บทที่ 3
ระบบจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงจำนวนจริงซึ่งเป็นระบบทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักมาเก่าแก่และได้รับการพัฒนามาพร้อมกับอารยธรรมอื่น ๆ ของมนุษย์ เป็นระบบที่มีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกับชีวิตประจำวันของมนุษย์ทุกคน นักศึกษาคงคุ้นกับคำถาม "เท่าไร" เช่น มีเงินเท่าไร บ้านหลังนี้ราคาเท่าไร อายุเท่าไร ฯลฯ คำตอบของคำถามเหล่านี้เราบอกหรือกำหนดด้วยจำนวน (numbers) โดยใช้ตัวเลข (numerals) เป็นสัญลักษณ์เขียนแทนจำนวนต่าง ๆ เหล่านั้น ด้วยเหตุที่จำนวนเหล่านี้เกี่ยวข้องสัมพันธ์กับชีวิตจริงของเรานั่นเอง เราจึงเรียกจำนวนต่าง ๆ เหล่านี้ว่าจำนวนจริง (Real numbers)

จำนวนจริงที่เราใช้กันอยู่ทุกวันนี้ประกอบด้วย จำนวนธรรมชาติ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ จำนวนต่าง ๆ เหล่านี้ถือกำเนิดขึ้นมาจากการพัฒนาระบบการนับของมนุษย์นั่นเอง

3.1 จำนวนธรรมชาติ (Natural numbers)

เซตของจำนวนธรรมชาติ ประกอบด้วยเลข 1, 2, 3,... ต่อไปไม่มีที่สิ้นสุด เลขเหล่านี้เป็นที่รู้จักกันตั้งแต่สมัยที่มนุษย์เริ่มรู้จักการนับ ใช้สัญลักษณ์ N แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

ต่อมาเมื่อการนับพัฒนาขึ้น นักคณิตศาสตร์ในยุคต่อมาได้กำหนดนิยามการ บวก คูณ และการเท่ากัน ทำให้การนับพัฒนาและขยายวงกว้างขวางขึ้น

3.2 จำนวนเต็ม (Integer)

หลังจากมีการให้นิยามการบวก การคูณ และการเท่ากันแล้ว ปรากฏภายหลังว่า การหาคำตอบของสมการ $a+x = b$ เป็นไปไม่ได้ เมื่อ $b < a$ เช่น ถ้าให้ $4+x = 3$ เราไม่สามารถหาจำนวนธรรมชาติใด ๆ มาแทน x ให้สอดคล้องสมการได้ มนุษย์จึงต้องขยายระบบจำนวนออกไปอีกโดยเพิ่มเลขลบ และเลขศูนย์ เรียกจำนวนเต็ม ใช้สัญลักษณ์ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

3.3 จำนวนตรรกยะ

ด้วยเหตุผลเดียวกัน การหาคำตอบของสมการ $ax = b$ เป็นไปไม่ได้ในบางกรณี เช่น $4x = -3$ หรือ $2x = 1$ จึงต้องขยายจำนวนเต็มโดยเพิ่มเลขเศษส่วนเข้าไปอีกรวมกับจำนวนเต็มทั้งเซต เรียก จำนวนตรรกยะ ใช้สัญลักษณ์ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$$Q = \{ \tfrac{p}{q} | p \text{ และ } q \in I \text{ แต่ } q \neq 0\}$$

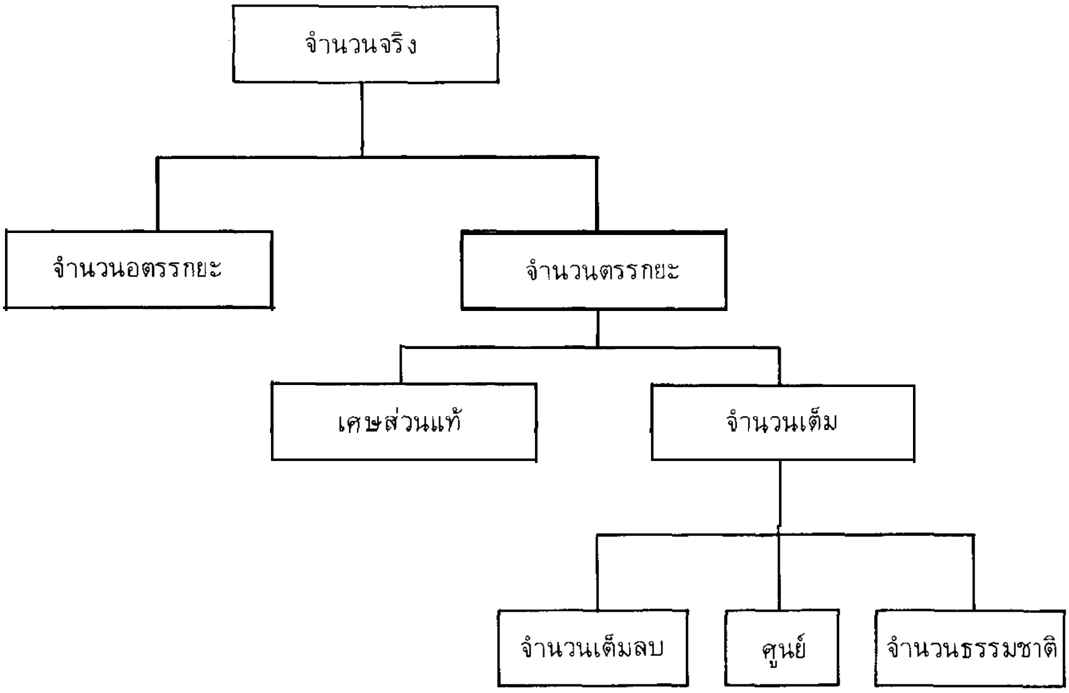
3.4 จำนวนอตรรกยะ

เนื่องจากไม่สามารถหาเลขเศษส่วนมาตอบคำถามสมการประเภท $x^2 = 2$ ได้ จึงต้องเพิ่มเลขชนิดที่เขียนเป็นเศษส่วนไม่ได้ขึ้นมาอีกชนิดหนึ่ง ตัวเลขชนิดที่เขียนเป็นเศษส่วนไม่ได้นี้เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ ใช้สัญลักษณ์ Q'

รวมจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ เข้าด้วยกันเป็นจำนวนจริง ใช้สัญลักษณ์ R แทนเซตจำนวนจริง

$$R = Q \cup Q'$$

ข้อสังเกต $N \subset I \subset Q \subset R$



3.5 คุณสมบัติเบื้องต้นของจำนวนจริง

1. สำหรับทุก ๆ a, b $\in$ R ผลบวกของ a กับ b เขียนแทนด้วย $a+b$ ได้ผลลัพธ์ค่าเดียวเท่านั้น (unique)

2. สำหรับทุก ๆ a, b $\in$ R, $a+b \in R$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การบวก)

3. สำหรับทุก ๆ a, b $\in$ R, $a+b = b+a$ (คุณสมบัติการสลับที่ภายใต้การบวก)

4. สำหรับทุก ๆ a, b, c $\in$ R, $(a+b)+c = a+(b+c)$ (คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การบวก)

5. ในเซตจำนวนจริงจะมี O $\in$ R และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $a+0 = 0+a = a$ $\forall a \in R$ (เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก)

6. สำหรับแต่ละ a $\in$ R จะมี -a $\in$ R และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $a+(-a) = 0$ เรียก -a ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ a

7. สำหรับทุก ๆ a, b $\in$ R ผลคูณของ a กับ b เขียนแทนด้วย $a \cdot b$ หรือ ab มีผลลัพธ์ค่าเดียวเท่านั้น (unique)

8. สำหรับทุก ๆ $a, b \in R$, $ab \in R$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ)

9. สำหรับทุก ๆ $a, b \in R$, $ab = ba$ (คุณสมบัติการสลับที่ภายใต้การคูณ)

10. สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in R$, $(ab)c = a(bc)$(คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การคูณ)

11. ในเซตจำนวนจริงจะมี $1 \in R$ และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \; \forall a \in R$ (เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของ a)

12. สำหรับแต่ละ $0 \neq a \in R$ จะมี $a^{-1} \in R$ และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (เรียก a^{-1} ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ a บางครั้งนิยมเขียน $a^{-1} = \frac{1}{a}$)

13. สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in R$, $a(b+c) = ab+ac$ (คุณสมบัติการแจกแจงทางซ้าย)

14. สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in R$; $(a+b)c = ac+bc$ (คุณสมบัติการแจกแจงทางขวา)

15. (คุณสมบัติไตรวิภาค)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว a และ b จะต้องสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้แน่ ๆ แต่เพียงข้อเดียวเท่านั้นคือ

1. $a < b$ หรือมิฉะนั้นก็
2. $a > b$ หรือมิฉะนั้นก็
3. $a = b$

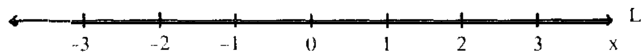
จากคุณสมบัติไตรวิภาค ถ้าเราให้ $b = 0$ เราจะพบว่าเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. $a < 0$ ในกรณีนี้เราเรียก a ว่าจำนวนจริงลบ
2. $a > 0$ ในกรณีนี้เราเรียก a ว่าจำนวนจริงบวก
3. $a = 0$ ในกรณีนี้ a ไม่เป็นทั้งจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ

3.6 ช่วง (Interval)

ในทางเรขาคณิตจำนวนจริงสมนัยกับจุดบนเส้นตรง กล่าวคือจำนวนจริงแต่ละจำนวนเราสามารถแทนได้ด้วยจุดแต่ละจุดบนเส้นตรง เช่น เส้นตรงในรูปข้างล่างนี้

จำนวน 0 สมนัยกับจุด ณ ตำแหน่งที่มี 0 กำกับ ลูกศรชี้ (ไปทางขวา) แสดงจำนวนจริงบวก ซึ่งสมนัยกับจุดทางขวาของจุด "0" ระยะทางจาก 0 ถึง 1 แทนระยะ 1 หน่วย อักษร x แสดงว่า x เป็นจุดบนเส้นตรงซึ่งสมนัยกับจำนวน ซึ่ง x แทน แต่ละจำนวนจริงบวก x จะสมนัยกับจุดแต่ละจุดทางขวามือของจุด "0" และแต่ละจำนวนจริง $-x$ จะสมนัยกับจุดแต่ละจุดทางซ้ายของจุด "0" และเป็นความจริงว่าจุดหนึ่งจุดบนเส้นตรงจะแทนได้ด้วยจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว และในทางกลับกันจำนวนจริงหนึ่งจำนวนจะแทนได้ด้วยจุดบนเส้นตรงเพียงจุดเดียวเช่นกัน เราเรียกเส้นตรงเส้นนี้ว่าเส้นจำนวน และเส้นจำนวนมีจุดเป็นจำนวนอนันต์ทั้งทางซ้ายและขวาของจุด "0" ดังนั้นจึงได้เส้นจำนวนดังรูปข้างล่างนี้



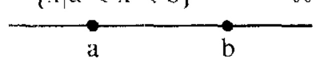
ถ้าจำนวน a ซึ่งแทนด้วยจุด a บนเส้นจำนวนอยู่ทางซ้ายของจำนวน b ซึ่งแทนด้วยจุด b บนเส้นจำนวนแล้วเรากล่าวว่า a น้อยกว่า b หรือ b มากกว่า a ใช้สัญลักษณ์ $a < b$ หรือ $b > a$ ตามลำดับ ดังนั้นจะเห็นว่า ถ้า $a < b$ แล้วจุดที่แทน a จะอยู่ทางซ้ายของจุดที่แทน b เสมอ

สัญลักษณ์ $a \leqslant b$ จะหมายถึง a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b และสัญลักษณ์ $b \geqslant a$ จะหมายถึง b มากกว่าหรือเท่ากับ a

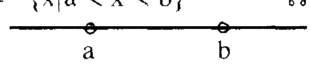
นิยาม 1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a < b$ แล้ว ช่วงในเซตจำนวนจริง จะมีด้วยกันหลายแบบดังต่อไปนี้

(ก) ช่วงจำกัด (Finite intervals)

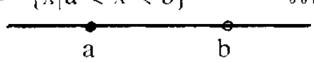
$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ เรียกช่วงปิด



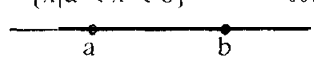
$(a, b) = \{x | a < x < b\}$ เรียกช่วงเปิด



$[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}$ เรียกช่วงครึ่งปิดครึ่งเปิด



$(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}$ เรียกช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด



(ข) ช่วงอนันต์ (Infinite intervals)

$(a, \infty) = \{x|x > a\}$

a

$[a, \infty) = \{x(x \geqslant a\}$

a

$(-\infty, b) = \{x|x < b\}$

b

(-co, b] $= \{x|x \leqslant b\}$

b

$(-\infty, \infty) = \{x|x \in R\}$

0

จุดซึ่งแทนจำนวน a และ b เรียกจุดปลาย (end points) ของช่วง ช่วง $a \leqslant x \leqslant b = [a, b]$ เรียกช่วงปิด เพราะช่วงนี้รวมจุดปลายของช่วงไว้ด้วย ช่วง $a < x < b = (a, b)$ เรียกช่วงเปิด เพราะช่วงนี้ไม่รวมจุดปลายของช่วงไว้ด้วย แต่ช่วง $a < x \leqslant b$ และช่วง $a \leqslant x < b$ เรียกช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด

เวลาเขียนกราฟเราใช้จุด ● (กลมทึบ) ที่จุดปลายสำหรับช่วงซึ่งรวมจุดปลายด้วย และใช้จุด ○ (กลมโปร่ง) ที่จุดปลายสำหรับช่วงซึ่งไม่รวมจุดปลาย

ตัวอย่าง 1 $[-1, 3] = \{x|-1 \leqslant x \leqslant 3\}$

-1 3

ตัวอย่าง 2 $(-1, 3) = \{x|-1 < x < 3\}$

-1 3

ตัวอย่าง 3 $[-1, 3) = \{x/-1 \leqslant x < 3)$

-1 3

ตัวอย่าง 4 $[2, \infty) = \{x|x \geqslant 2\}$

ตัวอย่าง 5 $(-\infty, 1) = \{x|x < 1\}$

1

3.7 **ขอบเขต** (Bound)

นิยาม 2 ให้ $S \subseteq R$ จะเรียก $u \in R$ ว่าขอบเขตบนของ S ก็ต่อเมื่อ $u \geqslant x \; \forall x \in S$ ใช้สัญลักษณ์ u.b. ของ S

นิยาม 3 ให้ $S \subseteq R$ จะเรียก $\ell \in R$ ว่าขอบเขตล่างของ S ก็ต่อเมื่อ $\ell \leqslant x \; \forall x \in S$ ใช้สัญลักษณ์ ℓ.b ของ S

นิยาม 4 จะเรียก u' ว่า ขอบเขตบนต่ำสุดของ S ก็ต่อเมื่อ

1. u' เป็นขอบเขตบนของ S
2. $u' \leqslant u \; \forall u$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนของ S

ใช้สัญลักษณ์ ℓ.u.b. ของ S

นิยาม 5 จะเรียก ℓ' ว่าขอบเขตล่างบนสุด (g.ℓ.b) ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. ℓ' เป็นขอบเขตล่างของ S
2. $\ell' \geqslant \ell \; \forall \ell$ ที่เป็นขอบเขตล่างของ S

ตัวอย่าง 6 ให้ $S = \{x | 1 \leqslant x < 5\}$

u.b.	ของ S คือ	จำนวนจริงซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 5
ℓ.b.	ของ S คือ	จำนวนจริงซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1
ℓ.u.b.	ของ S คือ 5	
g.ℓ.b	ของ S คือ 1	

ตัวอย่าง 7 ให้ $S = \{\frac{n}{n+1} | n \in N\}$

u.b.	ของ S คือ $x \geqslant 1$
ℓ.b.	ของ S คือ $x \leqslant \frac{1}{2}$
ℓ.u.b	ของ S คือ 1
g.ℓ. b.	ของ S คือ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 8 ให้ $S = \{\frac{1}{n+5} \mid n \in N\}$

u.b. ของ S คือ $x \geqslant \frac{1}{6}$

ℓ.b. ของ S คือ $x \leqslant 0$

ℓ.u.b. ของ S คือ $\frac{1}{6}$

g.ℓ.b. ของ S คือ 0

3.8 อสมการ

กฎเบื้องต้นของอสมการ

ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. ถ้า $a < b$ แล้ว $a+c < b+c$
2. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a+c < b+d$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$ และ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$ และ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
5. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

กฎข้อที่ 5 นี้เรียกกฎการถ่ายทอด เงื่อนไข $a < b$ และ $b < c$ ในกฎการถ่ายทอดบ่อยครั้งนิยมเขียน $a < b < c$

โดยกฎข้อที่ 3 จะพบว่าอสมการสามารถคูณและหารได้ด้วยจำนวนจริงบวก และโดยกฎข้อที่ 4 อสมการสามารถคูณและหารได้ด้วยจำนวนจริงลบเช่นเดียวกัน แต่เครื่องหมายอสมการจะเปลี่ยนไปเป็นตรงข้าม

นิยาม 6 การแก้สมการหรืออสมการคือการหาเซตของจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการหรืออสมการนั้น

ตัวอย่าง 9 จงหาค่า x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x + 3 < 5x - 1$

วิธีทำ $x + 3 < 5x - 1$

$3 < 4x - 1$ (บวก $-x$ เข้าทั้งสองข้าง)

$4 < 4x$ (บวก 1 เข้าทั้งสองข้าง)

$1 < x$ (หารทั้งสองข้างด้วย 4)

ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้คือ จำนวนจริงทุกจำนวนที่มากกว่า 1

$(1, \infty)$  #

ตัวอย่าง 10 จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $3(1-x) \leqslant 6$

วิธีทำ $3(1-x) \leqslant 6$

$(1-x) \leqslant 2$ (หารทั้งสองข้างด้วย 3)

$-x \leqslant 1$ (ลบทั้งสองข้างด้วย 1)

$x \geqslant -1$ (คูณทั้งสองข้างด้วย -1)

คำตอบของอสมการนี้คือช่วง $[-1, \infty)$  #

ตัวอย่าง 11 จงแก้อสมการ $2x^2-2x > 4$

วิธีทำ $2x^2-2x > 4$

$2x^2-2x-4 > 0$ (ลบด้วย 4 ทั้งสองข้าง)

$x^2-x-2 > 0$ (หารทั้งสองข้างด้วย 2)

$(x+1)(x-2) > 0$ (แยกแฟกเตอร์)

ผลคูณ $(x+1)(x-2)$ จะเป็นบวก (มากกว่า 0) ก็ต่อเมื่อตัวประกอบทั้งสองมีเครื่องหมายเหมือนกันคือเป็นบวกทั้งคู่หรือเป็นลบทั้งคู่ นั่นคือ $(x+1)(x-2) > 0$ ก็ต่อเมื่อ

กรณีที่ 1 $(x+1) > 0$ และ $(x-2) > 0$

หรือกรณีที่ 2 $(x+1) < 0$ และ $(x-2) < 0$

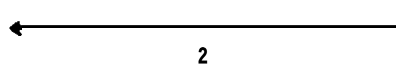
จากกรณีที่ 1 เราได้ $x > -1$ และ $x > 2$

ดังนั้นคำตอบของกรณีที่ 1 คือ $(-1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$

จากกรณีที่ 2 เราได้ $x < -1$ และ $x < 2$

ดังนั้นคำตอบของกรณีที่ 2 คือ $(-\infty, -1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1)$

คำตอบของอสมการนี้คือ $(2, \infty) \cup (-\infty, -1)$



ตัวอย่าง 12 จงแก้อสมการ $\frac{1}{5}(x^2-4x+3) < 0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}(x^2-4x+3) &< 0 \\ x^2-4x+3 &< 0 \text{ (คูณทั้งสองข้างด้วย 5)} \\ (x-1)(x-3) &< 0 \text{ (แยกตัวประกอบ)} \end{aligned}$$

ผลคูณ $(x-1)(x-3)$ จะเป็นลบก็ต่อเมื่อตัวประกอบทั้งสองมีเครื่องหมายต่างกัน

นั่นคือ $(x-1)(x-3) < 0$ ก็ต่อเมื่อ

กรณีที่ 1 $(x-1) < 0$ และ $(x-3) > 0$

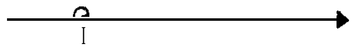
หรือกรณีที่ 2 $(x-1) > 0$ และ $(x-3) < 0$

แต่เนื่องจาก $(x-3) < (x-1)$ ดังนั้นกรณีที่ 1 $(x-1) < 0$ และ $(x-3) > 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นคำตอบที่จะเป็นไปได้จึงเหลือเพียงกรณีที่ 2 คือ $(x-1) > 0$ และ $(x-3) < 0$

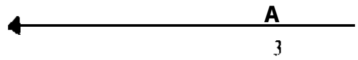
เพราะ $x-1 > 0$

$\therefore x > 1$

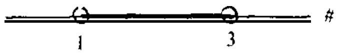


และ $x-3 < 0$

$x < 3$



คำตอบของอสมการนี้คือ $1 < x < 3 = (1, 3)$



3.9 ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ แสดงระยะทางระหว่างจุด 2 จุดบนเส้นจำนวน

นิยาม 7 ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 13

$|7| = 7$ เพราะ $7 \geq 0$

$|0| = 0$ เพราะ $0 = 0$

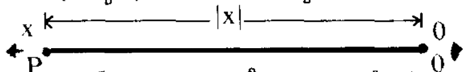
$|-3| = -(-3) = 3$ เพราะ $-3 < 0$

ข้อสังเกต

1. ขอให้สังเกตว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงจะเป็นจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริงลบเสมอ

2. $|x| = \sqrt{x^2}$ และ $|x|^2 = x^2$

ในทางเรขาคณิต ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x คือระยะทางระหว่างจุด P ซึ่งมีโคออร์ดิเนต x กับจุดกำเนิด 0 (ดังรูป) ไม่ว่า P จะอยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของจุดกำเนิด 0



ยิ่งกว่านั้น ถ้า P และ Q เป็นจุดสองจุดใด ๆ บนเส้นจำนวน โดยที่ P มีโคออร์ดิเนต a และ Q มีโคออร์ดิเนต b แล้ว ระยะทางระหว่าง P กับ Q คือ $|a - b|$ (ดังรูป) ซึ่งแทนระยะทางระหว่างจำนวน 2 จำนวน

ตัวอย่าง 14 ระยะทางระหว่าง 4 ถึง 7 คือ $|4-7| = |-3| = 3$

ระยะทางระหว่าง -2 ถึง 2 คือ $|-2-2| = |-4| = 4$

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $-|x| \leq x \leq |x|$

พิสูจน์ ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $|x| = x$

ดังนั้น $x \leq |x|$ ....(1)

ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $-|x| = -x \leq 0 \leq x$

ดังนั้น $-|x| \leq x$ .... (2)

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$-|x| \leq x \leq |x|$ เมื่อ $x \geq 0$ .... (ก)

ถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = -x$

ดังนั้น $-|x| = x < 0 < -x = |x|$

$\therefore -|x| \leq x \leq |x|$ เมื่อ $x < 0$ ....(ข)

จาก (ก) และ (ข) ได้ว่า

$-|x| \leq x \leq |x|$

ทฤษฎีบทที่ 2 (Triangle Inequality)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $|a+b| \leq |a| + |b|$

พิสูจน์ เนื่องจาก $-|a| \leq a \leq |a|$

และ $-|b| \leq b \leq |b|$

$\therefore -(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$

ถ้า $a + b \geq 0$ แล้ว $|a+b| = a + b \leq (|a| + |b|)$

ถ้า $a+b < 0$ แล้ว $|a+b| = -(a+b) \leqslant (|a|+|b|)$

ดังนั้น $|a+b| \leqslant |a|+|b|$

#

คุณสมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
2. $|x+y| \leqslant |x|+|y|$
3. $|xy| = |x|\cdot|y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ถ้า $y \neq 0$
5. $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm y$
6. $|x| \leqslant y$ ก็ต่อเมื่อ $-y \leqslant x \leqslant y$ ถ้า $y > 0$
7. $|x| \geqslant y$ ก็ต่อเมื่อ $x \geqslant y$ หรือ $x \leqslant -y$ ถ้า $y > 0$

ตัวอย่าง 15 จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับ $|x-5| = |3x+7|$

วิธีทำ โดยคุณสมบัติข้อที่ 5

กรณีที่ 1 $x-5 = +(3x+7)$

$2x = -12$

$x = -6$

หรือกรณีที่ 2 $x-5 = -(3x+7)$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $x = -6$ หรือ $x = -\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 16 จงแก้อสมการ $|3x-2| < 4$

วิธีทำ โดยคุณสมบัติข้อ 6

$|3x-2| < 4$

$-4 < 3x-2 < 4$

$-2 < 3x < 6$

$-\frac{2}{3} < x < 2$

$\therefore$ คำตอบของอสมการนี้คือ $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$

ตัวอย่าง 17 จงแก้อสมการ $|3x+2| \geqslant 5$

วิธีทำ โดยคุณสมบัติข้อ 7

$$3x+2 \geqslant 5 \quad \text{หรือ} \quad 3x+2 \leqslant -5$$

$$3x \geqslant 3 \quad \text{หรือ} \quad 3x \leqslant -7$$

$$x \geqslant 1 \quad \text{หรือ} \quad x \leqslant -\frac{7}{3}$$

คำตอบของอสมการนี้คือช่วง $(-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [1, \infty)$ #

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงยกตัวอย่างจำนวนต่อไปนี้
   (ก) จำนวนตรรกยะ
   (ข) จำนวนอตรรกยะ
   (ค) จำนวนเต็ม
   (ง) จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
   (จ) จำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

2. จำนวนต่อไปนี้เป็นสมาชิกของเซตใดบ้างในระบบจำนวนจริง

(ก) 1.732	(ง) $\sqrt{3}$	(ช) π
(ข) 2.3535...	(จ) $-\pi$	(ซ) −1.020020002...
(ค) $\sin \pi$	(ฉ) $3\frac{1}{5}$	(ฌ) $\sqrt{9}$

3. ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้สอดคล้องกับคุณสมบัติใดของระบบจำนวนจริง
   (ก) $s+t$ เป็นจำนวนจริง
   (ข) $(a+2)+x = a+(2+x)$
   (ค) $(3+y)7a = 21a+7ya$
   (ง) $(2b)c = 2(bc)$
   (จ) $rs = sr$

4. จากเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้จงหา AUB, $A \cap B$, A-B และ B-A

(ก) $A = [8, 20)$, $B = (3, 10]$

(ข) $A = (-3, 5]$, $B = (-2, 7)$

(ค) $A = [-2, 3]$, $B = (0, 5)$

(ง) $A = [-1, 1]$, $B = [0, 2]$

(จ) $A = (-\pi, -1)$, $B = (-\sqrt{2}, 2)$

(ฉ) $A = (-6, 3)$, $B = (-1, 2)$

(ช) $A = [-4, 4)$, $B = [-1, 3)$

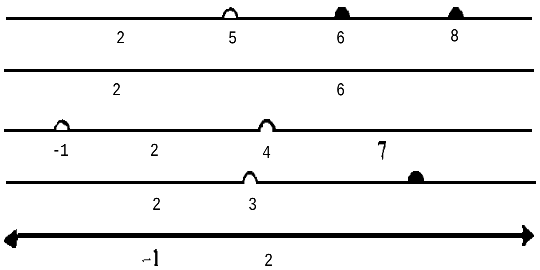
(ฌ) $A = (-\infty, 5]$, $B = (-20, 8)$

(ญ) $A = (-\infty, 9)$, $B = [3, \infty)$

(ฎ) $A = (-\infty, -6)$, $B = (-10, -7]$

5. จงเขียนช่วงต่าง ๆ ต่อไปนี้โดยใช้วงเล็บ

(ก)
(ข)
(ค)
(ง)
(จ)



6. จงเขียนเส้นจำนวนแทนช่วงต่อไปนี

(ก) [2, 3)

(Y) $\{x \mid -3 < x \leqslant 4)$ และ $\{x \mid -6 \leqslant x < 2\}$

(ค) $[-2, 0] \cap [-\frac{1}{2}, 1]$

(ง) $(0, \infty) \cup (-\infty, 0)$

(จ) $(0, \infty) \cup (3, \infty)$

(a) (-∞, -21 n (-∞, -5)

7. จงหาขอบเขตบน, ขอบเขตล่าง, ขอบเขตบนต่ำสุด, ขอบเขตล่างสูงสุดของสับเซตของจำนวนจริงต่อไปนี้

(ก) [-3, 0)

(ข) $\{\frac{1}{x} \mid x \in N\}$

(ค) $\{ \frac{x^2}{x^2+1} \mid x \in N\}$

(ง) $(-\pi, \sqrt{3})$

(จ) $\{ \frac{1}{x^2+x} \quad x \in N \}$

8. จงแก้อสมการต่อไปนี้

(n) $10x < 18+4x$

(ข) $2 \leqslant 5\text{-}3x < 11$

(m) $3 > \text{-}4 \text{ -}4x \geqslant -8$

(9) $\frac{3}{1 - x} \leqslant 1$

(จ) $x^2 > 9$

(a) $x^2-x-2 < 0$

(a) $3x^2-13x \geqslant 10$

(ซ) $|x-3| = 2$

(ฌ) $|x-5| = |3x-1|$

(ญ) $|5x| = 3 - x$

(ฎ) $|2x-5| < 1$

(ฏ) $|3x+5| > 2$

(ฐ) $\frac{9}{4} < \frac{5}{2} + \frac{2}{3}x$

(ฑ) $3+5x \leqslant 2x+11$

(ฒ) $\frac{2}{x} - 4 < \frac{3}{x} - 8$

(ณ) $\frac{5}{3 - x} \geqslant 2$

(ด) $x^2 \leqslant 4$

(ต) $2x^2+5x - 12 > 0$

(ถ) $2x \geqslant 3x^2-16$

(W) $|3x+2| = 5$

(B) $|x-2| = |3-5x|$

(“a) $|3x-7| = x+2$

(บ) $|4x-6| \leqslant 3$

(ป) $|9-2x| \geqslant |7x|$