนาดของปริมาณเวคเตอร์

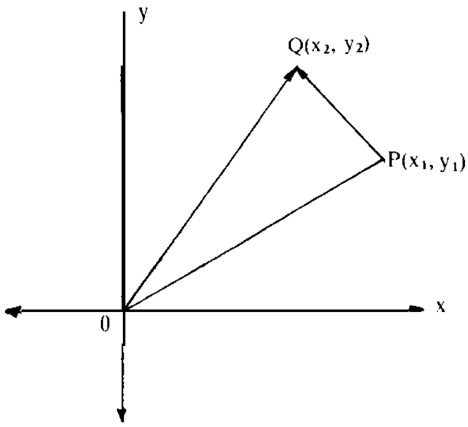
ขนาดของปริมาณเวคเตอร์ $\vec{P}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{P}|$



$$\text{เมื่อ } \vec{P} = (x, y)$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

ถ้า $\vec{P} = (x_1, y_1)$ และ $\vec{Q} = (x_2, y_2)$



$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{Q} - \vec{P}|$$

แต่ $\vec{Q} - \vec{P} = (x_2 - x_1, \ y_2 - y_1)$

ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ P, Q เป็นจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (3, 4); (0, 0) ตามลำดับ จงหาระยะทาง จาก P ถึง Q

วิธีทำ

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$ **ตอบ**

4.3 จุดแบ่งเส้นตรง

ถ้า A, C เป็นจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (x_1, y_1), (x_2, y_2) ตามลำดับ และ B เป็นจุดซึ่งแบ่ง AC ในอัตราส่วน m:n

เราจะได้โคออร์ดิเนตของ B คือ $\frac{n}{m+n}(x_1, y_1)+\frac{m}{m+n}(x_2, y_2)$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ A, B เป็นจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (6, 3), (−3, 5) ตามลำดับ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดซึ่งแบ่ง AB ในอัตราส่วน 1:2

วิธีทำ

โคออร์ดิเนตของจุดที่ต้องการคือ

$$\frac{2}{1+2}(6, 3)+\frac{1}{1+2}(-3, 5) = (4, 2)+(-1, \frac{5}{3})$$

$$= (3, \frac{11}{3}) = (3, 3\frac{2}{3})$$ **ตอบ**

ถ้า A, B มีโคออร์ดิเนตเป็น (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ

เราจะได้จุดกึ่งกลางของ AB มีโคออร์ดิเนตเป็น

$$\frac{1}{1+1}(x_1, y_1)+\frac{1}{1+1}(x_2, y_2) = \frac{1}{2}(x_1, y_1)+\frac{1}{2}(x_2, y_2)$$

$$= (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$$

4.4 สมการของเส้นตรงในระนาบ

ถ้า A, B มีโคออร์ดิเนตเป็น (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ

เราจะได้สมการของเส้นตรง AB คือ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

พิสูจน์ ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง AB ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (x, y)

$$\therefore \quad \vec{P} = a\vec{A}+b\vec{B} \quad \text{และ } a+b = 1$$

$$\therefore \quad \vec{P}-\vec{A} = a\vec{A}+b\vec{B}-\vec{A}$$

$$\vec{P} - \vec{A} = b\vec{B} - (1 - a)\vec{A}$$

$$\vec{P} - \vec{A} = b\vec{B} - b\vec{A}$$

$$\vec{P} - \vec{A} = b(\vec{B} - \vec{A})$$

นั่นคือ $(x, y) - (x_1, y_1) = b((x_2, y_2) - (x_1, y_1))$

$$(x - x_1, y - y_1) = (b(x_2 - x_1), b(y_2 - y_1))$$

ดังนั้น $x - x_1 = b(x_2 - x_1)$

และ $y - y_1 = b(y_2 - y_1)$

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ถ้าให้เส้นตรง AB มีความชัน (slope) $= m$

เราจะได้ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

ดังนั้นเราจะได้สมการของเส้นตรง AB คือ

$$\frac{Y - Y_1}{x - x_1} \quad m$$

หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ตัวอย่าง 6 จงหาสมการของเส้นตรงผ่านจุด (7, 2) กับ (5, -2)

วิธีทำ ให้ $(x_1, y_1) = (7, 2)$ และ $(x_2, y_2) = (5, -2)$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$\frac{Y-2}{x-7} = \frac{-2-2}{5-7}$$

$$\frac{Y-2}{x-7} = \frac{-4}{-2}$$

$$Y - 2 = 2(x - 7)$$

$$y - 2 = 2x - 14$$

$$y = 2x - 12$$

ตอบ

ตัวอย่าง 7 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชัน -1 และผ่านจุด (5, 3)

วิธีทำ ให้ $(x_1, y_1) = (5, 3)$

สมการของเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y-3 = -1(x-5)$$
$$y-3 = -x+5$$
$$y = -x+8 \qquad \text{ตอบ}$$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. ถ้าเวกเตอร์ A และ B มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน จงเขียนภาพแสดงเวคเตอร์ $A+B$
2. จงแสดงด้วยภาพให้เห็นว่า ถ้าเวคเตอร์ $A+B = C$ แล้ว $B = C-A$
3. ถ้าให้ $A = (3, 4)$

   $B = (2, 2)$

   และ $C = (3, -4)$

   จงหา (ก) $|A|, |B|, |C|$

   (ข) $A+B$ และ $A-C$

   (ค) $|A+B|, |A-C|$
4. จงหาเลขจำนวน a ซึ่งทำให้ $|aB| = 1$ ถ้า $B = (2, 2)$
5. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1, 2) และ (3, 4)
6. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (0, -1) และ (2, 3)
7. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (2, 4) และมีความชันเท่ากับ 1
8. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1, -1) และมีความชันเท่ากับ -1