บทที่ 1
เซตและตรรกวิทยา
(Sets and Logic)

เซต (Sets)

1.1 ความหมายของเซต

เมื่อกล่าวถึงจำนวนในคณิตศาสตร์ เรามักหมายถึงวัตถุสิ่งของ (objects) รอบ ๆ ตัวเรา ซึ่งวัตถุสิ่งของทั้งสิ่งมีชีวิตและไม่มีชีวิตโดยธรรมชาติทั่ว ๆ ไปแล้วมักจะอยู่เป็นกลุ่ม เป็นหมู่ เป็นคณะ หรือเป็นฝูง ฯลฯ เช่น นักศึกษากลุ่มหนึ่ง ทหารหมู่หนึ่ง บุคคลคณะหนึ่ง ม้าฝูงหนึ่ง ฯลฯ การที่วัตถุสิ่งของทั้งมีชีวิตและไม่มีชีวิตอยู่กันเป็นกลุ่ม เป็นหมู่ เป็นฝูง เช่นนี้เรียกว่า "เซต" ตามนัยของคณิตศาสตร์แนวใหม่ ดังนั้น เมื่อพูดว่าเซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ ก็จะหมายถึง วันอาทิตย์ จันทร์ อังคาร พุธ พฤหัส ศุกร์ เสาร์ หรือกล่าวว่าเซตของเดือนในหนึ่งปีก็จะหมายถึง เดือนมกราคม กุมภาพันธ์ มีนาคม เมษายน พฤษภาคม มิถุนายน กรกฎาคม สิงหาคม กันยายน ตุลาคม พฤศจิกายน ธันวาคม เป็นต้น ซึ่งจะพบว่าเซตมีความหมายชัดเจนและกว้างขวาง จึงยากแก่การให้คำนิยามที่เฉพาะเจาะจง ดังนั้นเมื่อพูดถึงเซตใด ๆ จะหมายถึงการเก็บรวบรวม หรือจัดกลุ่มวัตถุสิ่งของ ซึ่งสามารถระบุได้ชัดเจนอยู่กลุ่มหนึ่ง วัตถุสิ่งของแต่ละอันในเซตนั้น ๆ เรียกว่า "สมาชิก" หรือองค์ประกอบ (element or member) และวัตถุสิ่งของซึ่งเป็นสมาชิกของเซตอาจหมายถึง คน สัตว์ สิ่งของ จังหวัด ตัวเลข ฯลฯ

ตัวอย่างที่ 1 การรวบรวมหรือจัดกลุ่มสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมที่อยู่บนบก จัดเป็นเซต ช้างเป็นสมาชิกของเซตนี้ ม้าเป็นสมาชิกของเซตนี้ แต่ปลาวาฬไม่เป็นสมาชิกของเซตนี้

ตัวอย่างที่ 2 การรวบรวมจังหวัดในประเทศไทยซึ่งมีคำขึ้นต้นว่า "นคร" จัดเป็นเซต นครศรีธรรมราชเป็นสมาชิกของเซตนี้ นครสวรรค์เป็นสมาชิกของเซตนี้ แต่กรุงเทพมหานครไม่เป็นสมาชิกของเซตนี้

ตัวอย่างที่ 3 การรวบรวมประชาชนที่ฉลาดที่สุดในโลก 10 คน ไม่จัดว่าเป็นเซต เพราะไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่า คนที่ฉลาดที่สุดในโลก 10 คน คือใครบ้าง

1.2 การเขียนสัญลักษณ์ของเซต

การเขียนเพื่อแสดงว่าวัตถุสิ่งของใด ๆ เป็นเซต ให้ใช้สัญลักษณ์วงเล็บปีกกา { } หรือวงกลมล้อมรอบวัตถุสิ่งของนั้น ๆ เช่น {น้ำเงิน, แดง, เหลือง} เป็นเซตของแม่สี { △, □, O} เป็นเซตของรูปทรงเรขาคณิต เป็นต้น

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเซต

(ก) สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงให้ทราบว่าวัตถุสิ่งของใดเป็นสมาชิกของเซตคือ "$\in$" เช่น

$$2 \in \{1, 2, 3\}$$

หมายความว่า 2 เป็นสมาชิกของ {1, 2, 3}

และสัญลักษณ์ "$\notin$" ใช้แสดงให้ทราบว่าวัตถุสิ่งของใดไม่เป็นสมาชิกของเซต นั่นคือ

$$4 \notin \{1, 2, 3\}$$

หมายความว่า 4 ไม่เป็นสมาชิกของ {1, 2, 3}

(ข) จะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A, B,..., Z แทนเซต และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก a, b, c,...,z แทนสมาชิกของเซต ระหว่างสมาชิกแต่ละตัวเขียนคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค " , "

(ค) ใช้สัญลักษณ์

I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

I^- แทนเซตของจำนวนเต็มลบ

I แทนเซตของจำนวนเต็ม

N แทนเซตของจำนวนนับ

นั่นคือ

$I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$I^- = (-1, -2, -3, \ldots\}$

$I = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

วิธีเขียนเซตทำได้ 2 วิธี คือ

...on method) วิธีนี้เราเขียนสมาชิกทั้งหมดลงใน วงเล็บปีกกา

2. วิธีพรรณนาคุณสมบัติสมาชิก (Descriptive property method) วิธีนี้เรากำหนดเงื่อนไขของสมาชิกในวงเล็บปีกกา

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 10

...สมาชิก

วิธีทำ ให้ O แทนเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10 ดังนั้น

(ก) O = {1, 3, 5, 7, 9}

(ข) O = {x|x เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10}

ความหมายของเซตนี้คือ O เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก x ซึ่ง (เส้นตรงแนวดิ่ง) x เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มคี่และมีค่าน้อยกว่า 10

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนเซตของจำนวนเต็มบวก โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

วิธี... ...เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นเราสามารถเขียนสมาชิก... ...สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ครบทุกตัว หรือถ้าหากเขียนได้อาจจะยาวเกินไป ในกรณีนี้ให้ใช้ "..." จุดสามจุดช่วย

ดังนั้น $I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

โดยที่ "..." บอกให้ทราบว่า จำนวนเต็มบวกตัวอื่น ๆ อยู่ในเซตนี้ด้วย

ข้อสัง... ...ที่เราทราบว่าสมาชิกตัวต่อไปคืออะไรเท่านั้น เช่น เซตของ I^+ หรือในกรณีที่ละไว้ในฐานะเข้าใจ โดยรู้ว่าสมาชิกที่ละไว้คืออะไร เช่น เซตของเลขจำนวนนับ จาก 1 ถึง 100 สามารถเขียนเป็น

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$$

และใช้ "..." ... ...ทราบว่าสมาชิกตัวต่อไปคืออะไร

ตัวอย่างที่ 6 คะแนนผลการสอบปลายปีของนักศึกษาชั้นปีที่ 3 จำนวน 10 คน คือ

90, 80, 95, 80, 75, 60, 80, 70, 60, 100

จงเขียนเซตของคะแนนผลการสอบปลายปี

วิธีทำ ให้ A แทนเซตของคะแนนผลสอบปลายปีของนักศึกษาชั้นปีที่ 3

ดังนั้น $$A = \{60, 70, 75, 80, 90, 95, 100\}$$

ข้อสังเกต

(ก) ในกรณีที่สมาชิกซ้ำกัน เมื่อนำมาเขียนเป็นเซตให้เขียนสมาชิกที่ซ้ำกันเพียงตัวเดียวเท่านั้น (ดูจากตัวอย่างที่ 6) จะพบว่าคะแนนซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A มีซ้ำกัน 3 คน (80 ซ้ำกัน 3 คน) แต่เมื่อนำคะแนนมาเขียนในเซต A จะใช้ 80 เพียงตัวเดียวเท่านั้น

(ข) การเรียงสลับที่ของสมาชิกในเซตเดียวกัน ความหมายของเซตนั้น ยังคงเหมือนเดิม นั่นคือ

$$A = \{60, 70, 75, 80, 90, 95, 100\}$$

มีค่าเหมือนกับ

$$A = \{75, 60, 90, 95, 70, 80, 100\}$$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้

$$B = \{x|x \in I \text{ และ } 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$$

จงเขียนเซต B โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ พิจารณา $2x^2 + 5x - 3 = 0$ หาค่า x โดยวิธีแยกตัวประกอบจะได้

$$(x+3)(2x-1) = 0$$

ซึ่งจากนิยามในพีชคณิตเบื้องต้น

$$x+3 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 2x-1 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\frac{1}{2} \notin I$ เพราะฉะนั้น

$$B = \{-3\}$$

1.3 เซตว่าง (Empty or null sets)

นิยาม 1. เซตใด ๆ ซึ่งไม่มีสมาชิกอยู่ในเซตนั้นเลย หรือไม่สามารถแสดงสมาชิกในเซตได้ เรียกเซตในลักษณะนี้ว่า "เซตว่าง" สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตว่างคือ { } หรือ ϕ

ตัวอย่างเช่น เซต A, B ซึ่งเขียนโดยวิธีพรรณนาคุณสมบัติสมาชิก นั่นคือ

A = {x|x $\in$ N และ 3x = 5}

B = {x|x คืออายุของคนซึ่งมีอายุอย่างน้อย 500 ปี}

จากเซต A ไม่มีค่า x ค่าใดเลยที่เป็นสมาชิกของจำนวนนับ (N) และสอดคล้องตามสมการ 3x = 5 นั่นคือเซต A ไม่มีสมาชิกในเซต เราเรียกเซต A ว่า "เซตว่าง"

สำหรับเซต B ประกอบด้วยสมาชิก x ซึ่ง x คืออายุของคนซึ่งมีอายุอย่างน้อย 500 ปี ตามสภาพความเป็นจริงไม่มีมนุษย์คนไหนในโลกที่มีอายุถึง 500 ปี ดังนั้น เซต B ก็เป็น "เซตว่าง" เหมือนกัน

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่า เราสามารถแบ่งเซตเหล่านั้นออกเป็น 2 ลักษณะ โดยใช้จำนวนสมาชิกในเซตเหล่านั้นเป็นเกณฑ์ กล่าวคือ

นิยาม 2 เซตใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยจำนวนสมาชิกที่แน่นอน เรียกว่า "เซตจำกัด" (Finite sets)

ตัวอย่างเช่น O = {1, 3, 5, 7, 9}

A = {1, 2, 3,..., 98, 99, 100}

B = {-3}

นิยาม 3 เซตใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกจำนวนอนันต์ เรียกว่า "เซตอนันต์" (Infinite sets)

ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนนับ

N = {1, 2, 3,...}

หรือ เซตของจุดที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 2

ข้อสังเกต เซตว่างเป็นเซตนับได้

1.4 เซตย่อย (Subsets)

นิยาม 4 ให้ A และ B เป็นเซต A เป็นเซตย่อยของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกแต่ละตัวใน A เป็นสมาชิกของ B สัญลักษณ์ที่ใช้แทนความหมายของเซตย่อยคือ "$\subseteq$" ดังนั้นเมื่อ A เป็นเซตย่อยของ B สามารถเขียนแทนด้วย A $\subseteq$ B และสัญลักษณ์ $\subseteq$ ใช้แทนในความหมายว่าไม่เป็นเซตย่อย

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้

$$B = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

จงแสดงว่า เซตต่อไปนี้เซตใดเป็นเซตย่อยของเซต B และเซตใดไม่เป็นเซตย่อยของเซต B พร้อมทั้งให้เหตุผล

(ก) $\{x|x \in I$ และ $x^2-5x+4 = 0\}$

(ข) $\{7, 4, 3, 1, 5\}$

(ค) $\{x|x \in I$ และ $x^2 = 25\}$

วิธีทำ (ก) เขียนเซตโดยวิธีแจกแจงสมาชิก พิจารณา

$$x^2-5x+4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{หรือ} \quad x = 4$$

นั่นคือ จะได้เซตในข้อ (ก) เป็น $\{1, 4\}$

และ $\{1, 4\} \subseteq B$

เพราะว่าสมาชิก 1, 4 เป็นสมาชิกในเซต B ด้วย

(ข) $\{7, 4, 3, 1, 5\} \subseteq B$

เพราะว่าสมาชิก 7, 4, 3, 1, 5 เป็นสมาชิกในเซต B ด้วย

(ค) เขียนเซตโดยวิธีแจกแจงสมาชิก พิจารณา

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

นั่นคือ จะได้เซตข้อ (ค) เป็น $\{5, -5\}$

และ $\{5, -5\} \not\subseteq B$

เพราะว่า $-5 \in \{5, -5\}$ แต่ $-5 \notin B$

ตัวอย่างที่ 9 จงแสดงว่าเซต

$\{n|n \in I$ และ $n^2 = 9\}$

เป็นเซตย่อยของ I^+ หรือไม่

วิธีทำ โดยวิธีแจกแจงสมาชิกจะได้

$\{n|n \in I$ และ $n^2 = 9\} = \{-3, 3\}$

เพราะว่า $-3 \in I$ และ $(-3)^2 = 9$ แต่ $-3 \notin I^+$

เพราะฉะนั้น $\{3, -3\} \not\subseteq I^{+}$

ข้อสังเกต

(ก) เซตทุกเซตเป็นเซตย่อยของตัวมันเองด้วย นั่นคือ

$A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$

(ข) เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซต นั่นคือ

$\phi \subseteq A$, $\phi \subseteq B$, $\phi \subseteq C$

1.5 การเท่ากันของเซต (Sets equality)

นิยาม 5 ให้ A และ B เป็นเซต $A = B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวใน B เป็นสมาชิกของ A นั่นคือ ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ จะได้ว่า $A = B$

ตัวอย่างที่ 10 ให้

$A = \{1, -1\}$

$B = \{x | x \in I$ และ $x^2 - 1 = 0\}$

จงแสดงว่า $A = B$ หรือไม่พร้อมอธิบายเหตุผล

วิธีทำ เขียนเซต B โดยวิธีแจกแจงสมาชิก จะได้

$B = \{1, -1\}$

เนื่องจาก A และ B มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว ดังนั้น

$A = B$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้

$A = \{x | x^3 + 6x^2 + 9x = 0\}$

$B = \{x | x^2 + 3x = 0\}$

$C = \{-3, 0\}$

$D = \{-3, 0, 3\}$

จงหาว่าเซตใดบ้างที่เป็นเซตเท่ากัน

วิธีทำ เขียนเซต A โดยวิธีแจกแจงสมาชิก พิจารณา

$$x^3 + 6x^2 + 9x = 0$$

$$x(x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$x(x+3)(x+3) = 0$$

นั่นคือ $x = 0, -3, -3$

เพราะฉะนั้น $A = \{0, -3\}$

เขียนเซต B โดยวิธีแจกแจงสมาชิก พิจารณา

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0, -3$$

เพราะฉะนั้น $B = (0, -3\}$

ดังนั้น $A = B = C$

1.6 เซตเอกภพสัมพัทธ์ (Universal sets)

เมื่อเราดำเนินการเกี่ยวกับกลุ่มเฉพาะของเซต ให้เซตเหล่านี้เป็นเซตย่อยของเซต U ซึ่งครอบคลุมเซตเหล่านี้ทั้งหมด ตามปกติเซต U มักกำหนดเฉพาะเจาะจงลงไปแน่นอน เช่น $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ เป็นต้น และเรียกเซต U นี้ว่า "เซตเอกภพสัมพัทธ์" เมื่อนำเซต U ไปเขียนในแผนภาพเวนน์ จะแทนเซต U ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

1.7 การดำเนินการทางเซต (Operation on sets)

นิยาม 6 ให้ A และ B เป็นเซต A ผนวก (union) B คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของ A หรือสมาชิกของ B หรือของทั้งสองเซต สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตนี้คือ $A \cup B$

จากนิยาม $A \cup B$ สามารถเขียนเซตโดยวิธีพรรณนาสมาชิก นั่นคือ

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้

$$A = \{2, 4, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

และ $C = \{1, 2, 5, 8\}$

จงหาค่าของ $A \cup B$, $B \cup C$ และ $A \cup C$

วิธีทำ

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 7\} \cup \{1, 2, 5\}$$

$$= \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

$B \cup C = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 2, 5, 8\}$

$= \{1, 2, 5, 8\}$

$A \cup C = \{2, 4, 5, 7\} \cup \{1, 2, 5, 8\}$

$= \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

จงหาค่าของ

(ก) $A \cup B$

(ข) $A \cup C$

(ค) $B \cup C$

วิธีทำ

(ก) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

(ข) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(ค) $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

นิยาม 7. ให้ A และ B เป็นเซต การตัดกัน (intersection) ของ **A** และ **B** **คือเซตซึ่ง**ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการตัดกันของเซต **A** และ **B** คือ $A \cap B$

จากนิยาม $A \cap B$ สามารถเขียนเซตนี้ โดยวิธีพรรณนาคุณสมบัติสมาชิก **นั่น**คือ

$A \cap B = \{x | x \in A$ และ $x \in B\}$

ข้อสังเกต ถ้า $A \cap B = \phi$ กล่าวได้ว่า A และ B เป็นเซตไม่เกี่ยวเนื่องกัน (disjoint sets)

ตัวอย่างที่14 กำหนดให้

$A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$

$B = \{3, 4, 9\}$

$C = \{3, 5, 6, 9\}$

จงหาค่าของ

(ก) $A \cap B$

(ข) $B \cap C$

(ค) $A \cap C$

วิธีทำ เพราะว่า 4 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็นตัวร่วมของเซต A และ B เพราะฉะนั้น

(ก) $A \cap B = \{4\}$

โดยวิธีเดียวกันนี้ เพราะว่า 3 และ 9 เป็นสมาชิกซึ่งอยู่ทั้งในเซต B และ C ดังนั้น

(ข) $B \cap C = \{3, 9\}$

(ค) เพราะว่าเซต A และ C ไม่มีสมาชิกที่ร่วมกันเลย ดังนั้น

$$A \cap C = \phi$$

นั่นคือ เซต A และ C เป็นเซตไม่เกี่ยวเนื่องกัน

นิยาม 8 ให้ A และ B เป็นเซต เซตของผลต่างระหว่าง A กับ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

จากนิยามนี้ เขียนเซตผลต่าง A และ B โดยวิธีพรรณนาคุณสมบัติสมาชิก นั่นคือ

$$A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้

$$A = \{2, 4, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

$$C = \{1, 2, 5, 8\}$$

จงหาค่าของ

(ก) $B - A$

(ข) $A - C$

(ค) $B - C$

(ง) $C - B$

วิธีทำ

(ก) $B - A = \{1, 2, 5\} - \{2, 4, 5, 7\} = \{1\}$

(ข) $A - C = \{2, 4, 5, 7\} - \{1, 2, 5, 8\} = \{4, 7\}$

(ค) $B - C = \{1, 2, 5\} - \{1, 2, 5, 8\} = \phi$

(ง) $C - B = \{1, 2, 5, 8\} - \{1, 2, 5\} = \{8\}$

นิยาม 9 ให้ A เป็นเซตย่อยของเซตเอกภพสัมพัทธ์ U เซตเติมเต็ม (Complementary sets) ของ A คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกใน U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตเติมเต็มของ A คือ A′

จากนิยามนี้ ถ้าเขียนเซต A′ โดยพรรณนาคุณสมบัติของสมาชิก นั่นคือ

$$A' = \{x|x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้

U = {1, 2, 3,..., 10)

A = (1, 2, 5, 7, 8, 9)

B = {1, 2, 3 ,..., 8}

จงหาค่าของ

(ก) A′

(ข) B′

วิธีทำ สมาชิกซึ่งอยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A คือ A’

(tl) A’ = {3, 4, 6, 10)

และสมาชิกซึ่งอยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน B คือ B′

(ข) B’ = (9, 10)

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้เซต A, B และ C ตามตัวอย่างที 13 และ U = (1, 2, 3,..., 10} จงหาค่าของ

(ก) A’U B’

(ข) B’U B

(ค) C U B ’

วิธีทำ

(ก) A’U B’ = {1, 2, 3, 4, 5}′ u {1, 3 , 5, 7, 9}′

= {6, 7, 8, 9, 10) U {2, 4, 6, 8, 10}

= {2, 4, 6, 7, 8, 9, 10)

(ข) B’U B = { 1, 3, 5, 7, 9)’ U (1, 3, 5, 7, 9)

= {2, 4, 6, 8, 10) U {1, 3, 5, 7, 9)

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

= u

(ค) $C \cup B' = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}'$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\}$

1.8 การเขียนแผนภาพแทนเซต

นักคณิตศาสตร์อังกฤษชื่อ จอน เวนน์ (John Venn) และนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ เลโอนาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler) เป็นผู้ริเริ่มเขียนแผนภาพแทนเซต ดังนั้นจึงเรียกการเขียนแผนภาพแทนเซตว่า "แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์" (Venn-Euler diagram) ตามชื่อนักคณิตศาสตร์ทั้งสอง แต่ในหนังสือหลายเล่มเรียกแผนภาพนี้สั้น ๆ ว่า "แผนภาพของเวนน์ (Venn diagram)

แผนภาพของเวนน์เป็นวิธีแสดงความสัมพันธ์ของเซตด้วยภาพ เพื่อให้มองเห็นได้ชัดเจนและทำความเข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น โดยเวนน์กำหนดให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเซตเอกภพสัมพัทธ์ (Universal set) และวงกลมแทนเซตที่กำหนดให้

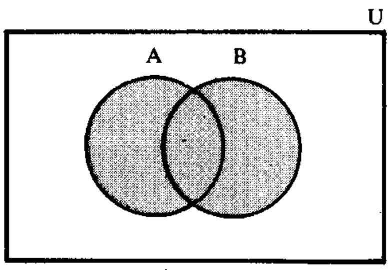
การแสดงแผนภาพเวนน์ใน 4 ลักษณะ

(ก) $A \cup B$ คือส่วนที่แลเงาตามรูปที่ 1.1

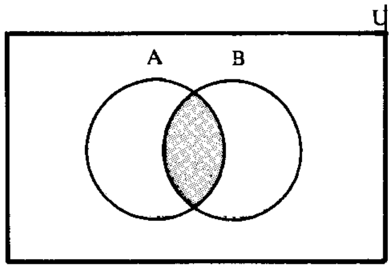
(ข) $A \cap B$ คือส่วนที่แลเงาตามรูปที่ 1.2

(ค) $A - B$ คือส่วนที่แลเงาตามรูปที่ 1.3

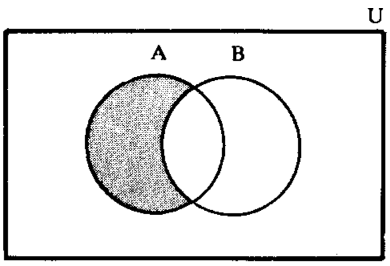
(ง) A' คือส่วนที่แลเงาตามรูป 1.4



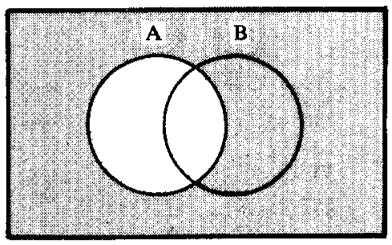
รูปที่ 1.1 $A \cup B$



รูปที่ 1.2 $A \cap B$



รูปที่ 1.3 A-B



รูปที่ 1.4 A'

จากแผนภาพของเวนน์พบว่า เขตแดนซึ่งเกิดจากการซ้อนกันของวงกลม สามารถแบ่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นบริเวณพื้นฐาน (basic region) 4 ส่วน ซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกัน (disjoin) คือ $A \cap B$, $A-B$, $B-A$ และ $(A \cup B)'$ จากแผนภาพจะเห็นได้ว่า

$$U = [A \cap B] + [A-B] + [B-A] + [(A \cup B)']$$

1.9 คุณสมบัติทั่วไปบางข้อของเซต (Some general property of sets)

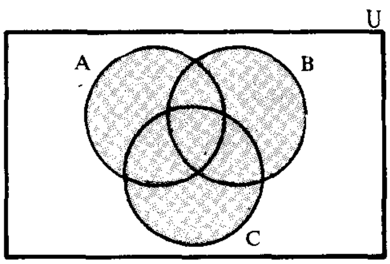
1. $A \cap A' = \phi$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap U = A$

การดำเนินการการผนวก (union) และการตัดกัน (intersection) ในทฤษฎีเซตเป็นไปตามกฎกเรเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) นั่นคือ

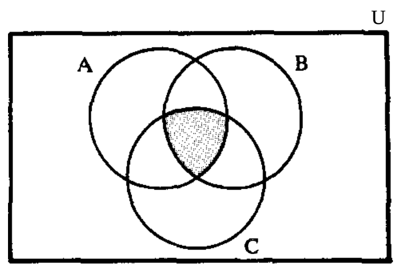
4. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ดูรูปที่ 1.5 และรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.5 $A \cup B \cup C$



รูปที่ 1.6 $A \cap B \cap C$

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้

$R = \{2, 3, 4, 5)$

$S = (3, 4, 6, 7)$

$T = \{4, 5, 7, 8)$

จงหาค่าของ

(ก) $R \cup S \cup T$

(V) $R \cap S \cap T$

วิธีทำ (ก) เพราะว่า

$R \cup S \cup T$ = $(R \cup S) \cup T$

$= [\{2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 6, 7\}] \cup \{4, 5, 7, 8\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 5, 7, 8\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(ข) เพราะว่า

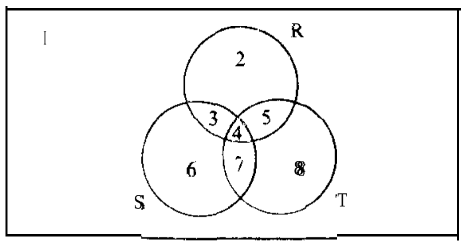
$R \cap S \cap T = (R \cap S) \cap T$

$= [\{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 6, 7\}] \cap \{4, 5, 7, 8\}$

$= \{3, 4\} \cap \{4, 5, 7, 8\}$

$= \{4\}$

ดูภาพประกอบ



รูปที่ 1.10

1.10 การดำเนินการแบบประสมของเซต (Combining set operation)

เมื่อนำเอาการผนวก (union) และการตัดกัน (intersection) ของเซตมาประสมกัน จะเกิดเซตใหม่ขึ้น

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้

$A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$

$C = \{5, 15, 25, 35, 45, 55\}$

จงหาค่าของ

(ก) $(A \cap B) \cup C$

(ข) $A \cup (B \cap C)$

วิธีทำ

$$(ก)\ (A\cap B)\cup C = \{10, 20, 30, 40, 50\} \cup \{5, 15, 25, 35, 45, 55\}$$

$$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55\}$$

$$(ข)\ A\cup(B\cap C) = A\cup\phi$$

$$= A$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการนำเอาความรู้เรื่องเซตไปใช้ประโยชน์

ตัวอย่างที่ 20 บริษัทขายปุ๋ยสนามหญ้าแห่งหนึ่งโฆษณาปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจีของเขาในนิตยสารรักบ้าน ต่อมาทางบริษัทได้สุ่มตัวอย่างด้วยการสัมภาษณ์ผู้ซื้อปุ๋ยจำนวน 100 ราย ผลการสัมภาษณ์ปรากฏว่า 25 รายใช้ปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจี 20 รายอ่านนิตยสารรักบ้าน และ 5 รายอ่านนิตยสารรักบ้านและซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจีด้วย

(ก) จงหาจำนวนผู้ไม่อ่านนิตยสารรักบ้าน

(ข) จงหาจำนวนผู้อ่านนิตยสารรักบ้านหรือซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจี

(ค) จงหาเศษส่วนของประชาชนเหล่านี้ ผู้ซึ่งอ่านนิตยสารรักบ้านและซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจี

(ง) อยากทราบว่าทางบริษัทสรุปว่าการโฆษณาในนิตยสารรักบ้าน ทำให้ยอดขายปุ๋ยเพิ่มขึ้นหรือไม่

วิธีทำ ก่อนหาคำตอบใด ๆ จากคำถามข้างต้นให้เขียนแผนภาพของเวนน์ เพื่อจัดระเบียบข้อมูลเข้าด้วยกัน เราจะนิยามเซต A และ B ดังนี้

A คือเซตของประชาชนผู้ซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจี

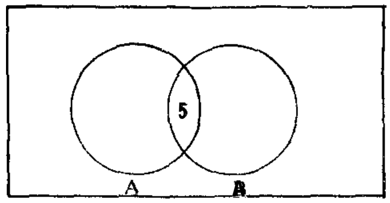
B คือเซตของประชาชนผู้อ่านนิตยสารรักบ้าน

ถ้า C คือเซต ให้ n(C) แทนจำนวนสมาชิกในเซต C ดังนั้น

$$n(A) = 25 \quad \text{และ} \quad n(B) = 20$$

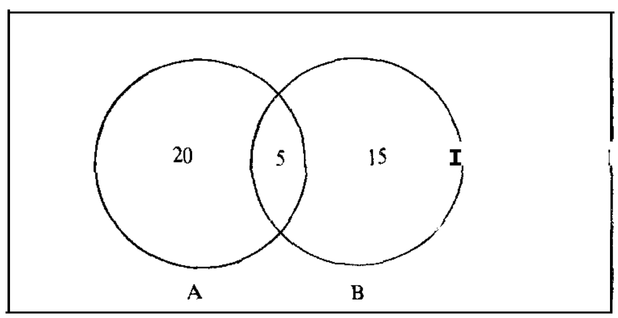
$$n(A\cap B) = 5 \quad \text{และ} \quad n(U) = 100$$

ขั้นแรกเรารู้แน่ชัดว่า จำนวนสมาชิกในบริเวณพื้นฐาน $A\cap B$ คือ 5 ดังนั้น แทนค่า 5 ลงในบริเวณนี้ตามรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11

ต่อไปพิจารณาเซต A คือ การรวมของสองเซตที่ไม่เกี่ยวเนื่องกัน คือ $A \cap B$ กับ $A-B$ เพราะว่าวงกลมซึ่งแทน A มีจำนวนสมาชิกเป็น 25 ราย และมีสมาชิก 5 รายอยู่ในส่วนหนึ่ง ดังนั้น จะมีสมาชิก 20 รายอยู่ในส่วนอื่น เพราะฉะนั้น $n(A-B) = 20$ โดยวิธีเดียวกันนี้ $n(B-A) = 20 - 5 = 15$ แทนค่าเหล่านี้ในรูปที่ 1.12



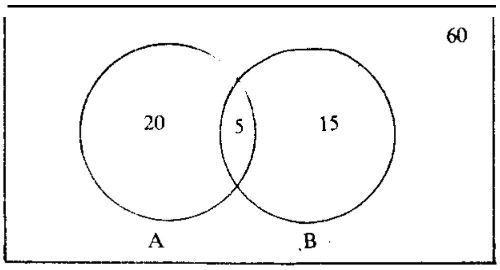
รูปที่ 1.12

เพราะว่า $n(U) = 100$ และ U คือ การผนวกของเซตซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกันของ $A \cap B$, $A-B$, $B-A$ และ $(A \cup B)'$ เพราะฉะนั้น

$$100 = n(U) = 20 + 5 + 15 + n(A \cup B)'$$

หรือ $n(A \cup B)' = 100 - 40 = 60$ ราย

แผนภาพของเวนน์ขั้นสุดท้ายปรากฏตามรูป 1.13



รูปที่ 1.13

ดังนั้นจะได้คำตอบเป็น

(ก) จำนวนผู้ไม่อ่านนิตยสารรักบ้าน $n(B)' = 60+20 = 80$ ราย

(ข) จำนวนผู้อ่านนิตยสารรักบ้านหรือซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจี

$= n(A \cup B) = 20+5+15 = 40$ ราย

(ค) เพราะว่าประชาชน 5 ราย จากผู้อ่านนิตยสารรักบ้าน 20 ราย ได้ซื้อปุ๋ยเขียวขจีด้วย เพราะฉะนั้นเศษส่วนของผู้ซื้อปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจีต่อผู้อ่านนิตยสารรักบ้านเป็น $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

(ง) เศษส่วนจากการสุ่มตัวอย่างของผู้ซื้อปุ๋ย 100 ราย ผู้ซื้อปุ๋ยเขียวขจีต่อผู้ซื้อปุ๋ย 100 รายเป็น $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ จากการสำรวจนี้ปรากฏว่าเศษส่วนไม่เปลี่ยนแปลง แสดงว่าการลงโฆษณาในนิตยสารรักบ้านไม่ทำให้ยอดขายปุ๋ยยี่ห้อเขียวขจีเพิ่มขึ้น

แบบฝึกหัด

1. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

(ก) $\{u|u \in I$ และ $u^2 = 16\}$

(ข) $\{u|u \in I$ และ $u > 4)$

(n) $\{p|p \in I^+$ และ $p < 12)$

(9) $\{v|v \in I^+$ และ $v^2-5v = 14j$

(9) $\{x|x \in I$ และ $(3x-2)(x-4)(x+3) = 0)$

(ฉ) $\{x|x \in I$ และ $2x^2-3x - 14 = 0\}$

2. ใช้วิธีพรรณนาคุณสมบัติสมาชิกของเซตต่อไปนี้

(ก) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ข) $(2, 4, 8, 16, 32 ,\ldots, 1024)$

(ค) $(1, 4, 9, 16 ,\ldots, 625\}$

(9) $(-7, -9, -11, -13 ,\ldots \}$

3. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ข้อความต่อไปนี้ข้อใดจริงและข้อใดเท็จ

(ก) $A = \{3, 5, 2, 6, 4, 1\}$

(ข) $A = \{n \in I$ และ $n < 7\}$

(ค) $2 \in A$

(ง) $\{2\} \in A$

(จ) $4 \subsetneq A$

(ฉ) $\phi \subsetneq A$

(ช) $\{x|x \in I$ และ $32 + 5x-2 = 0\} \subsetneq A$

(“a) $\{x|x \in I$ และ $x^2 = 5\} \subsetneq A$

4. กำหนดให้เซต

$A = (3, -4)$

$B = \{x|(x-3)(x+4) = 0\}$

$c = \{x|x^3 + x^2-12x = 0\}$

$D = \{0, -3, -4\}$

จงแสดงว่าเซตใดบ้างเป็นเซตเท่ากัน

5. กำหนดให้เซต

$A = \{0, 1, -1)$

$B = \{b|b^3-b = 0\}$

$c = \{1, 0, -1\}$

$D = \{d|-d+d^3 = 0\}$

จงแสดงว่าเซตใดบ้างเป็นเซตเท่ากัน

6. กำหนดให้เซต

$A = (-1, -3, -5, -7, -9)$

$B = (-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9)$

$C = (-2, -4, -6, -8)$

จงหา

(ก) A U B	(ข) $A \cap B$
(ค) A U C	(ง) $A \cap C$
(จ) B U C	(a) $B \cap C$

7. จากแบบฝึกหัดข้อ 6. ถ้ากำหนดให้ .

U = {x|x คือจำนวนเต็มลบซึ่งมากกว่า -12)

(ก) $A \cap A'$	(ข) $A' \cap B'$
(ค) B'UC	(9) $A \cap C'$
(8) B'UA	(a) $C' \cap A'$

8. กำหนดให้เซต

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5)$

$B = (-2, -4, 0, 2, 4\}$

$c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

จงหา

(ก) $A \cup (B \cup C)$	(ข) $A \cap (B \cap C)$
(ค) $(A \cap C)$ U B	(ง) $C \cap (A \cup B)$

9. ผลต่างสมมาตร (Symmetric difference) $A \Delta B$ ระหว่างสองเซต A และ B นิยามโดยสูตร

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

จงคำนวณหาค่า $A \Delta B$ ถ้า

(ก) $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 7\}$

(ข) $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ และ $B = \{2, 5\}$

(ค) $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ และ $B = \{3, 6, 9\}$

(ง) $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ และ $B = \{x | x \in I^+$ และ $x^2 \in A\}$

10. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยของเซตเอกภพสัมพัทธ์ U และ $n(U) = 100$ จงหาจำนวนสมาชิกในแต่ละส่วนของ 4 บริเวณพื้นฐาน (basic regions) ของแผนภาพเวนน์ สำหรับเซต ถ้า

(ก) $n(A) = 40$,	$n(B) = 70$	และ $n(A \cap B) = 20$
(ข) $n(A) = 30$,	$n(B) = 60$	และ $n(A \cup B) = 85$
(ค) $n(A) = 35$,	$n(A \cap B) = 5$,	และ $n(A \cup B)' = 32$
(ง) $n(B-A) = 20$,	$n(B) = 30$	และ $n(A \cup B)' = 47$

11. จากการสำรวจสตรีที่ทำงาน ซึ่งมีอายุเกิน 30 ปี จำนวน 200 คน ปรากฏออกมาว่า 60 คนจบการศึกษาระดับวิทยาลัย 80 คน มีรายได้เกิน 200,000 บาทต่อปี และ 30 คน จบการศึกษาระดับวิทยาลัยและมีรายได้เกินกว่า 200,000 บาทต่อปี จงเขียนแผนภาพเวนน์เพื่อตอบคำถามเหล่านี้

(ก) สตรีจำนวนเท่าใดที่ไม่ได้จบการศึกษาระดับวิทยาลัยและมีรายได้น้อยกว่า 200,000 บาท ต่อปี

(ข) เศษส่วนของสตรีซึ่งจบการศึกษาระดับวิทยาลัยและมีรายได้เกิน 200,000 บาทต่อปี เป็นเท่าใด

(ค) จากการสำรวจแสดงว่าการจบการศึกษาระดับวิทยาลัยจะทำให้รายได้ของสตรีสูงขึ้นได้หรือไม่

12. จากการสำรวจประชาชน 1,000 คนที่มีอายุเกิน 40 ปี ปรากฏออกมาว่า 312 คน สูบบุหรี่ 80 คนเป็นมะเร็ง และ 660 คน ไม่สูบบุหรี่และไม่เป็นโรคมะเร็ง จงเขียนแผนภาพเวนน์เพื่อตอบคำถามเหล่านี้

(ก) จำนวนประชาชนที่สำรวจซึ่งสูบบุหรี่และเป็นโรคมะเร็งด้วย

(ข) เศษส่วนของคนสูบบุหรี่กับคนเป็นโรคมะเร็งเป็นเท่าใด

(ค) การสำรวจนี้แสดงว่าการสูบบุหรี่จะเป็นสาเหตุให้เกิดโรคมะเร็ง ได้หรือไม่

ตรรกศาสตร์ (Logic)

วิธีการใช้เหตุผลหรือตรรกวิทยา ผู้ที่เริ่มต้นใช้เป็นคนแรกคืออริสโตเติล (Aristotle) และได้พัฒนามาเรื่อย ๆ จนกระทั่งปัจจุบันนี้ วิชาตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ อย่างมากมาย

1.11 ประพจน์ (proposition)

พิจารณาประโยคต่อไปนี้

(1) ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันตก

(2) กรุงเทพฯ ไม่ใช่เมืองหลวงของประเทศไทย

(3) $4+3 = 2+5$

จะเห็นว่าแต่ละข้อความข้างบนเป็นประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่บอกได้อย่างแน่นอนว่าจริง (true) หรือเท็จ (false) ซึ่งจากตัวอย่างจะได้ว่า (1) เป็นประโยคบอกเล่าที่เป็นเท็จ (2) เป็นประโยคปฏิเสธที่เป็นเท็จ และ (3) เป็นประโยคบอกเล่าที่เป็นจริง

ประโยคที่ทราบค่าความจริง (truth value) ว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังตัวอย่าง (1) (2) และ (3) เรียกว่าประพจน์ (propositions)

ตัวอย่างอื่น ๆ ของประพจน์เช่น

(1) แบร์นูลลีเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์

(2) $2+3 > 1+7$

(3) สมชายสอนคณิตศาสตร์

(4) ขาวผ่องได้เหรียญทองโอลิมปิค

(5) รามคำแหงมีนักศึกษาชายมากกว่านักศึกษาหญิง

(6) $3+7 = 21$

เป็นต้น

สรุปได้ว่าประพจน์คือข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริง หรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นทั้งจริงและเท็จ หรือไม่จริงและไม่เท็จไม่ได้ ส่วนประโยคที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งได้แก่ประโยคคำสั่ง ประโยคคำถาม ประโยคอุทาน ตลอดจนข้อความที่เป็นเพียงวลี เราไม่นับเป็นประพจน์ ตัวอย่างเช่น

(1) จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

(2) ทำไม 1 ไม่เท่ากับ 2

(3) โอ้ย! คุณทำผมเจ็บ

(4) ยินดีต้อนรับเพื่อนใหม่

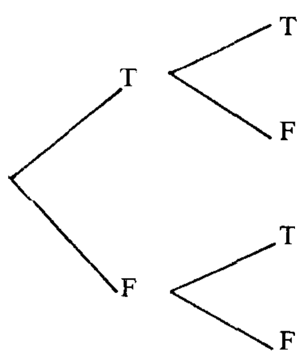
นอกจากนี้ยังมีประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธแบบหนึ่งที่ไม่เป็นประพจน์ ได้แก่ประโยคที่มีตัวแปร (variable) ซึ่งอาจเป็นตัวไม่ทราบค่าทางคณิตศาสตร์ x, y, z,... หรือตัวแปรในภาษาไทย เช่น เขา, เธอ, คุณ... ซึ่งประโยคที่ประกอบด้วยตัวแปรเหล่านี้เราไม่ถือว่าเป็นประพจน์ เช่น

(1) $x^2 = 4$

(2) เขาเป็นนักกีฬา

1.12 ค่าความจริง (truth value)

ประพจน์มีค่าความจริง 2 แบบ เท่านั้นคือจริง หรือเท็จ เพื่อสะดวกในการเขียนเราจะใช้ T แทน "จริง" และ F แทน "เท็จ" ประพจน์ที่ยังไม่กำหนดเนื้อความโดยมากใช้ตัวอักษร p, q, r,... แทนประพจน์ซึ่งยังไม่ทราบค่าความจริงแน่ชัดว่าจริงหรือเท็จ ซึ่งสำหรับประพจน์เดียวกรณีที่เป็นไปได้มี 2 กรณีคือ T หรือ F เท่านั้น แต่เมื่อพิจารณาประพจน์ 2 ประพจน์พร้อมกัน กรณีที่เป็นไปได้จะมี $2^2 = 4$ กรณี ดังแผนภาพต่อไปนี้



ประพจน์ที่ 1	ประพจน์ที่ 2
T	T
T	F
F	T
F	F

เมื่อพิจารณา 3 ประพจน์ จะมี $2^3 = 8$ กรณี

ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไปในการพิจารณาประพจน์ n ประพจน์ จะมีกรณีที่เป็นไปได้ 2^n กรณี

1.13 **การเชื่อมประพจน์** (connection of proposition)

ในการศึกษาประพจน์บางครั้งเราต้องการค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นตรงกันข้าม บางครั้งเราก็ต้องการทราบค่าความจริงของประพจน์ใหม่ที่เกิดจากการนำประพจน์ที่กำหนดให้มาใช้คำเชื่อม 4 แบบ คือคำ และ หรือ ถ้า...แล้ว ก็ต่อเมื่อ ซึ่งจะได้แยกกล่าวรายละเอียดดังต่อไปนี้

(1) นิเสธ (negation)

กำหนดประพจน์ p

นิเสธของ p แทนด้วยสัญลักษณ์ ~p ใช้ในความหมาย **ไม่จริงที่ว่า**... หรือ **ไม่**... สำหรับค่าความจริงของ ~p จะได้ดังนี้

ถ้า p เป็น T แล้ว ~p เป็น F

ถ้า p เป็น F แล้ว ~p เป็น T

เขียนเป็นตารางได้ดังนี้

p	~p
T	F
F	T

(2) และ (conjunction)

กำหนดประพจน์ p , q

ประโยค p **และ** q แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ตัวอย่างเช่น

15 เป็นจำนวนนับ

15 มากกว่า 10

เมื่อเชื่อมประโยคทั้งสองด้วย **และ** แล้วจะได้ประโยคใหม่คือ

15 เป็นจำนวนนับ และมากกว่า 10

สำหรับค่าความจริงของ $p \wedge q$ สรุปได้ดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \wedge q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \wedge q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \wedge q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \wedge q$ เป็น F

ซึ่งเขียนเป็นตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

สรุปได้ว่า $p \wedge q$ เป็นจริงกรณีเดียวเท่านั้น คือ ทั้งคู่ต้องเป็นจริง นอกจากนั้นเป็นเท็จทั้งหมด

(3) หรือ (disjunction)

กำหนดประพจน์ p, q

ประโยค p **หรือ** q แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ตัวอย่างเช่น

กรุงเทพฯ เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

เชียงใหม่เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

เมื่อเชื่อมประโยคทั้งสองด้วย **หรือ** แล้วจะได้ประโยคใหม่คือ

กรุงเทพฯ หรือ เชียงใหม่ เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

สำหรับค่าความจริงของ $p \vee q$ สรุปได้ดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \vee q$ เป็น F

ซึ่งเขียนเป็นตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

สรุปได้ว่า $p \vee q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ ทั้งคู่เป็นเท็จ นอกจากนั้นเป็นจริงทั้งสิ้น

(4) **ถ้า...แล้ว** (implication)

กำหนดประพจน์ p, q

ประโยค **ถ้า** p **แล้ว** q แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \Rightarrow q$ ตัวอย่างเช่น

2 เป็นจำนวนเต็ม

$\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง

เมื่อเชื่อมด้วย ถ้า...แล้ว จะได้ประโยคใหม่คือ

ถ้า 2 เป็นจำนวนเต็มแล้ว $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง

สำหรับค่าความจริงของ $p \Rightarrow q$ สรุปได้ดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

ซึ่งเขียนเป็นตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

สรุปจะเห็นได้ว่าประโยค $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือประพจน์หน้าเป็นจริง และประพจน์หลังเป็นเท็จ

(5) ...**ก็ต่อเมื่อ**... (equivalence)

กำหนดประพจน์ p, q

ประโยค p **ก็ต่อเมื่อ** q แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \Leftrightarrow q$ ตัวอย่างเช่น

วันนี้แดงไปดูหนัง

วันนี้ฝนไม่ตก

เมื่อเชื่อมประโยคทั้งสองด้วย “ก็ต่อเมื่อ” จะได้ประโยคใหม่คือ

วันนี้แดงไปดูหนังก็ต่อเมื่อวันนี้ฝนไม่ตก

สำหรับค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ สรุปได้ดังนี้

ถ้า p เป็น T　q เป็น T　จะได้ $p \leftrightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T　q เป็น F　จะได้ $p \leftrightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F　q เป็น T　จะได้ $p \leftrightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F　q เป็น F　จะได้ $p \leftrightarrow q$ เป็น T

ซึ่งนำมาเขียนตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

จะสรุปได้ว่าประพจน์ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อทั้งคู่มีค่าความจริงเหมือนกันคือ TT หรือ FF นอกนั้นเป็นเท็จทุกกรณี

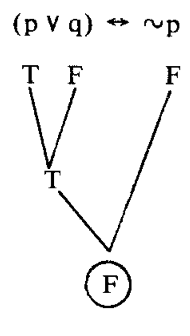
1.14 การหาค่าความจริงของประพจน์

เมื่อกำหนดค่าความจริงของแต่ละประพจน์มาทำให้เราสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมกันได้ โดยอาศัยค่าความจริงจากตารางที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดค่าความจริงของ p, q เป็น T และ F ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$(p \vee q) \leftrightarrow \sim p$$

วิธีทำ เขียนแผนภาพหาค่าความจริงได้ดังนี้



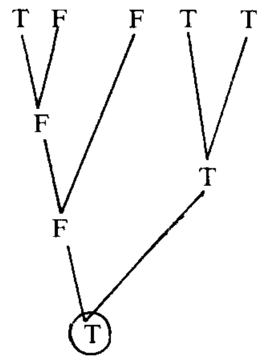
ดังนั้นค่าความจริงของประพจน์เป็น **เท็จ**

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดค่าความจริงของ p, q, r เป็น T, F และ T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$[p \wedge q) \vee \sim r] \rightarrow p \vee \sim q$$

วิธีทำ เขียนแผนภาพหาค่าความจริงได้ดังนี้

$(p \wedge q) \vee \sim r \rightarrow p \vee \sim q$



ดังนั้นค่าความจริงของประพจน์เป็น **จริง**

แต่บางครั้งกำหนด p, q, r ในรูปของข้อความซึ่งเราจะต้องหาค่าความจริงเสียก่อนที่จะหาค่าความจริงของประพจน์ที่โจทย์ต้องการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 23 กำหนดให้ p แทน กรุงเทพฯ เป็นเมืองหลวงของไทย

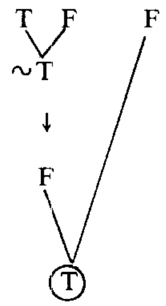
q แทน เชียงใหม่อยู่ภาคใต้ของไทย

r แทน $2 > \sqrt{7}$

จงหาค่าความจริงของ $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

วิธีทำ ก่อนอื่นหาค่าความจริงของ p, q, r ได้ดังนี้คือ p เป็น T, q เป็น F และ r เป็น F หาค่าความจริงได้จากแผนภาพ

$\sim(p \vee q) \rightarrow r$



จะได้ว่าค่าความจริงของประพจน์คือจริง

นอกจากที่กล่าวมาแล้วบางครั้งในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าความจริงของประพจน์ ใช้ค่าความจริงจากประพจน์ที่กำหนดให้มาได้ เช่น กำหนด $p \wedge q$ เป็นจริง แสดงว่าจะได้ p เป็น T และ q เป็น T หรือกำหนด $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ แสดงว่าจะได้ p เป็น T และ q เป็น F แต่ถ้ากำหนด $p \wedge q$ เป็นเท็จ เราสรุปค่าความจริงของ p และ q ไม่ได้

พิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

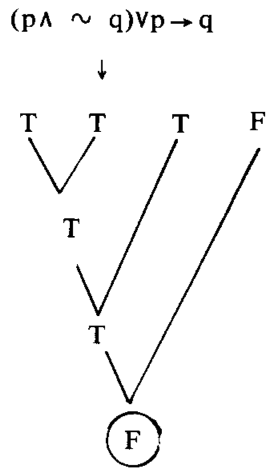
ตัวอย่างที่ 24 กำหนดให้ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$[(p \wedge \sim q) \vee p] \rightarrow q$$

วิธีทำ จาก $p \rightarrow q$ เป็น F

จะได้ p เป็น T และ q เป็น F

ดังนั้นนำมาเขียนแผนภาพจะได้ดังนี้



สรุปได้ว่าค่าความจริงของประพจน์เป็นเท็จ

1.15 การสร้างตารางค่าความจริง

ในกรณีที่ประพจน์ไม่ได้กำหนดชัดว่าค่าความจริงเป็น T หรือ F ดังนั้นการเชื่อมประพจน์ ก็ทำให้เกิดกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งกรณีเหล่านี้เราจะนำมาเขียนเป็นตาราง เรียกว่าตารางค่าความจริง (truth table) โดยที่จำนวนกรณีขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์

จากเรื่องค่าความจริงเราได้ว่าถ้าจำนวนประพจน์มี n ประพจน์ แล้วจำนวนกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีเท่ากับ 2^n กรณี

ดังนั้นในการสร้างตารางค่าความจริงต้องเริ่มต้นด้วยค่าความจริงทุกกรณีของประพจน์ที่กำหนดให้ที่เป็นไปได้ และหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมจากกลุ่มย่อยไปสู่กลุ่มใหญ่ โดยอาศัยค่าความจริงจากตอนที่แล้ว

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 25 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $p \wedge \sim q$

วิธีทำ

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

การหาค่าความจริงของ $p \wedge \sim q$ ได้จากค่าความจริงในช่องที่ 1 กับช่องที่ 3 โดยเชื่อมด้วย "และ"

ตัวอย่างที่ 26 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

วิธีทำ มีได้ 4 กรณีดังนี้

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T

จากตารางข้างบนได้ข้อสรุปว่าเมื่อ p, q มีเครื่องหมายเหมือนกัน คือ TT หรือ FF แล้วค่าความจริงของ $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ เป็น T นอกจากนั้นเป็น F

ตัวอย่างที่ 27 จงสร้างตารางค่าความจริง

$$\sim(p \vee \sim r) \rightarrow (q \vee \sim p)$$

วิธีทำ มีได้ 8 กรณีดังนี้

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$\sim(p \vee \sim r)$	$(q \vee \sim p)$	$\sim(p \vee \sim r) \rightarrow (q \vee \sim p)$
T	T	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T

1.16 ประพจน์ที่สมมูลกัน

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ แล้วถ้าค่าความจริงของทั้งสองประพจน์เหมือนกัน แล้วจะเรียกประพจน์ทั้งสองว่าเป็นประพจน์ที่สมมูลกัน ดังตัวอย่างเช่น $\sim(p \wedge q)$ มีค่าความจริงเหมือนกับ $\sim p \vee \sim q$ ดังตารางต่อไปนี้

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
					1	= 2

จะได้ว่าประพจน์ $\sim(p \wedge q)$ และ $\sim p \vee \sim q$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกัน ทั้งนี้ก็เพราะว่าค่าความจริงของทั้งสองประพจน์เหมือนกันทุก ๆ กรณี

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกันได้แก่

p	และ	$\sim(\sim p)$
$\sim(p \wedge q)$	และ	$\sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q)$	และ	$\sim p \wedge \sim q$
$p \wedge q$	และ	$q \wedge p$
$p \vee q$	และ	$q \vee p$

นอกจากนี้เราได้ข้อสรุปอย่างหนึ่งสำหรับประพจน์ที่สมมูลกันคือประพจน์ที่สมมูลกันใช้แทนกันได้

1.17 สัจนิรันดร์และความขัดแย้งกัน (tautology and contradiction)

ประพจน์ที่ได้จากการสร้างตารางเราพบว่าบางประพจน์ก็มีค่าความจริงเป็นทั้ง T และ F แล้วแต่กรณี แต่บางประพจน์มีค่าความจริงเป็น T ทุกกรณี และบางประพจน์มีค่าความจริงเป็น F ทุกกรณี

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (T) ทุกกรณีเรียกว่าสัจนิรันดร์ (tautology) และประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ทุกกรณีเรียกว่า ความขัดแย้งกัน (contradiction)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 28 จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือความขัดแย้งกันหรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง

(1) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(2) $\sim[p \rightarrow (p \vee q)]$

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงจะได้

(1)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ประพจน์ที่กำหนดให้เป็นสัจนิรันดร์ (tautology)

(2)

p	q	p ∨ q	p → (p ∨ q)	~[p → (p ∨ q)]
T	T	T	T	F
T	F	T	T	F
F	T	T	T	F
F	F	F	T	F

ประพจน์ที่กำหนดให้เป็นความขัดแย้งกัน (contradiction)

1.18 ตัวแปรและข้อความที่ใช้ตัวแปร

1. ตัวแปร และประโยคเปิด

ในเรื่องประพจน์ได้เคยกล่าวถึงประโยคแบบหนึ่งที่ไม่เป็นประพจน์ เพราะประโยคแบบนั้นมีตัวแปรซึ่งอาจเป็นตัวแปรทางคณิตศาสตร์ x, y, z,... หรือตัวแปรทางภาษา เช่น เขา, คุณ, เธอ,... เป็นต้น เราจะเรียกประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปรเหล่านี้ว่าประโยคเปิด ตัวอย่างประโยคเปิดเช่น

เขาเป็นนักกีฬา

เธอได้คะแนน MA 103 สูงสุด

$x+2 = 6$

ถ้า $x = 2$ แล้ว $x+y = 4$

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจะเห็นว่าประโยคข้างบนไม่เป็นประพจน์ เพราะว่าไม่ทราบค่าความจริงว่าเป็นจริงหรือเท็จ แต่ถ้าเราแทนตัวแปรด้วยสิ่งที่เราทราบค่า จะทำให้เป็นประพจน์ได้ ตัวอย่างเช่นประโยคเปิด $x+2 = 6$ ถ้าแทน x ด้วย 2 จะได้ว่าประโยคนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ แต่ถ้าแทน x ด้วย 4 จะได้ว่าค่าความจริงของประโยคนั้นเป็นจริง เป็นต้น

2. วลีบอกปริมาณ (quantifier)

เราทราบมาแล้วว่าประโยคเปิดสามารถทำให้เป็นประพจน์ได้โดยการแทนด้วยสิ่งที่เราทราบค่า แต่การทำประโยคเปิดให้เป็นประพจน์นอกจากการแทนด้วยสิ่งที่เราทราบค่าแล้วยังทำได้อีกแบบหนึ่งโดยการเติมวลีบอกปริมาณไว้หน้าประโยคเปิดซึ่งวลีบอกปริมาณมีอยู่ 2 แบบ คือ (1) สำหรับบางสิ่ง (for some)

(2) สำหรับทุกสิ่ง (for all)

หมายเหตุ สำหรับ x บางสิ่ง แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\exists x$ และสำหรับ x ทุกสิ่งแทนด้วย $\forall x$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 29 กำหนดประโยคเปิด $x^2 = 4$

จะเห็นว่าถ้าเราเติมวลีบอกปริมาณ "สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว" ไว้หน้าประโยค จะได้ว่า

"สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x^2 = 4$"

จะเห็นว่าประโยคนี้เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **เท็จ** แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเราเติมวลีบอกปริมาณ "สำหรับจำนวนจริง x บางตัว" ไว้หน้าประโยคจะได้ประโยค

"สำหรับจำนวนจริง x บางตัว $x^2 = 4$"

ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง

ในการเขียนวลีบอกปริมาณประกอบกับประโยคเปิดที่มีตัวแปร โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ประโยคเปิดที่มีตัวแปร มักจะเขียนแทนด้วย $P(x)$, $Q(x)$,... ในกรณีที่ตัวแปรตัวเดียว หรือ $P(x, y)$, $Q(x, y)$,... ในกรณีที่มีตัวแปร 2 ตัว ดังนั้นเมื่อประกอบด้วยวลีบอกปริมาณ จะได้ดังนี้

สำหรับ 1 ตัวแปรจะได้ 2 แบบ คือ

(1) $\exists x\, P(x)$

(2) $\forall x\, P(x)$

ส่วนกรณี 2 ตัวแปรหรือมากกว่า เราก็เขียนได้เช่นกัน เช่น $\exists x \forall y\, P(x, y)$, $\forall x \forall y\, P(x, y)$,... เป็นต้น แต่ในที่นี้เราจะกล่าวเฉพาะวลีบอกปริมาณของประโยคเปิดที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 30 จงเขียนประโยคต่อไปนี้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

(1) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x + 5 = 5 + x$

(2) สำหรับจำนวนจริง x บางตัว $x + 4 = 11$

(3) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x + (-x) = 0$

(4) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว x เป็นเลขคู่แล้ว x^2 เป็นเลขคู่

วิธีทำ (1) $\forall x[x + 5 = 5 + x]$

(2) $\exists x[x + 4 = 11]$

(3) $\forall x[x + (-x) = 0]$

(4) $\forall x$[x เป็นเลขคู่ $\rightarrow x^2$ เป็นเลขคู่]

3. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณ

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณจะขึ้นอยู่กับเอกภพสัมพัทธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งเราจะแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์นั้นแล้วพิจารณาว่าจริงทุกตัว หรือจริงบางตัวหรือไม่จริงเลย ซึ่งจะสรุปค่าความจริงได้ดังนี้

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U

(1) $\forall x P(x)$ เป็น **จริง** ก็ต่อเมื่อ จริงสำหรับทุก ๆ x ใน U

(2) $\forall x P(x)$ เป็น **เท็จ** ก็ต่อเมื่อ มี x บางตัวใน U ทำให้ P(x) มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**

(3) $\exists x P(x)$ เป็น **จริง** ก็ต่อเมื่อ มี x บางตัวใน U ที่ทำให้ P(x) มีค่าความจริงเป็น **จริง**

(4) $\exists x P(x)$ เป็น **เท็จ** ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ x ใน U ทำให้ P(x) มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**

ตัวอย่างที่ 31 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{3, 4, 5\}$

จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $\forall x(x+3 \leqslant 7)$

วิธีทำ แทน $x = 3$ ได้ $3+3 \leqslant 7$ เป็นจริง

แทน $x = 4$ ได้ $4+3 \leqslant 7$ เป็นจริง

แทน $x = 5$ ได้ $5+3 \leqslant 8$ เป็นเท็จ

ดังนั้นประโยค $\forall x(x+3 \leqslant 7)$ สำหรับเอกภพสัมพัทธ์ U มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แต่ถ้ากำหนด $U = \{2, 3, 4\}$ จะได้ว่าประโยค $\forall x(x+3 \leqslant 7)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 32 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{4, 5, 6\}$

จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x[\sim(x+3 \leqslant 7)]$

วิธีทำ แทน $x = 4$ จะได้ $\sim(4+3 \leqslant 7)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แทน $x = 5$ จะได้ $\sim(5+3 \leqslant 7)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แทน $x = 6$ จะได้ $\sim(6+3 \leqslant 7)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้นประโยค $\exists x[\sim(x+3 \leqslant 7)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงสำหรับ $U = \{4, 5, 6\}$

แบบฝึกหัด

1. จงบอกว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์ ประโยคเปิด หรือไม่เป็นประพจน์ และประโยคเปิด

   (ก) เชียงใหม่อยู่ใต้กรุงเทพฯ

   (ข) $2+3 = 7$

   (ค) เธอเป็นนักฟุตบอล

   (ง) $x+3 = 7$

   (จ) อุ้ย! ขอโทษ

   (ฉ) ปลาฉลามอยู่ในทะเล

   (ช) จงไปปิดหน้าต่าง

   (ซ) ถ้า $2+1 = 7$ แล้ว $3-5 = 0$

   (ฌ) มะม่วงมีรสเปรี้ยว

   (ญ) รามคำแหงเป็นมหาวิทยาลัยเปิด

   (ฎ) สวัสดีนักศึกษาทุกคน

   (ฏ) 7 มากกว่า 3 หรือไม่

   (ฐ) 11 เป็นเลขจำนวนเต็มคี่

   (ฑ) ห้ามเดินลัดสนาม

   (ฒ) $x+y = y+x$

2. ในกรณีที่ประพจน์มี 4 ประพจน์ จงหากรณีต่าง ๆ ของค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้โดยเขียนเป็นตาราง

3. กำหนดค่าความจริงของประพจน์ p, q คือ T และ F จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   (ก) $\sim(p \wedge \sim p)$

   (ข) $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

   (ค) $p \rightarrow \sim q$

   (ง) $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$

   (จ) $\sim[p \leftrightarrow (p \wedge \sim q)]$

4. กำหนดค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r คือ F, F และ T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

(ก) $(p \wedge q) \rightarrow r$

(ข) $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$

(ค) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$

(ง) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow \sim r]$

(จ) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \sim r)$

5. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

(ก) $(p \wedge q) \wedge \sim p$

(ข) $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

(ค) $\sim(\sim p \wedge q) \vee r$

(ง) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$

(จ) $p \rightarrow (\sim p \wedge q)$

(ฉ) $\sim(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$

(ช) $(p \wedge q) \rightarrow \sim p$

(ซ) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \sim q)$

(ฌ) $p \rightarrow \sim(q \wedge r)$

(ญ) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$

6. จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ (tautology) หรือเป็นความขัดแย้งกัน (contradiction) หรือไม่เป็นทั้ง 2 อย่าง

(ก) $\sim(p \wedge \sim p)$

(ข) $\sim(p \vee \sim p)$

(ค) $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

(ง) $p \rightarrow p \vee q$

(จ) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)]$

(ฉ) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \wedge p)$

(ช) $p \wedge q \rightarrow q$

(ซ) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

(ฌ) $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim(p \rightarrow q)$

(ฌ) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow \sim r]$

7. ประพจน์คู่ใดในข้อต่อไปนี้ที่สมมูล (equivalent) กัน

(ก) $\sim(p \vee q)$ กับ $\sim p \wedge \sim q$

(ข) $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \vee q$

(ค) $(p \vee q) \vee r$ กับ $p \vee (q \vee r)$

(ง) $p \wedge (q \vee r)$ กับ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(จ) $p \rightarrow q$ กับ $\sim q \rightarrow \sim p$

8. จงทำประโยคต่อไปนี้ให้เป็นประพจน์ และบอกค่าความจริงด้วย (โดยการใช้วลีบอกปริมาณ)

(ก) $x+2 = 3$

(ข) $x+5 = 5+x$

(ค) $x+(-x) = 0$

(ง) $x^2 \geqslant 0$

(จ) x เป็นเลขคู่ $\rightarrow$ $x+1$ เป็นเลขคี่

9. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

(ก) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

(ข) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

(ค) $\forall x \sim P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

(ง) $\sim[\forall x P(x)] \rightarrow \exists x P(x)$

10. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น

1. $\{1, 2, 3\}$ 2. $\{2, 3, 4\}$

(ก) $\forall x(x+2 \leqslant 5)$

(ข) $\exists x(x+2 \leqslant 5)$

(ค) $\forall x[\sim(x+2 \leqslant 5)]$

(ง) $\exists x(x+2 \geqslant 5)$

(จ) $\forall x(x+2 \geqslant 5)$

(ฉ) $\sim\forall x(x+2 \geqslant 5)$

(ช) $\sim\exists x(x+2 \leqslant 5)$

(ซ) $\exists x[\sim(x+2 \geqslant 5)]$