บทที่ 2
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คำนำ

ในการศึกษาเรื่องเซตมาแล้วจะเห็นได้ว่าส่วนใหญ่แล้วจะกล่าวถึงสมาชิกในเซตแบบเดี่ยว ๆ อย่างเช่น A = {1, 2, 3, 4}, B = {#, *} เป็นต้น แต่สำหรับในบทนี้จะแนะนำให้รู้จักกับเซตในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (ordered pair) และเรียกเซตชนิดนี้ว่า เซตคู่อันดับ (ordered set) เซตคู่อันดับนี้จะสามารถนำไปใช้ช่วยในการให้ความหมายของคำต่าง ๆ ที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ อย่างเช่น ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product), ความสัมพันธ์ (Relation), ฟังก์ชัน (Function) และกราฟ (Graph) เป็นต้น

2.1 คู่อันดับ (Ordered pair)

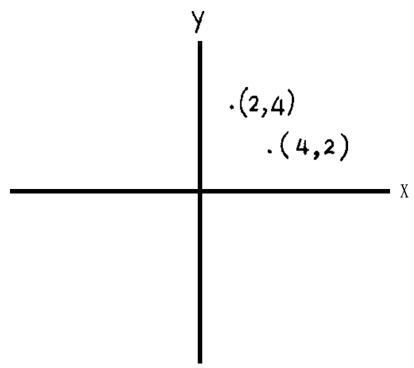
คู่อันดับ คือ เซตซึ่งมี 2 สมาชิกและแต่ละสมาชิกจะมีอันดับคงที่ อันดับคงที่นั้นอาจจะเรียกว่า อันดับที่ 1 (first order) และอันดับที่ 2 (second order) ก็ได้ สัญลักษณ์ที่นิยมใช้กับคู่อันดับคือ (a, b) สมาชิกของคู่อันดับนี้คือ a และ b และ a จะเรียกว่าเป็นสมาชิกอันดับที่ 1 ส่วน b จะเรียกว่าเป็นสมาชิกอันดับที่ 2 สำหรับสมาชิก 2 ตัวในคู่อันดับนั้นอาจจะเหมือนกันก็ได้

ตัวอย่าง 1 (แถว 2, โต๊ะตัวที่ 4), (รถยนต์, เครื่องบิน), (1, 3), (5, 5)

คู่อันดับในตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่ามี 4 คู่อันดับ คู่อันดับอันแรกประกอบด้วยสมาชิกอันดับที่ 1 คือ แถว 2, สมาชิกอันดับที่ 2 คือ โต๊ะตัวที่ 4 คู่อันดับอันที่สอง ประกอบด้วยสมาชิกอันดับที่ 1 คือ รถยนต์, สมาชิกอันดับที่ 2 คือเครื่องบิน, คู่อันดับอันที่สาม ประกอบด้วยสมาชิกอันดับที่ 1 คือ 1, สมาชิกอันดับที่สองคือ 3 และคู่อันดับอันที่สี่ ประกอบด้วยสมาชิกอันดับที่ 1 คือ 5, สมาชิกอันดับที่ 2 ก็คือ 5 เหมือนกัน

อันดับของสมาชิกในคู่อันดับจะมีความหมาย

เพราะว่าคู่อันดับ (x, y) และ (y, x) จะไม่เท่ากัน ถ้า $x \neq y$ ตัวอย่างที่จะเห็นได้ชัดเจน คือคู่อันดับ (2, 4) และ (4, 2) ถ้าคู่อันดับนี้หมายถึงจุดในระนาบซึ่งมี x, y เป็นแกนโคออร์ดิเนต แล้ว จะได้ว่า สมาชิกอันดับที่ 1 ก็คือค่าโคออร์ดิเนตทางแกน x และสมาชิกอันดับที่สอง ก็คือค่าโคออร์ดิเนตทางแกน y ดังนั้นจุดซึ่งเขียนด้วยคู่อันดับ (2, 4) จะไม่ใช่จุดเดียวกับจุด ซึ่งเขียนด้วยคู่อันดับ (4, 2)



รูปที่ 2.1

ดังนั้นความหมายของการเท่ากันของคู่อันดับ 2 อัน (x, y) และ (u, v) จึงนิยามได้ดังนี้ว่า

(x, y) = (u, v) ก็ต่อเมื่อ x = u และ y = v

จากการเท่ากันของคู่อันดับ จะทำให้สามารถเห็นความแตกต่างของคู่อันดับและเซต ซึ่งมี 2 สมาชิก เช่น

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b\}$$

$$\{a, a\} = \{a\}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมาชิกของเซตจะวางในตำแหน่งใดก็ได้ และในกรณีสมาชิกซ้ำกัน ก็เขียนเพียงสมาชิกที่แตกต่างกันเท่านั้น ส่วนคู่อันดับต่อไปนี้

$$(a, b) \neq (b, a)$$

$$(a, a) \neq (a)$$

แสดงให้เห็นว่าอันดับหรือตำแหน่งของสมาชิกมีความสำคัญ

2.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ผลคูณคาร์ทีเซียนนี้จะเป็นเซตอันหนึ่ง ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ นิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน จะมีดังนี้คือ

นิยาม 1 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซต A และ B คือเซต $A \times B$ ซึ่งกำ**หนดให้โดย**

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

จากนิยามจะเห็นได้ว่าผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ นี้ ก็คือเซตซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับทั้งหมด และคู่อันดับทั้งหมดนี้ สร้างมาจากการให้สมาชิกอันดับที่ 1 มาจากสมาชิกของ A ทั้งหมด ส่วนสมาชิกอันดับที่ 2 จะมาจากสมาชิกของ B ทั้งหมด

ตัวอย่าง 2

(fl) ให้ $A = (1, 3, 5\}, B = \{2, 4\}$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

(ข) ให้ $A = (1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 5\}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4. 5)\}$

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

(ค) ให้ $A = \{\alpha, \beta\}, B = \{1, 2, 3\}$

$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}$

$A \times A = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3. 2), (3. 3)\}$

(9) ให้ $A = \phi, B = (1, 2, 3)$

$A \times B = \phi \times B = \phi$

$B \times A = B \times \phi = \phi$

(จ) ให้ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}, T = \{2\}$

$N \times T = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), \ldots\}$

$T \times N = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \ldots\}$

จะสังเกตเห็นได้ว่าตัวอย่างในข้อ (ก) สมาชิกใน $A \times B$ และสมาชิกใน $B \times A$ **จะมี** จำนวนเท่ากันคือ 6, และ $(A \times B) \cap (B \times A) = \phi$

ตัวอย่างในข้อ (ข) สมาชิกใน $A\times B$ และสมาชิกใน $B\times A$ จะมีจำนวนเท่ากันคือ 8 และ $(A\times B)\cap(B\times A)=\{(4, 4)\}$ จะเห็นได้ว่า $4\in A$ และ $4\in B$

ในตัวอย่างข้อ (ค) จำนวนสมาชิกของ $A\times B$ คือ 6, สมาชิกของ $A\times A$ คือ 4 และสมาชิกของ $B\times B$ คือ 9

ในตัวอย่างข้อ (ง) จำนวนสมาชิกของ $A\times B$ และ $B\times A$ จะเท่ากันและเท่ากับ 0

ในตัวอย่างข้อ (จ) จำนวนสมาชิกในเซต $N\times T$ และ $T\times N$ จะมีจำนวนนับไม่ถ้วน

จากนิยามและตัวอย่างของผลคูณคาร์ทีเซียนจะสามารถสรุปได้ดังนี้คือ

1. ถ้า A เป็นเซตจำกัด ซึ่งมีจำนวนสมาชิก m และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่งมีจำนวนสมาชิก n แล้ว ผลคูณคาร์ทีเซียน $A\times B$ และ $B\times A$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน คือเท่ากับ mn

2. ถ้า A และ B เป็นเซต ซึ่ง $A\cap B=\phi$ แล้ว

   $(A\times B)\cap(B\times A)=\phi$

3. ผลคูณคาร์ทีเซียน $A\times B$ จะเป็นเซตเดียวกับผลคูณคาร์ทีเซียน $B\times A$ ถ้า $A=B$

4. ในกรณีที่ $A=\phi$ หรือ $B=\phi$ แล้ว

   $A\times B=B\times A=\phi$

5. ถ้า A เป็นเซตไม่จำกัด หรือ B เป็นเซตไม่จำกัดแล้ว เซต $A\times B$ และ $B\times A$ จะเป็นเซตไม่จำกัดด้วย

แบบฝึกหัด

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{4, 6, 8\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

   (ก) $A \times B$ (ง) $C \times A$ (ช) $C \times B$ (ญ) $D \times B$

   (ข) $B \times A$ (จ) $A \times D$ (ซ) $B \times C$ (ฎ) $C \times D$

   (ค) $A \times C$ (ฉ) $D \times A$ (ฌ) $B \times D$ (ฏ) $D \times C$

2. ให้ $S = \{1, 3, 5, 7\}$, $T = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

   (ก) $S \times \{1\}$ (ง) $\{0\} \times T$ (ช) $S \times \{0, 1\}$

   (ข) $\{1\} \times S$ (จ) $S \times \phi$ (ซ) $\{0, 1\} \times T$

   (ค) $T \times \{0\}$ (ฉ) $\phi \times T$

3. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ และ $C = \{3, 4, 5\}$ จงหาเซต $A \times (B \cap C)$ และ $(A \times B) \cap (A \times C)$ และเปรียบเทียบสมาชิกใน $A \times (B \cap C)$ และ $(A \times B) \cap (A \times C)$ ด้วย

4. จากเซต A, B และ C ในข้อ (3) จงหาเซต $A \cap (B \times C)$ และ $(A \cap B) \times (A \cap C)$ ด้วย

5. ถ้า $S = \{1\}$ และ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (เซตของจำนวนธรรมชาติ) จงหาเซต

   (ก) $N \times S$ (ค) $S \times S$ (จ) $\phi \times N$

   (ข) $S \times N$ (ง) $N \times N$ (ฉ) $S \times \phi$

6. สมมติว่าสโมสรแห่งหนึ่งมี U เป็นเซตของสมาชิกทั้งหมดของสโมสรนี้ สโมสรแห่งนี้กำลังทำการคัดเลือกประธาน และเลขานุการ สมมติให้ P เป็นเซตของสมาชิกซึ่งถูกเสนอชื่อเป็นประธาน และ S เป็นเซตของสมาชิกซึ่งถูกเสนอชื่อให้เป็นเลขานุการ จงอธิบายถึงเซตต่อไปนี้

   (ก) $P \times S$ (ข) $U \times U$ (ค) $P \times U$

7. สมมติว่าห้อง ๆ หนึ่งจะทาสีใหม่ เจ้าของบ้านสามารถจะเลือกสี ขาว, เหลือง หรือน้ำเงิน สำหรับผนังห้อง และเจ้าของก็สามารถจะเลือกสีเขียวหรือน้ำตาล สำหรับพรม จงกำหนดเซต A และ B โดยที่ $A \times B$ เป็นเซตของสีที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดที่อยู่ภายในห้องนี้

8. นายประสิทธิ์ต้องการจะเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B และกลับจากเมือง B มายังเมือง A โดยที่เขาสามารถเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B โดยทางรถไฟ รถยนต์ส่วนตัว รถโดยสารประจำทาง หรือเครื่องบิน และเขาสามารถจะเดินทางกลับจากเมือง B มายัง

เมือง A โดยทางรถยนต์ส่วนตัว รถโดยสารประจำทาง หรือ เรือ จงหาเซตของผลคูณซึ่งสมาชิกจะเป็นโอกาสที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B และกลับจากเมือง B มายังเมือง A

2.3 ความสัมพันธ์ (Relation)

เมื่อได้คุ้นเคยกับเรื่องของผลคูณคาร์ทีเซียนแล้ว ต่อไปก็จะกล่าวถึงเรื่องความสัมพันธ์ (Relation) ซึ่งเป็นเซตชนิดหนึ่งที่มีสมาชิกแต่ละตัวเป็นอันดับคู่เหมือนกันกับผลคูณคาร์ทีเซียนดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2 ให้ A และ B เป็นเซต ความสัมพันธ์ จาก A ไปยัง B คือเซตย่อยของ $A \times B$

จากนิยามจะสามารถกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ก็คือเซตย่อยของ $B \times A$ นั่นเอง ดังนั้น ถ้าให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ R_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A แล้ว สามารถจะเขียน R_1, R_2 ในรูปแบบของเซตได้ว่า

$$R_1 = \{(x, y) | (x, y) \in R_1 \Rightarrow (x, y) \in A \times B\}$$

$$R_2 = \{(x, y) | (x, y) \in R_2 \Rightarrow (x, y) \in B \times A\}$$

ต่อไปจะพิจารณาถึงตัวอย่างของความสัมพันธ์ซึ่งจะมองเห็นได้อย่างง่าย ๆ

ตัวอย่าง 3 ให้ A = {ลอนดอน, วอชิงตัน, ปารีส}

B = {อเมริกา, ฝรั่งเศส, อังกฤษ}

$A \times B$ = {(ลอนดอน, อเมริกา), (ลอนดอน, ฝรั่งเศส), (ลอนดอน, อังกฤษ), (วอชิงตัน, อเมริกา), (วอชิงตัน, ฝรั่งเศส), (วอชิงตัน, อังกฤษ), (ปารีส, อเมริกา), (ปารีส, ฝรั่งเศส), (ปารีส, อังกฤษ)}

ถ้าให้ R = {(ลอนดอน, อังกฤษ), (วอชิงตัน, อเมริกา), (ปารีส, ฝรั่งเศส)}

$\therefore R \subseteq A \times B$

ดังนั้นจากสมาชิกใน R จะเห็นได้ว่า สามารถจะใช้ R แทนความสัมพันธ์ว่า
"เป็นเมืองหลวงของ"
ดังนั้นประโยคต่อไปนี้

ลอนดอนเป็นเมืองหลวงของอังกฤษ
วอชิงตันเป็นเมืองหลวงของอเมริกา
ปารีสเป็นเมืองหลวงของฝรั่งเศส

สามารถจะเขียนเป็นสัญลักษณ์ของความสัมพันธ์ R ได้ว่า

ลอนดอน R อังกฤษ

วอชิงตัน R อเมริกา

ปารีส R ฝรั่งเศส

ในสมาชิกของ $A \times B$ จะพบว่าบางสมาชิกไม่เป็นสมาชิกของ R เช่น (ลอนดอน, อเมริกา), (ปารีส, อังกฤษ) เป็นต้น แสดงว่า สมาชิกอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ไม่มีความสัมพันธ์ R ซึ่ง R เป็นความสัมพันธ์ว่า "เป็นเมืองหลวงของ"

ดังนั้นในกรณีที่ (ลอนดอน, อเมริกา) $\notin R$, (ปารีส, อังกฤษ) $\notin R$ จะสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

ลอนดอน $\not R$ อเมริกา

ปารีส $\not R$ อังกฤษ

ตัวอย่าง 4 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \ldots\}$

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "...มีค่าน้อยกว่า...อยู่ 2"

$\therefore R \subseteq A \times A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8)\}$

ดังนั้นถ้า $(1, 3) \in R$ ก็คือความหมายว่า 1 มีค่าน้อยกว่า 3 อยู่ 2

และจะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า 1 R 3

ส่วน $(1, 1) \notin R$ ก็คือความหมายว่า 1 กับ 1 มีค่าไม่น้อยกว่ากัน 2

และเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $1 \not R 1$

ตัวอย่าง 5 **ให้** $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots\}$

จำนวนสมาชิกใน $A \times A$ จะเป็น 16

ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "น้อยกว่า"

$\therefore R \subseteq A \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

$(1, 2) \in R$ หมายความว่า 1 น้อยกว่า 2 จะเขียนสัญลักษณ์ว่า 1 R 2

$(4, 1) \notin R$ หมายความว่า 4 ไม่น้อยกว่า 1 จะเขียนสัญลักษณ์ว่า $4 \not R 1$

ตัวอย่าง 6 ให้ $S = \{a, b, c\}$, $T = \{u, v\}$

$S \times T = \{(a, u), (a, v), (b, u), (b, v), (c, u), (c, v)\}$

เซตย่อยของ $S \times T$ ใด ๆ จะเป็นความสัมพันธ์จาก S ไปยัง T อย่างเช่น

$R = \{(a, u), (b, v), (c, u)\}$

จะเห็นได้ว่า $R \subseteq S \times T$

ดังนั้นจากนิยามของความสัมพันธ์จึงกล่าวได้ว่า R เป็นความสัมพันธ์จาก S ไปยัง T ในกรณีนี้ถึงแม้ว่า R จะเป็นความสัมพันธ์ที่ไม่ได้ระบุความหมายอย่างแน่นอน แต่จาก $R \subseteq S \times T$ ก็จะได้ว่า R เป็นความสัมพันธ์จาก S ไปยัง T และ R จะหมายถึง "มีความสัมพันธ์กับ" อย่างเช่น

$(a, u) \in R$ หมายความว่า a มีความสัมพันธ์กับ u จะเขียนได้ว่า $a\,R\,u$

$(b, v) \in R$ หมายความว่า b มีความสัมพันธ์กับ v จะเขียนได้ว่า $b\,R\,v$

$(a, v) \notin R$ หมายความว่า a ไม่มีความสัมพันธ์กับ v จะเขียนได้ว่า $a \not R\, v$

ตัวอย่าง 7 ให้ $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$S \times S = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9) \ldots\}$

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "เท่ากับ"

ดังนั้น $R \subseteq S \times S = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9)\}$

$(1, 1) \in R$ หมายความว่า 1 เท่ากับ 1 ดังนั้นสัญลักษณ์เป็น $1\,R\,1$

$(1, 3) \notin R$ หมายความว่า 1 ไม่เท่ากับ 3 ดังนั้นสัญลักษณ์เป็น $1 \not R\, 3$

เมื่อให้ A, B เป็นเซต และพิจารณา R ซึ่งเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เมื่อ $R \subseteq A \times B$ บางครั้งก็สามารถจะพิจารณาความสัมพันธ์ผกผัน (inverse relation) จาก B ไปยัง A ได้เหมือนกัน และความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ R นี้จะใช้สัญลักษณ์ว่า R^{-1}

ดังนั้น $R^{-1} \subseteq B \times A$ เมื่อ $R \subseteq A \times B$

ตัวอย่าง 8 ให้ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

ให้ $R \subseteq B \times B$ ซึ่ง R คือความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"

$\therefore R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

ดังนั้น $R^{-1} \subseteq B \times B$ ซึ่ง R^{-1} คือความสัมพันธ์ "มากกว่า"

$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

ตัวอย่าง 9 ให้ $A = \{x|x$ เป็นชื่อเมืองในประเทศอเมริกา$\}$

$B = \{x|x$ เป็นชื่อรัฐ ใน 50 รัฐของประเทศอเมริกา$\}$

$\therefore$ $A \times B$ จะเป็นเซตของอันดับคู่ทั้งหมดซึ่งอยู่ในรูปแบบ

(ชื่อเมืองในประเทศอเมริกา, ชื่อรัฐในอเมริกา)

ดังนั้น (บอสตัน, แมซซาชูเสท) $\in A \times B$

และ (บอสตัน, เท็กซัส) $\in A \times B$

ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "เป็นเมืองหลวงของรัฐ"

ดังนั้น $R \subseteq A \times B$ ซึ่ง

R = {(บอสตัน, แมซซาชูเสท), (ฮาร์ทฟอร์ด, คอนเนคติคัท),
(โฮโนลูลู, ฮาวาย),... เป็นต้น}

แล้ว R^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์ว่า "เป็นรัฐซึ่งเมืองหลวงคือ"

และ $R^{-1} \subseteq B \times A$

R^{-1} = {(แมซซาชูเสท, บอสตัน), (คอนเนคติคัท, ฮาร์ทฟอร์ด,
(ฮาวาย, โฮโนลูลู),..., เป็นต้น}

ดังนั้นเมื่อได้เห็นตัวอย่างของ R^{-1} แล้วจะพูดถึงนิยามของ R^{-1} ดังต่อไปนี้

นิยาม 3 ให้ A, B เป็นเซต และให้ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B (นั่นก็คือ $R \subseteq A \times B$) แล้วความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ซึ่ง R^{-1} ก็คือเซตที่ได้จากเซต R โดยการสลับที่อันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 กัน

นิยาม 4 ให้ R เป็นความสัมพันธ์จาก $A \rightarrow B$ โดเมนของ R ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ว่า $D(R)$ คือเซตซึ่งกำหนดโดย

$D(R) = \{x|x \in A$ และ $(x, y) \in R$ สำหรับ y บางตัวซึ่ง $y \in B\}$

และพิสัยของ R จะใช้สัญลักษณ์ว่า $R(R)$ คือเซตซึ่งกำหนดโดย

$R(R) = \{y|y \in B$ และ $(x, y) \in R$ สำหรับ x บางตัวซึ่ง $x \in A\}$

จากนิยาม 4 จะเห็นได้ว่าโดเมนของ R ก็คือเซตซึ่งมีสมาชิกทั้งหมดเป็นสมาชิกอันดับที่หนึ่งใน R ส่วนพิสัยของ R ก็คือเซตซึ่งมีสมาชิกทั้งหมดเป็นสมาชิกอันดับที่สองใน R นั่นเอง

ตัวอย่าง 10 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4)$

$R \subseteq A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

ดังนั้น $D(R) = \{1, 2, 3) = A$

$R(R) = \{2, 3, 4\} = B$

ตัวอย่าง 11 ให้ $S = \{\nabla, *, \$\}$

$f = \{(\nabla, \nabla), (\nabla, *), (*, \$)\}$

$g = \{(\$, \nabla)\}$

$h = \{(\nabla, \nabla), (*, *), (\$, \$)\}$

$f \subseteq S \times S,\ g \subseteq S \times S,\ h \subseteq S \times S$

$\therefore$ f, g, h เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง

$D(f) = \{\nabla, *\}$, $R(f) = \{\nabla, *, \$\}$

$D(g) = \{\$\}$, $R(g) = \{\nabla\}$

$D(h) = \{\nabla, *, \$\}$, $R(h) = \{\nabla, *, \$\}$

จากเรื่องของความสัมพันธ์จะสามารถสรุปได้ว่า

1. ความสัมพันธ์ R จะเป็นความสัมพันธ์จากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง หรือบนเซตใดเซตเดียวก็ได้ นั่นคือ $R \subseteq A \times B$ หรือ $R \subseteq A \times A$ หรือ $R \subseteq B \times B$ ก็ได้

2. ถ้า $R \subseteq A \times B$ (ผลคูณคาร์ทีเซียน) ใด ๆ แล้ว R จะเป็นความสัมพันธ์เสมอ ถึงแม้ว่าความสัมพันธ์ R จะมีความหมาย หรือไม่มีความหมายก็ตาม

3. ความสัมพันธ์ผกผันกับ R จะได้มาจากเซตซึ่งสลับที่สมาชิกอันดับ 1 เป็นอันดับ 2 และสมาชิกอันดับ 2 เป็น สมาชิกอันดับ 1 ใน R นั่นเอง

4. จากนิยามของความสัมพันธ์พบว่า $A \times B$ จะเป็นเซตย่อยของตัวเอง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $A \times B$ จะนิยามความสัมพันธ์อันหนึ่ง

5. ϕ ก็เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ϕ ก็จะนิยามความสัมพันธ์ อันหนึ่งเหมือนกัน

แบบฝึกหัด

1. ให้ A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

   ให้ $R \subseteq A \times A$ ซึ่ง R = {(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5), (8, 6)}

   จงหาว่า R ควรจะเป็นความสัมพันธ์ว่าอะไร ?

2. จากข้อ (1) จงหาเซตของ R^{-1} แล้วจงหาว่า R^{-1} ควรจะเป็นความสัมพันธ์ว่าอะไร ?

3. ให้ S = {1, 2, 3, 4, 5} ให้ $R \subseteq S \times S$ ซึ่งกำหนดโดย

   R = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (4, 4), (5, 4), (5, 5)}

   จงหาว่า R ควรจะเป็นความสัมพันธ์ว่าอะไร?

4. จากโจทย์ข้อ 3. จงหา R^{-1} และจงหาว่า R^{-1} ควรจะเป็นความสัมพันธ์ว่าอะไร ?

5. ให้ Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,...}

   ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน Z ซึ่ง x R y หมายความว่า x น้อยกว่า 20 จากค่า y, จงหาว่า R^{-1} บน Z จะหมายความว่าอะไร และจงเขียนสมาชิกของ R และ R^{-1} ให้ดูเป็นสังเขป

6. ให้ A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4}, C = {4, 6, 8}, D = {2, 3}

   ให้ S = {A, B, C, D}

   ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน S โดย R คือความสัมพันธ์ว่า

   "มีสมาชิกร่วมอย่างน้อย 1 สมาชิกกับ"

   จงหาเซตของ R ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $S \times S$

7. ให้ A = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}

   (ก) ให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "เป็นอักษรที่อยู่ข้างหน้าและใกล้ที่สุด" จงหาเซต R

   (ข) ให้ R^{-1} เป็นความสัมพันธ์ผกผันกับ R จงหาว่า R^{-1} คือความสัมพันธ์อะไร ? แล้วจงหาเซต R^{-1}

8. ให้ A = {a, b, c}, B = {2, 3}

   (ก) จงหา $A \times B$

   (ข) จงสร้างความสัมพันธ์ 5 ความสัมพันธ์แตกต่างกัน และเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

   (ค) จงหาโดเมน และพิสัยของความสัมพันธ์จากข้อ (ข)

2.4 คุณสมบัติของความสัมพันธ์ (Properties of Relations)

ในหัวข้อ 2.4 ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์บนเซต A แล้วว่า ถ้า R เป็นความสัมพันธ์บน A หมายถึงว่า $R \subseteq A \times A$ ต่อไปก็จะพิจารณาถึงคุณสมบัติของความสัมพันธ์ R อย่างหนึ่ง ซึ่งความสัมพันธ์ทุก ๆ อันอาจจะมีคุณสมบัติอันนี้หรือไม่มีก็ได้ คุณสมบัติอันนี้มีชื่อเรียกว่า คุณสมบัติสมมาตร (Symmetric property)

นิยาม 5 ให้ A เป็นเซต และ R เป็นความสัมพันธ์บน A ความสัมพันธ์ R จะกล่าวว่ามีคุณสมบัติสมมาตร ถ้า $x R y$ แล้ว $y R x$ สำหรับ x, y ใน R

ตัวอย่าง 12 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

จากสมาชิกใน R จะสามารถให้ความหมายของ R ว่า "ไม่เท่ากับ" ดังนั้น $x R y$ สามารถจะเขียนเป็น $x \neq y$ จะเห็นได้ว่าสมาชิกของ R

$$1 \neq 2$$
$$1 \neq 3$$
$$2 \neq 1$$
$$3 \neq 1$$
$$2 \neq 3$$
$$3 \neq 2$$

ดังนั้นในสมาชิกของ R ถ้า $x R y$ แล้ว $y R x \; \forall (x, y) \in R$ จึงกล่าวได้ว่า R มีคุณสมบัติสมมาตร

ตัวอย่าง 13 ให้ $A = \{s, t, u, v\}$ ให้ R เป็นความสัมพันธ์ซึ่งเป็นเซตนิยามโดย

$R = \{(s, t), (u, v), (s, v), (t, u), (v, u), (u, t), (t, s), (v, s)\}$

จากการพิจารณาสมาชิกใน R พบว่า

$s R t$ แล้ว $t R s$ ด้วย

$u R v$ แล้ว $v R u$ ด้วย

$s R v$ แล้ว $v R s$ ด้วย

$t R u$ แล้ว $u R t$ ด้วย

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสมาชิกใน R ถ้า $x R y$ แล้ว $y R x \; \forall (x, y) \in R$ จึงกล่าวได้ว่า R มีคุณสมบัติสมมาตร

ตัวอย่าง 14 ให้ $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, R เป็นความสัมพันธ์บน N ซึ่งนิยามโดย

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) \ldots\}$$

R สามารถจะให้ความหมายว่า "...มีค่าน้อยกว่า...เท่ากับ 1"

จาก $(1, 2) \in R$ จะกล่าวได้ว่า 1 มีค่าน้อยกว่า 2 เท่ากับ 1 แต่จะไม่เป็นความจริงว่า 2 มีค่าน้อยกว่า 1 เท่ากับ 1 ดังนั้น $(2, 1) \notin R$

$\therefore$ ความสัมพันธ์นี้ถึงแม้ว่า 1 R 2 แต่ 2 $\not R$ 1 ดังนั้น R จึงไม่มีคุณสมบัติสมมาตร

ตัวอย่าง 15 ให้ A = {x|x เป็นประเทศต่าง ๆ ในโลก}

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "มีเขตแดนติดกับ" ตัวอย่างเช่น (ประเทศไทย, กัมพูชา) $\in$ R หมายความว่า ประเทศไทยมีเขตแดนติดกับกัมพูชา

จากความหมายของ R พบว่า ถ้า (ประเทศไทย, กัมพูชา) $\in$ R แล้ว

(กัมพูชา, ประเทศไทย) $\in$ R ด้วย เพราะว่า ถ้าประเทศไทยมีเขตแดนติดกับกัมพูชา แล้วกัมพูชาจะมีเขตแดนติดกับประเทศไทยด้วย

นั่นก็คือ ถ้า x R y แล้ว y R x สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in R$

ดังนั้น R จะมีคุณสมบัติสมมาตร

คุณสมบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปก็คือ คุณสมบัติของการสะท้อน (Reflexive property) ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่ใช้พิจารณาว่าสมาชิกใด ๆ ใน A จะมีความสัมพันธ์กับตัวเองหรือไม่ ซึ่งจะกล่าวถึงคุณสมบัตินี้ในนิยามต่อไปนี้

นิยาม 6 ให้ A เป็นเซต และ R เป็นความสัมพันธ์บน A ถ้าแต่ละสมาชิก $x \in A$ x **R** x เป็นจริง แล้วจะกล่าวว่า R มีคุณสมบัติของการสะท้อน

ตัวอย่าง 16 ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$

ให้ $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

R เป็นความสัมพันธ์ว่า "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"

จากสมาชิกใน R พบว่า 1 R 1, 2 R 2, และ 3 R 3

ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า x R x สำหรับแต่ละ $x \in A$

$\therefore$ **R** มีคุณสมบัติของการสะท้อน

ตัวอย่าง 17 ให้ A = {x|x เป็นประชาชนในกรุงเทพฯ}

ให้ x R y หมายความว่า x อายุมากกว่า y

จากความหมายของความสัมพันธ์ R จะเห็นได้ว่า x อายุไม่มากกว่า x ดังนั้น R จึงไม่มีคุณสมบัติของการสะท้อน

ตัวอย่าง 18 ให้ A = {a, b, c, d} ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่งนิยาม R โดย

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (d, d), (d, a)\}$$

จากสมาชิกใน R จะพบว่า a R a, b R b และ d R d แต่ $c \not R c$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า R ไม่มีคุณสมบัติของการสะท้อน

นอกจากคุณสมบัติสมมาตร และการสะท้อนแล้ว ก็จะมีคุณสมบัติอีกชนิดหนึ่ง ซึ่งกล่าวถึงว่า ถ้า x มีความสัมพันธ์กับ y และ y มีความสัมพันธ์กับ z แล้ว x จะมีความสัมพันธ์กับ z เสมอ ซึ่งคุณสมบัตินี้เรียกว่า คุณสมบัติของการถ่ายทอด (Transitive property) ซึ่งจะกล่าวเป็นนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 7 ให้ A เป็นเซต และ R เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด ถ้าเมื่อไรก็ตามที x R y และ y R z แล้ว x R z นั่นก็คือ R จะมีคุณสมบัติของการถ่ายทอด ถ้าเมื่อไรก็ตามที่สมาชิกใน R มี (x, y) และ (y, z) แล้ว (x, z) จะต้องอยู่ใน R ด้วย

ตัวอย่าง 19 ให้ A = {1, 2, 3, 4} ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่ง x R y หมายความว่า "x น้อยกว่า y" ดังนั้น R จะเป็นเซตดังต่อไปนี้

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

จะสังเกตเห็นว่าสมาชิกใน R

ถ้า 1 R 2 และ 2 R 3 แล้ว 1 R 3 ด้วย

ถ้า 1 R 2 และ 2 R 4 แล้ว 1 R 4 ด้วย

ถ้า 1 R 3 และ 3 R 4 แล้ว 1 R 4 ด้วย

ถ้า 2 R 3 และ 3 R 4 แล้ว 2 R 4 ด้วย

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าสำหรับทุก ๆ x R y และ y R z แล้ว x R z นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด

ตัวอย่าง 20 ให้ $A = \{x|x$ เป็นประชาชนในครอบครัวใหญ่ครอบครัวหนึ่ง$\}$

ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่งมีความหมายว่า เป็นพ่อของ นั่นก็คือ x R y หมายความว่า x เป็นพ่อของ y ในครอบครัวหนึ่ง ถ้า x R y และ y R z หมายความว่า x เป็นพ่อของ y และ y เป็นพ่อของ z จะได้ว่า x เป็นปู่ของ z ซึ่ง $x \not R z$ ดังนั้น R จึงไม่มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด

เราได้กล่าวถึงคุณสมบัติทั้ง 3 อย่างของความสัมพันธ์ ซึ่งความสัมพันธ์อันหนึ่งอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้ คือ คุณสมบัติสมมาตร, การสะท้อน และการถ่ายทอด และจากตัวอย่างจะพบว่าความสัมพันธ์บางอันก็มีคุณสมบัติบางอย่างและไม่มีคุณสมบัติบางอย่าง ความสัมพันธ์ซึ่งมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 จะเป็นความสัมพันธ์ที่น่าสนใจในทางคณิตศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์ได้ตั้งชื่อความสัมพันธ์ชนิดนี้ว่า "ความสัมพันธ์สมมูลย์" (Equivalent Relations) ซึ่งจะนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 8 ให้ A เป็นเซต และ R เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียกว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ ถ้า R มีคุณสมบัติสมมาตร การสะท้อน และการถ่ายทอด

ตัวอย่าง 21 ให้ $A = \{x|x$ เป็นประเทศในโลกนี้$\}$

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ หมายความว่า "อยู่ในทวีปเดียวกับ"

อย่างเช่น ฝรั่งเศส R สเปน หมายความว่า ฝรั่งเศสอยู่ในทวีปเดียวกับสเปน

อเมริกา R แคนาดาหมายความว่า อเมริกาอยู่ในทวีปเดียวกับแคนาดา

นอร์เวย์ $\not R$ เปรู หมายความว่า นอร์เวย์ไม่อยู่ในทวีปเดียวกับเปรู

R จะเป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ เพราะว่า ถ้าประเทศ x อยู่ในทวีปเดียวกับ y แล้ว y จะอยู่ในทวีปเดียวกับ x นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติสมมาตร

และ x จะอยู่ในทวีปเดียวกับตัวมันเอง ดังนั้น R จะมีคุณสมบัติของการสะท้อน และถ้า x อยู่ในทวีปเดียวกับ y และ y อยู่ในทวีปเดียวกับ z จะสามารถสรุปได้ว่า x จะอยู่ในทวีปเดียวกับ z ด้วย นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด

ตัวอย่าง 22 ให้ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

ให้ x R y หมายความว่า "x หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ y หารด้วย 7" อย่างเช่น 16 R 9 เพราะว่า

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7\overline{)16} \\ \underline{14} \\ \underline{\underline{2}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 7\overline{)9} \\ \underline{7} \\ \underline{\underline{2}} \end{array}$$

ความสัมพันธ์ x R y ข้างบนนี้ จะนิยมเขียนสัญลักษณ์ว่า $x \equiv y \pmod 7$

ดังนั้น 16 R 9 จึงเขียนได้เป็น $16 \equiv 9 \pmod 7$

ในทำนองเดียวกัน $39 \equiv 25 \pmod 7$ เพราะว่า

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7\overline{)39} \\ \underline{35} \\ \underline{\underline{4}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ 7\overline{)25} \\ \underline{21} \\ \underline{\underline{4}} \end{array}$$

ความสัมพันธ์ "...หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ...หารด้วย 7" นี้จะเป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ เพราะว่า

ถ้า x หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ y หารด้วย 7 ก็จะได้ความสัมพันธ์เป็นจริงว่า y หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ x หารด้วย 7 นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติสมมาตร

และ x หารด้วย 7 ก็จะมีเศษเหลือเท่ากับ x หารด้วย 7 ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่เห็นชัดแจ้งอยู่แล้ว นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติของการสะท้อน

และถ้า x หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ y หารด้วย 7 และ y หารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ z หารด้วย 7 แล้ว จะได้ว่า x หารด้วย 7 แล้วจะมีเศษเหลือเท่ากับ z หารด้วย 7 นั่นก็คือ R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด

สำหรับความสัมพันธ์ซึ่งคล้ายกับความสัมพันธ์ในตัวอย่าง 22 นี้ เช่น $x \equiv y \pmod{12}$ หรือ $x \equiv y \pmod{20}$ ต่างก็จะเป็นความสัมพันธ์สมมูลทั้งนั้น ไม่ว่าจะเปลี่ยนเป็น (mod n) ใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. ให้ A = {1, 3, 5, 7, 9, 11} จงพิจารณาดูว่าความสัมพันธ์ R บน A ต่อไปนี้มีคุณสมบัติสมมาตรหรือไม่ ถ้าไม่มีจงให้เหตุผลด้วย

   (ก) R = {(1, 3), (3, 7), (7, 9), (7, 3), (5, 11), (9, 7), (3, 11), (11, 5)}

   (ข) R = {(1, 5), (3, 9), (5, 3), (7, 11), (5, 1), (3, 5), (11, 7)}

   (ค) R = {(1, 11), (3, 3), (11, 1), (5, 5), (7, 7)}

   (ง) R = {(11, 3), (5, 1), (1, 1), (3, 11), (7, 3)}

   (จ) R = {(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9)}

   (ฉ) R = {(3, 11), (7, 5), (11, 1), (1, 5), (1, 11), (5, 7), (11, 3), (5, 1)}

2. ให้ N เป็นเซตของเลขจำนวนธรรมชาติ จงพิจารณาดูว่าความสัมพันธ์ R บน N ต่อไปนี้มีคุณสมบัติสมมาตรหรือไม่, ถ้าไม่จงให้เหตุผลด้วย

   (ก) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x น้อยกว่า y เป็นจำนวน 20"

   (ข) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มีตัวเลขท้ายสุดเหมือนกับ y"

   (ค) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มากกว่า y เป็นจำนวน 10"

   (ง) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x บวก y มีค่าน้อยกว่า 100"

   (จ) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x และ y มีแฟกเตอร์ร่วมตัวเดียวเท่านั้นคือ 1"

3. ให้ความสัมพันธ์ "มากกว่า" (>) เป็นความสัมพันธ์บนเซต Z ซึ่งเป็นเซตของเลขจำนวนเต็ม (Integers) จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ > มีคุณสมบัติต่อไปนี้หรือไม่ ?

   (ก) สมมาตร (ข) สะท้อน

4. ในความสัมพันธ์ "มากกว่าหรือเท่ากับ" (≥) เป็นความสัมพันธ์บนเซต Z (integers) จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ ≥ มีคุณสมบัติของการสะท้อนหรือไม่

5. ให้ A = {0, 2, 4, 6, 8} จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ R บน A ต่อไปนี้มีคุณสมบัติของการสะท้อนหรือไม่ ถ้าไม่มี จงบอกเหตุผลด้วย

   (ก) R = {(0, 2), (2, 6), (2, 2), (8, 6), (4, 4), (6, 0), (6, 6), (4, 2), (8, 8)}

   (ข) R = {(2, 0), (0, 0), (4, 8), (2, 2), (6, 2), (6, 6), (4, 0), (8, 8), (4, 4)}

6. ให้ N เป็นเซตของเลขจำนวนธรรมชาติ จงพิจารณาความสัมพันธ์ R บน N ต่อไปนี้ว่ามีคุณสมบัติของการสะท้อนหรือไม่ ถ้าไม่มี จงบอกเหตุผลด้วย

   (ก) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มีตัวเลขท้ายสุดเหมือนกับ y"

(ข) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x บวก y มีค่าน้อยกว่า 1,000,000"

(ค) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มีค่าต่างจาก y อย่างน้อย 1"

(ง) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x และ y มีแฟกเตอร์ร่วมตัวอื่นนอกเหนือจาก 1"

(จ) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x และ y ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมนอกจาก 1"

7. ให้ **A** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ R ต่อไปนี้มีคุณสมบัติของการถ่ายทอดหรือไม่ถ้าไม่มี จงบอกเหตุผลด้วย

(ก) R = {(1, 4), (3, 8), (4, 9), (8, 10), (8, 2), (9, 4), (3, 2), (2, 10), (3, 10), (1, 9), (4, 4)}

(ข) R = {(2, 5), (10, 7), (7, 6), (3, 8), (6, 4), (10, 4), (2, 8), (10, 6), (5, 3), (5, 8), (2, 3), (7, 4)}

(ค) R = {(7, 1), (10, 2), (1, 3), (2, 9), (10, 8), (10, 9), (9, 8), (8, 5), (7, 3), (9, 5)}

(ง) R = {(7, 7), (8, 6), (2, 3), (10, 6), (7, 3), (6, 6), (7, 2)}

(จ) R = {(3, 3)}

(ฉ) R = {(8, 2), (5, 1), (2, 9), (8, 1), (9, 5), (2, 1), (2, 5), (9, 1), (8, 5), (8, 9)}

(ช) R = {(5, 4), (7, 10), (3, 5), (5, 7), (4, 10), (3, 7), (5, 10), (4, 7), (3, 4), (3, 10)}

(ซ) R = {(9, 9), (3, 3), (6, 2), (2, 9), (6, 3), (1, 6), (1, 2), (1, 9), (9, 4), (8, 1), (2, 4), (1, 4), (8, 6), (8, 2), (8, 4)}

(ฌ) R = {(10, 1), (7, 1), (4, 1), (1, 3), (1, 7), (7, 10), (4, 3), (7, 3), (10, 7), (10, 3), (4, 7), (4, 10)}

(ญ) R = {(1, 8), (6, 4), (3, 9), (2, 10), (7, 5)}

8. ให้ Z เป็นเซตของเลขจำนวนเต็ม จงพิจารณาดูว่าความสัมพันธ์ R บน Z ต่อไปนี้มีคุณสมบัติของการถ่ายทอดหรือไม่ ถ้าไม่มี จงบอกเหตุผลด้วย

(ก) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มีค่ามากกว่า y 30"

(ข) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x มีค่าน้อยกว่า y 30"

(ค) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "$x > y$"

(ง) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทางเท่ากับ y อยู่ห่างจาก 0" (เช่น 4, -4 เป็นต้น)

(จ) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x บวก y ได้ผลออกมาเป็นเลขคี่"

(ฉ) ความสัมพันธ์ R ซึ่ง x R y หมายความว่า "x บวก y ไม่เป็น 0"

9. ให้ $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่ง $x R y$ หมายความว่า "x และ y ไม่มีแฟกเตอร์ร่วมนอกเหนือจาก 1" จงพิจารณาว่า R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอดหรือไม่ และจงให้เหตุผลประกอบคำตอบด้วย

10. ให้ A เป็นเซตในข้อ (9) ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่ง $x R y$ หมายความว่า "x และ y มีแฟกเตอร์ร่วมตัวอื่น นอกเหนือจาก 1" จงพิจารณาว่า R มีคุณสมบัติของการถ่ายทอดหรือไม่ และจงให้เหตุผลประกอบคำตอบด้วย

11. ให้ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน W ซึ่ง $x R y$ หมายความว่า "x และ y หารด้วย 8 แล้วจะเหลือเศษเท่ากัน" ซึ่งจะเขียน $x R y$ ว่า $x \equiv y \pmod 8$ จงพิจารณาดูว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์หรือไม่ ?

12. จากความสัมพันธ์ R ในข้อ (11) จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) $25 \equiv 17 \pmod 8$	(f) $33 \equiv 10 \pmod 8$
("II) $20 \equiv 28 \pmod 8$	(g) $83 \equiv 59 \pmod 8$
(ค) $36 \equiv 19 \pmod 8$	(h) $71 \equiv 47 \pmod 8$
(9) $34 \equiv 18 \pmod 8$	(i) $62 \equiv 77 \pmod 8$
(จ) $40 \equiv 32 \pmod 8$	(j) $96 \equiv 89 \pmod 8$

13. ให้ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, จงหาค่า x 10 ตัว ซึ่งเป็นสมาชิกอยู่ใน W และมีคุณสมบัติว่า $x \equiv 11 \pmod 9$

14. ให้ ปรีชา, สมชาย และเรณู เป็นเด็กในครอบครัวเดียวกัน และให้ S = {ปรีชา, สมชาย, เรณู} ให้ R เป็นความสัมพันธ์ว่า "เป็นพี่ชายหรือน้องชายของ", ความสัมพันธ์ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์หรือไม่ จงอธิบายประกอบคำตอบด้วย

15. ให้ A เป็นเซตใด ๆ, จงพิจารณาว่า $A \times A$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์หรือไม่ ?

16. ให้ $A = \{\#, \$, *\}$ จงหา R_1, R_2, R_3 ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูลย์บน A

17. ให้ $S = \{1, 3, 5\}$ จงหาความสัมพันธ์บน R ซึ่ง
    (ก) มีคุณสมบัติของการถ่ายทอดแต่ไม่มีคุณสมบัติของการสะท้อนและสมมาตร
    (ข) มีคุณสมบัติของการสะท้อนและสมมาตร แต่ไม่มีคุณสมบัติของการถ่ายทอด
    (ค) มีคุณสมบัติสมมาตร แต่ไม่มีคุณสมบัติของการสะท้อนและถ่ายทอด

2.5 **ฟังก์ชัน** (Functions)

เมื่อได้กล่าวถึงเรื่องของความสัมพันธ์และคุณสมบัติต่าง ๆ ของความสัมพันธ์แล้ว ต่อไปก็จะกล่าวถึงฟังก์ชัน ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง แต่เป็นความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติเฉพาะกว่าความสัมพันธ์ทั่ว ๆ ไป ซึ่งก่อนอื่นจะกล่าวถึงฟังก์ชันในรูปของนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 9 ให้ A, B เป็นเซต ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B คือความสัมพันธ์ f จาก A ไปยัง B ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้คือ

1. โดเมนของ f คือ A
2. ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$, แล้ว $y = z$

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง A จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันบน A จากนิยามของฟังก์ชันจะสามารถกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B เป็นความสัมพันธ์อันหนึ่งซึ่งมีโดเมนเป็น A และมีคุณสมบัติว่าแต่ละสมาชิกใน A จะสร้างอันดับคู่กับสมาชิกใน B ได้เพียง 1 สมาชิกเท่านั้น และพิสัยของ f จะเป็นสมาชิกใน B ซึ่งใช้เป็นสมาชิกอันดับที่ 2 ในอันดับคู่ซึ่งเป็นสมาชิกของ f

ตัวอย่าง 23 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ความสัมพันธ์ f, g, h จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$
$$g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 3)\}$$
$$h = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

โดเมนของแต่ละฟังก์ชันจะเป็น A, $R(f)$ (พิสัยขอ) $= \{2, 3, 4\}$, $R(g) = \{2, 3, 5\}$ และ $R(h) = \{4\}$

ส่วนความสัมพันธ์ r, s ต่อไปนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

$$r = \{(1, 2), (3, 3)\}$$
$$s = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5)\}$$

r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $D(r) \neq A = \{1, 2, 3\}$ ส่วน s ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิก 1 ใน A จับคู่กับ 2 และ 5 ซึ่งเป็นสมาชิกใน B

จาก f เป็นฟังก์ชัน และ

$(1, 2) \in f$ จะเขียนได้ว่า $f(1) = 2$

$(2, 3) \in f$ จะเขียนได้ว่า $f(2) = 3$

$(3, 4) \in f$ จะเขียนได้ว่า $f(3) = 4$

และโดยทั่ว ๆ ไปถ้า $y = f(x)$ จะเรียก y ว่าเป็นภาพ (image) ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f

ดังนั้นในการนิยามฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B บางครั้งอาจจะใช้วิธีเขียนภาพของแต่ละสมาชิกใน A อย่างเช่น f เป็นฟังก์ชันจาก $A = \{1, 2, 3\}$ ไปยัง $B = \{\S, \#, *\}$ โดยให้ $f(1) = \#$, $f(2) = *$ และ $f(3) = *$ ในอีกรูปแบบหนึ่งอาจจะเขียน f ในรูปแบบของเซตซึ่งมีสมาชิกเป็นอันดับคู่

$$f = \{(1, \#), (2, *), (3, *)\}$$

และอีกรูปแบบหนึ่งอาจจะเขียนภาพของสมาชิกในรูปแบบทั่ว ๆ ไปได้เช่น ให้ g เป็นฟังก์ชันบนเซตของเลขจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดย

$g(x) = 2x - 1$ สำหรับแต่ละ $x \in R$ (เซตของเลขจำนวนจริง)

ดังนั้นถ้าหากจะหาภาพของ -3 จะทำได้โดยการแทนค่า $x = -3$

$$\therefore g(-3) = 2(-3) - 1 = -7$$

ซึ่ง -7 จะเป็นภาพของสมาชิก -3 ภายใต้ฟังก์ชัน g

ตัวอย่าง 24 ให้ h เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$h(x) = 3x^2-5x+2$ สำหรับแต่ละ $x \in R$

จงหา $h(-1)$, $h\left(\frac{5}{3}\right)$, $h(0)$ และ $h(10)$ และจงเขียน h ในรูปของเซตอันดับคู่

$$h(-1) = 3(-1)^2-5(-1)+2 = 10$$

$$h\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3}\right)+2 = 2$$

$$h(0) = 3(0)^2-5(0)+2 = 2$$

$$h(10) = 3(10)^2-5(10)+2 = 252$$

$h = \{(x, y) | x \in R$ และ $y = 3x^2-5x+2\}$

จากนิยามและตัวอย่างจะสังเกตเห็นได้ว่าทุก ๆ ฟังก์ชันจะเป็นความสัมพันธ์อันหนึ่ง แต่อย่างไรก็ตามสำหรับความสัมพันธ์แล้วไม่จำเป็นว่าจะต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป และมีความสัมพันธ์มากมายที่ไม่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชัน บางครั้งอาจจะให้นิยามของฟังก์ชันอีกอย่างได้ว่า

ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B คือกฎอันหนึ่งซึ่งแยกแต่ละสมาชิกของ A กับสมาชิกของ B เพียง 1 สมาชิกเท่านั้น

ตัวอย่าง 25 ประชาชนทุก ๆ คนที่ทำงาน และถูกหักภาษี กรมสรรพากร จะออกเลขประจำตัวให้ ซึ่งเลขประจำตัวของผู้เสียภาษีนี้จะไม่ซ้ำกัน ถ้าคน ๆ นั้นไม่ใช่คนคนเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถจะสร้างเซตอันดับคู่ซึ่งมีสมาชิกอันดับที่ 1 ประชาชนคนหนึ่ง ๆ และสมาชิกอันดับที่ 2 เป็นเลขประจำตัวของผู้เสียภาษีคนนั้น ดังนั้นจะสามารถให้นิยามของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นเซตของอันดับคู่นี้ โดย f นี้จะเป็นฟังก์ชันจากเซตของประชาชนที่ถูกหักภาษีไปยังเซตของเลขจำนวนจริง

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $f : A \rightarrow B$ และเราก็คงเรียก A ว่าเป็นโดเมนของ f ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ว่า D(f) ส่วนเซตที่เรียกว่าพิสัยของ f นี้จะใช้สัญลักษณ์ว่า f(A) และถ้าพิสัยของ f คือ f(A) เป็นเซตเดียวกับ B แล้วจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึง (onto) เซต B แต่ถ้า $f(A) \subset B$ แล้วจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปใน (into) เซต B ส่วน f จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) ถ้าเมื่อไรก็ตามที่ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 26 ให้ R = {(2, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 6), (5, 6)}

(ก) จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์ R นี้

(ข) จงพิจารณาดูว่า R เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(ก) โดเมนของ R คือเซต = {2, 3, 4, 5}
พิสัยของ R คือเซต = {3, 5, 6}

(ข) ความสัมพันธ์ R ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะอันดับคู่ (3, 5), (3, 6) ซึ่งมีอันดับที่ 1 เหมือนกันคือ 3

ตัวอย่าง 27 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 5x+2$ จงหาค่าของ f(3) f(1)

$$f(3) = 5(3)+2 = 17$$

$$f(1) = 5(1)+2 = 7$$

$$\therefore f(3)-f(1) = 17-7 = 10$$

แบบฝึกหัด

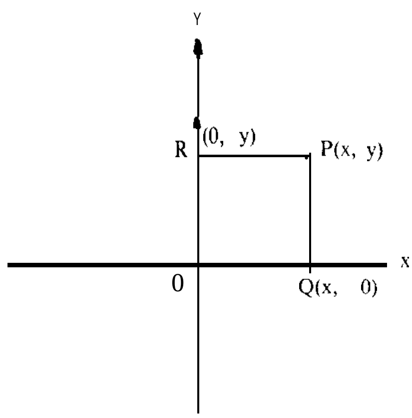
1. ให้ $S = \{0, 2, 4\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน S ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ? ถ้าความสัมพันธ์อันไหนไม่เป็นฟังก์ชัน จงอธิบายด้วยว่าเป็นเพราะเหตุใด
   (ก) $r = \{(0, 2), (2, 2), (4, 2)\}$
   (ข) $s = \{(0, 0), (2, 2), (4, 4)\}$
   (ค) $t = \{(0, 2), (2, 4), (0, 4)\}$
   (ง) $u = \{(2, 4), (4, 2)\}$
   (จ) $v = \{(0, 2), (2, 4), (4, 0)\}$
   (ฉ) $w = \{ \}$
2. ให้ A = {#, $, *} และ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ จงสร้างฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชันที่แตกต่างกันจากเซต A ไปยังเซต B พร้อมทั้งบอกโดเมน และพิสัยของแต่ละฟังก์ชันด้วย
3. ให้ $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{3\}$ จะมีเพียง 1 ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B จงหาฟังก์ชันนี้
4. ให้ S = {#, $, *} จงสร้างฟังก์ชัน 5 ฟังก์ชันซึ่งแตกต่างกันบนเซต S พร้อมทั้งบอกโดเมนและพิสัยของแต่ละฟังก์ชันด้วย
5. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนเซตของเลขจำนวนจริง R โดยกำหนดให้ $f(x) = 3x - 4$ สำหรับแต่ละค่าของ $x \in R$ จงหาภาพ (image) ของเลขต่อไปนี้ภายใต้ฟังก์ชัน f
   (ก) 0 (ค) $\frac{1}{2}$ (จ) -.02
   (ข) -3 (ง) 15 (ฉ) -10
6. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนเซตของเลขจำนวนจริง R โดยกำหนดให้ $f(x) = 2x^2-x-1$ สำหรับแต่ละ $x \in R$ จงหาค่าของ $f(-1)$, $f(5)$, $f(0)$, $f(-8)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(.1)$, $f(-\frac{1}{2})$ และ $f(100)$ จงเขียน f ในรูปของเซตอันดับคู่

7. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนเซต N = {0, 1, 2, 3,...} โดยกำหนดให้ $f(x) = 2x+1$ จงหาพิสัยของ f

2.6 **กราฟของฟังก์ชัน** (Graph of Functions)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการแสดงความสัมพันธ์หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสมาชิกในเซต $R \times R$ เมื่อ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริง กับเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ระบบซึ่งนิยมใช้เพื่อที่จะแสดงความสัมพันธ์อันนี้ คือ ระบบโคออร์ดิเนตพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System) ซึ่งดัดแปลงโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ René Descartes และในบางครั้งก็เรียกระบบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากอีกชื่อว่า ระบบโคออร์ดิเนตคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System)

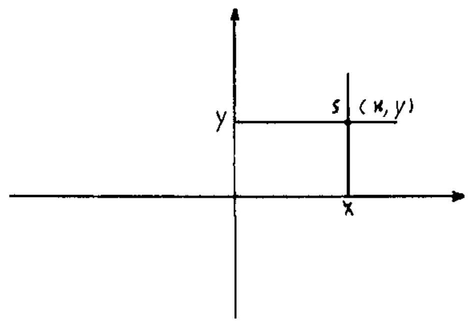
ในระบบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากนี้ จะมีเส้นตรง 2 เส้นซึ่งตั้งฉากกัน เส้นหนึ่งจะอยู่ในแนวนอน ส่วนอีกเส้นจะอยู่ในแนวตั้ง เส้นตรงทั้งสองเส้นนี้เรียกว่า แกนโคออร์ดิเนต เส้นที่อยู่ในแนวนอนเรียกว่า แกน X (X-axis) ส่วนเส้นที่อยู่ในแนวตั้งจะเรียกว่าแกน Y(y-axis) จุดตัดของแกน X และแกน Y จะเรียกจุดกำเนิด (origin) จุดกำเนิดนี้จะแทนโดยอันดับคู่ (0, 0) ถ้าให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่งในระนาบ ถ้าลากเส้นจากจุด P ให้ไปตั้งฉากกับแกนโคออร์ดิเนตทั้งสอง ดังรูปที่ 2.2 ให้เส้นตั้งฉากจากจุด P มายังแกน X ตัดแกน X ที่จุด Q ระยะทางจากจุดกำเนิดมายังจุด Q ให้เป็น x ค่า x นี้จะเรียกว่า x-โคออร์ดิเนต หรือ พิกัดที่หนึ่ง (abscissa) ของจุด P เส้นตรงตั้งฉากที่ลากจากจุด P ไปตัดแกน Y ที่จุด R ระยะทางจากจุดกำเนิดไปถึง R เป็น y ค่า y นี้เรียกว่า y-โคออร์ดิเนต หรือ พิกัดที่สอง (ออร์ดิเนต) ของจุด P



รูปที่ 2.2

ดังนั้น จุด P จะสมนัยกับอันดับคู่ (x, y) ซึ่งโดยการสร้างแบบนี้จะเห็นได้ว่าจุด ๆ หนึ่งในระนาบจะสมนัยกับอันดับคู่อันหนึ่งของเลขจำนวนจริง

ในทำนองเดียวกันนี้ หากเรามีอันดับคู่ (x, y) ซึ่ง x, y เป็นเลขจำนวนจริง ก็สามารถจะหาจุดในระนาบโคออร์ดิเนตมาสมนัยกับอันดับคู่ (x, y) นี้ได้ โดยการสร้างเส้นตรงให้ผ่านจุดบนแกน x ที่ค่า x และให้เส้นตรงนี้ตั้งฉากกับแกน x ด้วย แล้วสร้างเส้นตรงให้ผ่านจุดบนแกน y ที่ค่า y และให้เส้นตรงนี้ตั้งฉากกับแกน y ด้วย เส้นตรง 2 เส้นที่สร้างจะตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งให้เป็นจุด S จุด S นี้จะสมนัยกับอันดับคู่ (x, y) ตามรูปที่ 2.3

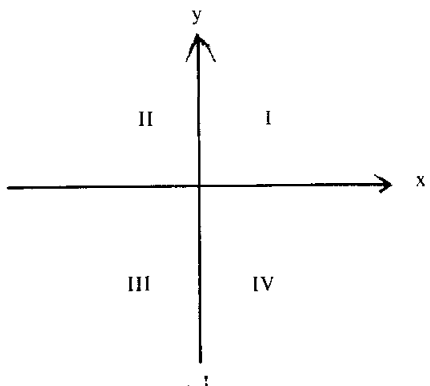


รูปที่ 2.3

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า ทุก ๆ อันดับคู่จะสมนัยกับจุด ๆ หนึ่งในระนาบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากนี้เสมอ จึงสรุปได้ว่าสมาชิกในเซต $R \times R$ จะสมนัยกันระหว่างหนึ่งต่อหนึ่งกับจุดภายในระนาบ

ในการที่สร้างจุดในระนาบที่สมนัยกับอันดับคู่อันหนึ่ง ๆ เรียกว่า การวางจุด (plot) หรือกราฟ (Graph) อันดับคู่

ในระนาบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากนี้จะแบ่งออกเป็น 4 จตุตถภาค (Quadrant) ตามรูปที่ 2.4



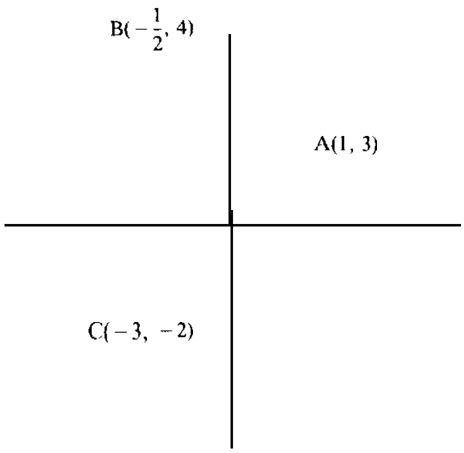
รูปที่ 2.4

และในตาราง 2.1 ต่อไปนี้ จะแสดงเครื่องหมายของค่า x-โคออร์ดิเนต และ y-โคออร์ดิเนต ในแต่ละจตุตถภาค

ตาราง 2.1

จตุตถภาค	ค่า x-โคออร์ดิเนต	ค่า y-โคออร์ดิเนต
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	

ตัวอย่าง 28 จงวางจุดต่อไปนี้ $A(1, 3)$, $B(-\frac{1}{2}, 4)$, $C(-3, -2)$

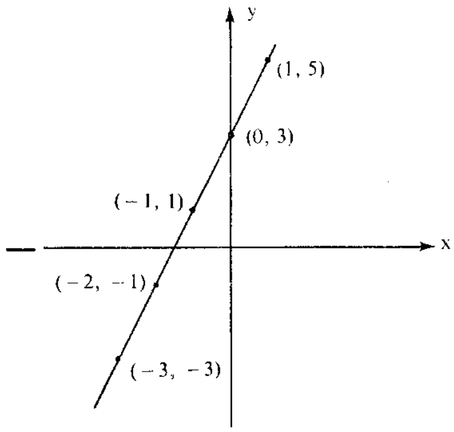


รูปที่ 2.5

ตัวอย่าง 29 จงเขียนกราฟฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 3$

x	1	0	−1	−2	−3
y	5	3	1	−1	−3

ตอนแรกก็หาค่า x, y ที่สมนัยกัน แล้ววางจุด (1, 5), (0, 3), (−1, 1), (−2, −1) และ (−3, −3) ลงในระนาบโคออร์ดิเนต แล้วลากเส้นต่อเชื่อมจุดเหล่านี้จะได้กราฟของฟังก์ชันนี้ในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6

ตัวอย่าง 30 จงเขียนโลกัสของจุด ซึ่งมีสมการ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$

และจงใช้สัญลักษณ์ของเซตอธิบายจุด (x, y) ซึ่งคล้องตามสมการนี้

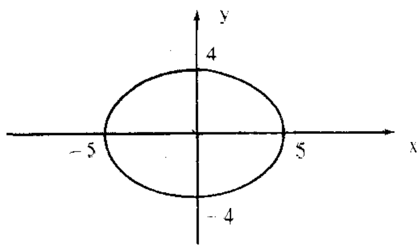
ให้ S เป็นเซตของจุด (x, y) ซึ่งคล้องตามสมการนี้ ดังนั้น

$$S = \{(x, y)|(x^2/25)+(y^2/16) = 1\}$$

หาค่า y ในเทอมของ x จะได้ $y = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	± 4	$\pm\frac{4}{5}\sqrt{24}$	$\pm\frac{4}{5}\sqrt{21}$	$\pm\frac{16}{5}$	$\pm\frac{12}{5}$	0

เมื่อวางจุด (x, y) เหล่านี้ลงในระนาบโคออร์ดิเนต แล้วเชื่อมโยงจุดด้วยเส้นโค้งจะได้กราฟดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7

ตัวอย่าง 31 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x^2 - 2x - 3$ จงหาค่า f(O), f(- 1), f(−2), f(2), f(3), f(t) และ f(f(x)) และจงหากราฟของ f สำหรับส่วนของโดเมน $-2 \leqslant x \leqslant 3$

$$f(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$$

$$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$$

$$f(3) = 3^2 - 2(3) - 3 = 0$$

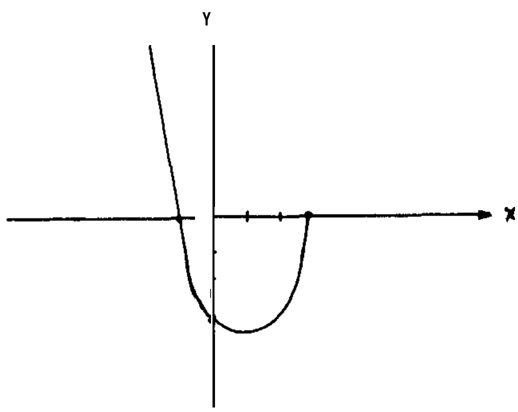
$$f(t) = t^2 - 2(t) - 3 = t^2 - 2t - 3$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (f(x))^2 - 2(f(x)) \quad 3 \\ &= (x^2 - 2x - 3)^2 - 2(x^2 - 2x - 3) - 3 \\ &= x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 12 \end{aligned}$$

เมื่อต้องการจะหากราฟของฟังก์ชัน f จะหาจุด x, y ซึ่งสมนัยกันดังตารางต่อไปนี้

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x) = y	5	0	−3	−4	−3	0

เมื่อวางจุด (x, y) ลงในระนาบโคออร์ดิเนตแล้วเชื่อมจุดเหล่านี้ จะได้กราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 2.8



$7 2.8

แบบฝึกหัด

1. จงสร้างระนาบโคออร์ดิเนต และวางจุดต่อไปนี้ลงในระนาบโคออร์ดิเนต

   (ก) $(1, 2), (-3, 5), (-1, 2), (5, 3), (2, 6)$

   (ข) $(\frac{1}{2}, 3), (3, \frac{2}{3}), (-1, -\frac{7}{2}), (\frac{\pi}{2}, 3), (-4, 6)$

   (ค) $(1, \frac{3}{2}), (-\sqrt{2}, 1), (-2, -1), (\frac{\pi}{3}, -2)$

2. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดซึ่ง

   (ก) อยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย 4 หน่วย และอยู่เหนือแกน x 2 หน่วย

   (ข) อยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา 5 หน่วย และอยู่เหนือแกน x 3 หน่วย

   (ค) อยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย $\frac{1}{2}$ หน่วย และอยู่ใต้แกน x 3 หน่วย

   (ง) อยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา 4 หน่วยและอยู่เหนือแกน x $\frac{3}{2}$ หน่วย

3. (ก) ค่า x โคออร์ดิเนตของจุดใด ๆ บนแกน y เป็นเท่าไหร่ ?

   (ข) ค่า y โคออร์ดิเนตของจุดใด ๆ บนแกน x เป็นเท่าไหร่ ?

4. โดยไม่ต้องวางจุดลงในระนาบโคออร์ดิเนต จงบอกว่าจุดต่อไปนี้อยู่ในจตุตถภาคที่เท่าไหร่ ?

(ก) $(3, 5)$	(ง) $(-\pi, 3)$	(ช) $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$
(ข) $(-7, \frac{1}{2})$	(จ) $(\pi, -\frac{7}{3})$	(ซ) $(-\frac{3}{7}, \frac{2}{5})$
(ค) $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	(ฉ) $(-7, 3)$	(ฌ) $(7, 16)$

5. ให้ $f(x) = 3x + 2$ จงหาค่าของ

   (ก) $f(1)$ (ข) $f(-\frac{1}{2})$ (ค) $f(0)$ (ง) $f(-16)$

6. ให้ $k(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ จงหา

   (ก) $k(6)$ (ข) $k(-3)$ (ค) $k(0)$ (ง) $k(-1)$

7. จงเขียนตารางแสดงค่าของ x, y ซึ่งสมนัยกัน แล้วจงเขียนกราฟฟังก์ชันต่อไปนี้

   (ก) $f(x) = 3x + 2$ (ค) $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

   (ข) $h(x) = -3x$ (ง) $k(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$

2.7 การดำเนินการทวิภาค (Binary Operations)

การดำเนินการบางอย่างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนำสมาชิก 2 ตัวในเซต A มาดำเนินการกันแล้ว ผลของการดำเนินการจะได้สมาชิกออกมาซึ่งสมาชิกที่ออกมานี้ก็จะเป็นสมาชิกอยู่ใน A ด้วย การดำเนินการชนิดนี้จะเรียกว่า การดำเนินการทวิภาค (Binary Operations) ตัวอย่างเช่น ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ซึ่งเป็นเซตของเลขจำนวนธรรมชาติ แล้วการดำเนินการบวก จะเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต N อย่างเช่นถ้านำ 2 มาบวกกับ 7 จะได้ผลเป็น 9 ซึ่ง 9 เป็นสมาชิกใน N ด้วย ต่อไปก็จะกล่าวถึงนิยามของการดำเนินการทวิภาคดังนี้คือ

นิยาม 10 ให้ A เป็นเซตใด ๆ และ $A \times A$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของ A การดำเนินการทวิภาคบน A คือกฎอันหนึ่ง ซึ่งแยกแต่ละอันดับคู่ (x, y) ใน $A \times A$ ไปสมนัยกับสมาชิก 1 ตัวใน A

ตัวอย่าง 32 ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ การดำเนินการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N เพราะว่าถ้าเลือกอันดับคู่ (x, y) ใด ๆ ใน $N \times N$ มาดำเนินการคูณจะได้ $x \cdot y$ ซึ่งเป็นเลขจำนวนธรรมชาติตัวหนึ่งเหมือนกัน อย่างเช่น

ถ้าเลือก $(2, 11)$, จะได้ $(2)(11) = 22$

ถ้าเลือก $(5, 1)$, จะได้ $(5)(1) = 5$

ถ้าเลือก $(9, 9)$, จะได้ $(9)(9) = 81$

แต่ถ้าให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ การดำเนินการลบจะไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N อย่างเช่น ถ้าเลือก $(5, 7) \in N \times N$ จะได้ $5 - 7 = -2 \notin N$ และการให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ การดำเนินการหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N

เพราะ $(2, 3) \in N \times N$ จะได้ $\frac{2}{3} \notin N$

ตัวอย่าง 33 ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

ให้ $x*y = x$

เช่น	$3*7 = 3$	และ	$7*3 = 7$ เป็นต้น
และ	$6*5 = 6$	ส่วน	$5*6 = 5$
	$22*1 = 22$	ส่วน	$1*22 = 1$
	$3*8 = 8$		

จะเห็นได้ว่าการดำเนินการ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N

ตัวอย่าง 34 ให้ $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

ให้ $x*y$ = ค่าที่มากที่สุดของ x หรือ y

อย่างเช่น
$$
\begin{aligned}
2*9 &= 9 \\
3*7 &= 7 \\
(-5)*4 &= 4 \\
4*(-5) &= 4 \\
29*30 &= 30 \\
(-4)*(-4) &= -4
\end{aligned}
$$

การดำเนินการ * เป็นการดำเนินการทวิภาค

เมื่อได้ทราบความหมายของการดำเนินการทวิภาคแล้วต่อไปก็จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางชนิดของการดำเนินการทวิภาค ซึ่งคุณสมบัติอันแรกที่จะกล่าวถึงก็คือคุณสมบัติของการสลับที่ (commutative property)

นิยาม 11 ให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A ที่กำหนดให้ การดำเนินการทวิภาค * จะกล่าวว่ามีคุณสมบัติของการสลับที่ ถ้าทุก ๆ อันดับคู่ (x, y) ใด ๆ

$$x*y = y*x$$

ตัวอย่าง 35

1. ให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต R (เลขจำนวนจริง) ซึ่ง $x*y$ หมายถึง $x+y$ ดังนั้น * จะเป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งมีคุณสมบัติของการสลับที่ นั่นก็คือ

$$x+y = y+x$$

2. ให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต R ซึ่ง $x*y$ หมายถึง $x - y$ ดังนั้น * จะเป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งไม่มีคุณสมบัติของการสลับที่ เพราะ

$$
\begin{aligned}
17*5 &= 17 - 5 = 12 \\
5*17 &= 5 - 17 = -12 \\
\therefore x*y &\neq y*x
\end{aligned}
$$

3. ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และ * เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่ง $x*y = x$ * จะเป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งไม่มีคุณสมบัติของการสลับที่ เพราะว่า

$7*4 = 7$ ส่วน $4*7 = 4$

ดังนั้น $7*4 \neq 4*7$

คุณสมบัติต่อไปของการดำเนินการทวิภาคก็คือ คุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative property) ซึ่งจะกล่าวเป็นนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 12 ให้ A เป็นเซตที่กำหนดให้ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A แล้ว การดำเนินการทวิภาค $*$ มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่ม ถ้าสำหรับทุก ๆ สมาชิก $x, y, z \in A$

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

ตัวอย่าง 36

1. ให้ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริง และให้ $*$ เป็นการดำเนินการบวกบนเซตของเลขจำนวนจริง ดังนั้นถ้า $x, y, z \in R$ แล้ว

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

นั่นก็คือ $$(x*y)*z = x*(y*z)$$

จึงกล่าวได้ว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งมีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่ม

2. ให้ Q เป็นเซตของเลขเศษส่วนทั้งหมด และให้ $*$ เป็นการดำเนินการลบ ดังนั้น สำหรับ $x, y \in Q$ $x*y$ หมายถึง $x - y$

การดำเนินการลบบนเซตของเลขเศษส่วนเป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งไม่มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่มเพราะว่า

$$\left(\frac{9}{10}-\frac{7}{10}\right)-\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{ส่วน} \quad \frac{9}{10}-\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

3. ให้ $N = \{1, 2, 3,\ldots\}$ และให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N ซึ่ง $x*y = x$ การดำเนินการทวิภาคนี้มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่ม เพราะว่า สำหรับ $x, y, z \in N$ เป็นสมาชิกใด ๆ

$$x*(y*z) = x*y = x$$

ส่วน $$(x*y)*z = x*z = x$$

ดังนั้น $$x*(y*z) = (x*y)*z$$

4. ให้ $S = \{a, b, c\}$ ให้การดำเนินการทวิภาค $*$ กำหนดตามตาราง 2.2 ต่อไปนี้

ตาราง 2.2

*	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

จากตารางจะได้ว่า

$$a*a = b, \quad a*b = a, \quad a*c = c$$
$$b*a = a, \quad b*b = c, \quad b*c = b$$
$$c*a = c, \quad c*b = b, \quad c*c = a$$

พิจารณา $(a*b)*c = a*c = c$

ส่วน $a*(b*c) = a*b = a$

ดังนั้น $(a*b)*c \neq a*(b*c)$

นั่นก็คือการดำเนินการทวิภาค * ไม่มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่ม

คุณสมบัติที่กล่าวมาแล้วทั้ง 2 ข้อจะเห็นว่าเป็นคุณสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการทวิภาคอันเดียวเท่านั้น ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติของการดำเนินการทวิภาค ซึ่งเกี่ยวกับการดำเนินการสองอย่าง ซึ่งคุณสมบัตินี้มีชื่อเรียกว่า คุณสมบัติของการแจกแจง (Distributive property)

นิยาม 13 ให้ A เป็นเซตที่กำหนดให้ และ *, # เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A ถ้าสำหรับทุก ๆ สมาชิก $x, y, z \in A$ แล้ว

$$x*(y \# z) = (x*y) \# (x*z)$$

แล้วจะกล่าวว่าการดำเนินการทวิภาค * มีคุณสมบัติแจกแจงทางซ้ายเหนือการดำเนินการทวิภาค #

และถ้า $(y \# z) * x = (y*x) \# (z*x)$

แล้วการดำเนินการทวิภาค * มีคุณสมบัติแจกแจงทางขวาเหนือการดำเนินการ #

ตัวอย่าง 37 การดำเนินการคูณ (·) และบวก (+) บนเซตของเลขจำนวนจริง การดำเนินการคูณมีคุณสมบัติแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการดำเนินการบวก เพราะว่า

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \quad \text{(แจกแจงทางซ้าย)}$$
$$(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x \quad \text{(แจกแจงทางขวา)}$$

2. การดำเนินการบวก (+) และคูณ (·) บนเซตของเลขจำนวนจริง การดำเนินการบวกไม่มีคุณสมบัติแจกแจงทางซ้ายเหนือการดำเนินการคูณ เพราะว่า

$$x+(y\cdot z) \neq (x+y)\cdot(x+z) \quad \text{ดังเช่น}$$
$$10+(7.4) = 10+28 = 38$$
$$(10+7)\cdot(10+4) = (17)(14) = 238$$

3. การดำเนินการบวก (+) และคูณ (·) บนเซตของเลขจำนวนจริง การดำเนินการบวกไม่มีคุณสมบัติแจกแจงทางขวาเหนือการดำเนินการคูณ เพราะว่า

$$(y \cdot z) + x \neq (y + x) \cdot (z + x) \text{ ดังเช่น}$$

$$(8 \cdot 3) + 12 = 24 + 12 = 36$$

$$(8 + 12) \cdot (3 + 12) = (20)(15) = 300$$

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่าการดำเนินการต่อไปนี้เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตที่กำหนดให้หรือไม่ จงให้เหตุผลประกอบด้วย

(ก) การดำเนินการบวก (+) บนเซต $A = \{\ldots, -6, -4, -2, 0\ 2, 4, 6, \ldots\}$

(ข) การดำเนินการบวก (+) บนเซต $B = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

(ค) การดำเนินการคูณ (·) บนเซต $A = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$

(ง) การดำเนินการคูณ (·) บนเซต $B = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

(จ) การดำเนินการลบ (−) บนเซต $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

(ฉ) การดำเนินการคูณ (·) บนเซต $D = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$

(ช) การดำเนินการบวก (+) บนเซต $D = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$

(ซ) การดำเนินการบวก (+) บนเซต $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ฌ) การดำเนินการบวก (+) บนเซต $T = \{0\}$

(ญ) การดำเนินการคูณบนเซต $M = \{1\}$

(ฎ) การดำเนินการบวกบนเซต $G = \{0, 1\}$

(ฏ) การดำเนินการบวกบนเซต $H = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(ฐ) การดำเนินการคูณบนเซต Q ของเลขจำนวนเศษส่วน

(ฑ) การดำเนินการคูณบนเซต

$J = \{x|x$ เป็นเลขจำนวนนับบวกมากกว่า 1 และ x ไม่ใช่เลขจำนวนเฉพาะ (prime number)$\}$

(ด) การดำเนินการลบบนเซต $G = \{0, 1\}$

(ณ) การดำเนินการคูณบนเซต $G = \{0, 1\}$

2. ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และ $x*y$ = ครน. ของ x, y จงพิจารณาว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต N หรือไม่ จงอธิบายเหตุผลประกอบด้วย

3. ให้ S เป็นเซตที่กำหนดให้ สมมติว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งกำหนดว่า สำหรับ $(x, y) \in S \times S$ เป็นสมาชิกใด ๆ

$$x*y = y$$

(ก) $*$ มีคุณสมบัติของการสลับที่หรือไม่

(ข) $*$ มีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่มหรือไม่

4. ให้ Q เป็นเซตของเลขจำนวนเศษส่วน, ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งกำหนดว่า สำหรับ $(x, y) \in Q \times Q$ ใด ๆ

$$x*y = x + y - xy$$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{1}{2}*\frac{1}{5} = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5}{10}+\frac{2}{10}-\frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

จงคำนวณหา

(ก) $\frac{1}{3} * \frac{1}{2}$ (ค) $\frac{2}{5} * \frac{2}{5}$ (จ) $\frac{1}{2} * (-\frac{1}{2})$

(ข) $1*\frac{3}{4}$ (ง) $\frac{3}{8} * 0$ (ฉ) $\frac{2}{3} * \frac{3}{2}$

5. จากข้อ 4. จงพิจารณาว่าการดำเนินการทวิภาค $*$ มีคุณสมบัติของการสลับที่หรือไม่

6. ให้ $S = \{a, b, c, d\}$ ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งกำหนดดังในตารางต่อไปนี้

*	a	b	c	d
a	d	a	c	b
b	a	b	d	c
c	c	d	a	b
d	b	c	b	a

จงพิจารณาคุณสมบัติของการดำเนินการทวิภาค $*$

7. ให้ S = {p, q, r, s} และให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต S ซึ่งกำหนดโดยตาราง ซึ่งยังไม่สมบูรณ์ต่อไปนี้

*	p	q	r	s
p	s	r	p	q
q		q	s	r
r			r	s
s				p

จงทำให้ตารางสมบูรณ์ โดยให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งมีคุณสมบัติของการสลับที่

8. ให้ S = {c, d, e}

ให้ $\oplus$ และ $\odot$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งกำหนดในตารางต่อไปนี้

$\oplus$	c	d	e
c	c	d	e
d	d	e	c
e	e	c	d

$\odot$	c	d	e
c	c	c	c
d	c	d	e
e	c	e	d

จงคำนวณหาค่าต่อไปนี้

(n) $d \oplus e$

(ข) $d \odot e$

(ค) $e \oplus c$

(ง) $e \odot c$

(จ) $(d \oplus e) \oplus c$

(a) $e \oplus (c \oplus c)$

(ช) $(c \oplus e) \oplus (e \oplus d)$

(ซ) $e \odot (d \odot c)$

(ฌ) $(e \odot e) \odot d$

(ญ) $(e \odot c)$ $(c \odot d)$

(ฎ) $d \odot (c \oplus e)$

(ฏ) $e \odot (e \oplus d)$

(ฐ) $c \odot (d \oplus d)$

(ฑ) $e \odot (e \oplus e)$

(ฒ) $(c \oplus d) \odot d$

(ณ) $(c \odot e) \oplus (c \odot d)$

(ด) $(e \odot e) \oplus (e \odot c)$

(ต) $(d \oplus c) \odot (dad)$

(a) $(c \odot c) \oplus (c \odot c)$

(ท) $(e \oplus e) \oplus (c \odot d)$

9. การดำเนินการทวิภาคในข้อ (8) เป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งมีคุณสมบัติของการสลับที่หรือไม่ ?

10. จากการดำเนินการทวิภาคในข้อ (8) จงคำนวณและเปรียบเทียบค่าต่อไปนี้

(ก) $d \odot (e \oplus c)$ และ $(d \odot e) \oplus (d \odot c)$

(ข) $e \odot (c \oplus d)$ และ $(e \odot c) \oplus (c \odot d)$

(ค) $c \odot (d \oplus e)$ และ $(c \odot d) \oplus (c \odot e)$

(ง) $e \odot (e \oplus c)$ และ $(e \odot e) \oplus (e \odot c)$