บทที่ 3 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ
(Net single premium)

3.1 บทนำ (Introduction)

3.2 ข้อสมมติมูลฐาน (Basic assumption)

3.3 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตอยู่รอด (Net single premium in case of survivorship)

3.4 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิต (Net single premium in case of death)

3.5 การประกันชีวิตแบบทุนประกันแปรผันได้ (Variable annuity and insurance)

3.6 ข้อสังเกตเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์

3.7 แบบทดสอบบทที่ 3

บทที่ 3
เบี้ยประกันชีวิตสุทธิเชิงเดี่ยว
(Net single premium)

3.1 บทนำ (Introduction)

เราได้เรียนรู้การคำนวณอัตราดอกเบี้ยและความน่าจะเป็นของการดำรงชีพจากบทที่ 1 และ 2 มาแล้ว ซึ่งเป็นปัจจัยหลักของการคำนวณเบี้ยประกันชีวิตต่อไป

เบี้ยประกันชีวิต เป็นจำนวนเงินที่ผู้เอาประกันชีวิตตกลงชำระแก่บริษัทประกันภัยตามข้อตกลงในสัญญาประกันชีวิตแต่ละแบบกรมธรรม์ การชำระเบี้ยประกันชีวิตอาจจะชำระได้ 2 วิธี คือ

1. แบบเชิงเดี่ยว (Single premium) ซึ่งเป็นการชำระเบี้ยประกันชีวิตครั้งเดียว ณ วันที่ออกกรมธรรม์ และผู้เอาประกันชีวิตไม่ต้องชำระเบี้ยประกันอีก เพียงแต่รอรับผลประโยชน์ตามกรมธรรม์เท่านั้น

2. แบบระดับ (Level premium) ซึ่งเป็นการชำระเบี้ยประกันชีวิตหลายครั้ง แต่ละครั้งมักจะมีจำนวนเท่ากัน และจะต้องชำระงวดแรก ณ วันที่ออกกรมธรรม์ อาจจะชำระปีละครั้งหรือสามเดือนต่อครั้ง หรือหกเดือนต่อครั้งแล้วแต่ผู้เอาประกันชีวิตจะเลือกการชำระแบบใดตามที่บริษัทประกันภัยกำหนดมาให้ การชำระเบี้ยประกันชีวิตแบบนี้บางทีก็เรียกว่า การชำระรายงวด

การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตมักจะคำนวณเบี้ยประกันชีวิตที่ยังไม่มีรายจ่ายใด ๆ เรียกว่า เบี้ยประกันชีวิตสุทธิ (Net premium) แล้วจึงคำนวณเบี้ยประกันชีวิตที่รวมค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ประกอบด้วย เรียกว่า เบี้ยประกันชีวิตรวบยอด (gross premium)

อนึ่ง การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตอาศัยองค์ประกอบสำคัญ คือ ความเสี่ยงภัย ซึ่งการประกันชีวิตนั้นมีความเสี่ยงภัย 2 กรณีใหญ่ ๆ คือ

1. ผู้เอาประกันชีวิตเสี่ยงภัยกับการตาย
2. ผู้เอาประกันชีวิตเสี่ยงภัยกับการอยู่รอดชีวิต

ในบทที่ 3 นี้ เราจะเรียนรู้การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตที่ชำระแบบเชิงเดี่ยว และเป็นเบี้ยประกันชีวิตสุทธิ

3.2 ข้อสมมติมูลฐาน (Basic assumption)

นิยามที่ 3.1

เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยว (Single premium) คือ จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่ผู้เอาประกันชีวิตชำระแก่บริษัทประกันภัยครั้งเดียวสำหรับการประกันชีวิตแบบหนึ่ง ณ วันออกกรมธรรม์ และเพียงพอที่บริษัทฯ จะชำระผลประโยชน์แก่ผู้เอาประกันชีวิตตามเงื่อนไขกรมธรรม์ในอนาคตได้

เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวที่คำนวณมาได้โดยยังไม่รวมค่าใช้จ่ายใด ๆ เรียกว่า เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ (Net single premium)

การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเราจะยึดหลักของการประกันชีวิต ซึ่งเป็นวิธีการเฉลี่ยความเสี่ยงภัย โดยมีกลุ่มบุคคลจำนวนมากพอและมีสถานภาพการเสี่ยงภัยเหมือนกัน ตกลงร่วมส่งส่วนบำรุง (Contribution) รวมกันเป็นเงินกองทุน (Fund) เพื่อนำไปชดใช้ให้กับสมาชิกในกลุ่มเดียวกันนี้ ที่ประสบกับความสูญเสียทางการเงิน เนื่องจากความเสี่ยงภัยนั้น เช่น การตายหรือการอยู่รอด เป็นต้น

ดังนั้น ปัจจัยที่นำมาใช้เพื่อการคำนวณเบี้ยประกันชีวิตนั้น จึงมีดังนี้

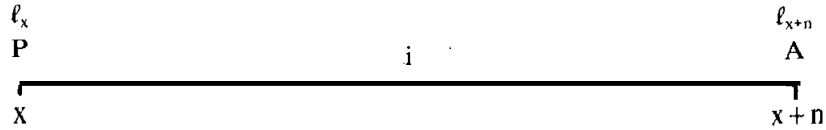
1. จำนวนผู้เอาประกันชีวิตที่มีสถานภาพการเสี่ยงภัยเหมือนกัน
2. อายุเมื่อเริ่มเอาประกันชีวิต
3. ระยะเวลาเอาประกันชีวิต
4. อัตราดอกเบี้ยทบต้น
5. เงื่อนไขของการรับผลประโยชน์ เช่น การตายหรือการอยู่รอด
6. จำนวนเงินผลประโยชน์ที่จะได้รับ

เราจึงนำเอาปัจจัยเหล่านี้มาใช้สำหรับการคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ ซึ่งแยกเงื่อนไขของการรับผลประโยชน์เป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตอยู่รอดเพื่อรับผลประโยชน์
2. กรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตระหว่างกรมธรรม์มีผลบังคับและผู้รับประโยชน์เป็นผู้รับผลประโยชน์ตามกรมธรรม์

ตามนิยามที่ 3.1 นั้น เนื่องจากเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิเป็นเบี้ยประกันที่ต้องชำระ ณ วันที่ออกกรมธรรม์ ดังนั้น เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิจึงเป็น จำนวนมูลค่าปัจจุบันของมูลค่าความเสี่ยงภัยในอนาคตตามเงื่อนไขกรมธรรม์ ซึ่งเราจะแยกศึกษาเป็นแต่ละกรณีดังนี้

3.2.1 เบี้ยประกันเชิงเดี่ยวสุทธิกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตได้รับผลประโยชน์เมื่ออยู่รอด



กำหนดให้

1. จำนวนผู้เอาประกันชีวิต ณ อายุ x มีจำนวน ℓ_x คน
2. ผู้เอาประกันชีวิตแต่ละคนจะต้องชำระเบี้ยประกันชีวิตเดี่ยวสุทธิคนละ P หน่วย
3. ระยะเวลาเอาประกันชีวิตจำนวน n ปี
4. ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับผลประโยชน์เมื่อมีชีวิตอยู่ ณ อายุ x+n เท่านั้น เป็นจำนวนทุนประกัน A หน่วย
5. จำนวนผู้มีชีวิตอยู่รอดเพื่อรับผลประโยชน์ ณ อายุ x+n จำนวน ℓ_{x+n} คน
6. มูลค่าของเงินกองทุนเพิ่มด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

ดังนั้น

จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่รวมเป็นเงินกองทุน ณ อายุ x ทั้งสิ้น $= P\cdot\ell_x$

จำนวนเงินที่สะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี ณ อายุ x+n $= P\cdot\ell_x(1+i)^n$

จำนวนเงินผลประโยชน์ที่ต้องจ่าย ณ อายุ x+n ทั้งสิ้น $= A\cdot\ell_{x+n}$

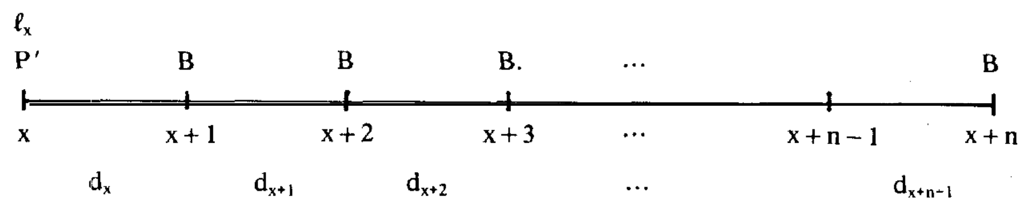
$\because$ จำนวนเงินที่สะสมได้ ณ อายุ x+n = จำนวนเงินผลประโยชน์ที่ต้องจ่ายทั้งสิ้น

$$\therefore \quad P\cdot\ell_x\cdot(1+i)^n = A\cdot\ell_{x+n}$$

$$P = A\cdot\frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}\cdot v_i^n$$

$$= A\cdot{}_nP_x\cdot v_i^n \qquad \text{........(3.1)}$$

3.2.2 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิกรณีที่ชำระผลประโยชน์เมื่อผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิต



กำหนดให้

1. จำนวนผู้เอาประกันชีวิต ณ อายุ x ปีมี ℓ_x คน

2. ผู้เอาประกันชีวิตแต่ละคนชำระเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิคนละ P′ หน่วย

3. เงินกองทุนสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

4. ชำระผลประโยชน์ ณ วันสิ้นปีของแต่ละปี กรณีผู้เอาประกันชีวิตรายใดเสียชีวิตในปีนั้น ๆ จำนวนรายละ B หน่วย

5. ระยะเวลาเอาประกันภัย n ปี

6. จำนวนผู้เสียชีวิตแต่ละปี เป็น $d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, \dots, d_{x+n-1}$ คน ตามลำดับ

ดังนั้น

จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่ได้รับทั้งสิ้น $= P'\cdot\ell_x$

เพราะว่า จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่รวมกันเป็นเงินกองทุนนี้ จะถูกนำไปชดใช้ให้กับผู้รับผลประโยชน์ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตรายใดเสียชีวิตของแต่ละปี และจะหมดสิ้นพอดีเมื่อกรมธรรม์ครบอายุ $x+n$ ปี

เราอาจพูดอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

จำนวนเบี้ยประกันชีวิตสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปีเป็นเวลา n ปี จะมีมูลค่าเท่ากับจำนวนมูลค่าสะสมของผลประโยชน์แต่ละปีที่ชำระไปมารวมกัน ณ อายุครบ $x+n$ ปี

มูลค่าสะสมของเงินกองทุน ณ อายุ $x+n$ ปี $= P'\cdot\ell_x\cdot(1+i)^n$ .....(1)

มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ ณ อายุ $x+n$ ปี อาจพิจารณาได้ดังนี้

มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ที่ชำระปีแรก $= B\cdot d_x(1+i)^{n-1}$

มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ที่ชำระปีที่ 2 $= B\cdot d_{x+1}(1+i)^{n-2}$

มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ที่ชำระปีที่ 3 $= B\cdot d_{x+2}(1+i)^{n-3}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ที่ชำระปีที่ n $= B\cdot d_{x+n-1}$

$\therefore$ มูลค่าสะสมของผลประโยชน์ที่ชำระไปทั้งสิ้น ณ อายุ $x+n$

$$= B\cdot d_x(1+i)^{n-1} + B\cdot d_{x+1}\cdot(1+i)^{n-2} + B\cdot d_{x+2}\cdot(1+i)^{n-3} + \dots + B\cdot d_{x+n-1} \qquad \text{........(2)}$$

ดังนั้น

$$P'\cdot\ell_x(1+i)^n = B\cdot d_x(1+i)^{n-1} + B\cdot d_x(1+i)^{n-2} + B\cdot d_{x+2}\cdot(1+i)^{n-3} + \dots + B\cdot d_{x+n-1}$$

$$\therefore \quad P' = \frac{1}{\ell_x}(B\cdot d_x\cdot v + B\cdot d_{x+1}\cdot v^2 + B\cdot d_{x+2}\cdot v^3 + \dots + B\cdot d_{x+n-1}\cdot v^n) \qquad \text{........(3.2)}$$

$$= B(v\cdot q_x + v^2\cdot{}_{1/}q_x + v^3\cdot{}_{2/}q_x + v^4\cdot{}_{3/}q_x + \dots + v^n\cdot{}_{n-1/}q_x) \qquad \text{........(3.3)}$$

จากการพิจารณาการคำนวณหาจำนวนเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิที่ได้จากทั้งสองกรณี ตามสมการ 3.1 และ 3.2 เราอาจสรุปเป็นหลักหรือข้อสมมติมูลฐานเพื่อการคำนวณเบี้ยประกันชีวิตในหัวข้อต่อไปดังนี้

1. จำนวนเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ เท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับในอนาคต

2. จำนวนผู้ที่มีชีวิตอยู่รอดและจำนวนผู้เสียชีวิตนั้น เป็นจำนวนที่ได้พยากรณ์ตามตารางมฤตภาพ แล้วแต่บริษัทประกันภัยใดจะกำหนด ดังนั้น ในทางปฏิบัติบริษัทประกันภัยต้องคัดเลือกผู้เอาประกันชีวิตให้มีอัตราการตายสอดคล้องกับตารางมฤตภาพที่บริษัทนั้นกำหนดไว้

3. เมื่อบริษัทประกันภัยได้รับเบี้ยประกันชีวิตมาแล้ว จะต้องนำไปลงทุนเพื่อให้เกิดดอกผลไม่น้อยไปกว่าอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี ตามที่บริษัทฯ กำหนดไว้ใช้ในการคำนวณอัตราเบี้ยประกันชีวิต

3.3 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตอยู่รอด
(Net single premium in case of survivorship)

การจ่ายผลประโยชน์ที่ระบุไว้ในกรมธรรม์ประกันชีวิตในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตต้องการรับผลประโยชน์เมื่อมีชีวิตอยู่รอดในอนาคตนั้น มีความเหมือนกับการสะสมของเงินที่ได้เรียนมาแล้วจากบทที่ 1 แต่ในกรณีของการประกันชีวิตนั้นได้มีเงื่อนไขของผู้รับประโยชน์ (ผู้เอาประกันชีวิต) จะต้องมีชีวิตอยู่รอดด้วย เราเรียกการสะสมเงินประเภทนี้ว่า การสะสมทรัพย์แท้จริง (Pure endowment)

หลักของการสะสมทรัพย์แท้จริงก็ใช้หลักการประกันภัยโดยบุคคลกลุ่มหนึ่งร่วมกันสมทบทุนด้วยเบี้ยประกันภัยรวมเป็นเงินกองทุน แล้วนำเงินกองทุนนี้พร้อมกับดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นมาแบ่งปันเฉพาะผู้ที่มีชีวิตอยู่รอด ณ เวลาที่กำหนดไว้แน่นอนในอนาคต

3.3.1 การสะสมทรัพย์แท้จริง (Pure endowment)

นิยามที่ 3.2

จำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้จริง เป็นจำนวนเงินผลประโยชน์ที่ผู้เอาประกันชีวิตคาดว่าจะได้รับเมื่อเขามีชีวิตอยู่รอด ณ เวลาที่กำหนดไว้ในกรมธรรม์

นิยามที่ 3.3

กำหนดให้ ${}_nE_x$ หรือ $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ เป็นจำนวนมูลค่าปัจจุบันของจำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้

จริง (Pure endowment) ของผู้เอาประกันชีวิตปัจจุบันอายุ x ปี ซึ่งคาดว่าจะได้รับผลประโยชน์เป็นเงินสะสมทรัพย์แท้จริงจำนวน 1 หน่วย ณ อายุ x+n ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

จากนิยามที่ 3.3 นี้ เราจะเห็นได้ชัดว่า ${}_nE_x$ ก็คือ จำนวนเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี กำหนดรับผลประโยชน์เป็นเงินสะสมทรัพย์แท้จริง ณ อายุครบ x+n ปี

ทฤษฎีบทที่ 3.1

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ในตารางมฤตภาพ และ $0 \leqslant x \leqslant w$ ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี ดังนั้น

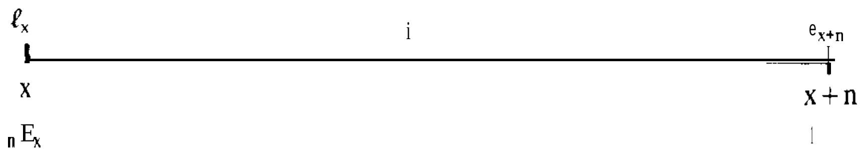
$$ {}_nE_x = v^n \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} $$

$$ = v^n \cdot {}_nP_x $$

ถ้า $$ D_x = v^x \ell_x $$

$$ \therefore \quad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

พิสูจน์



จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่ได้รับทั้งสิ้น ณ อายุ x ปี = ${}_nE_x \cdot \ell_x$

จำนวนเงินสะสมของเงินกองทุน ณ อายุ x+n ปี = ${}_nE_x \cdot \ell_x \cdot (1+i)^n$

จำนวนเงินผลประโยชน์ต้องจ่ายทั้งสิ้น = $1 \cdot \ell_{x+n}$

$\because$ จำนวนเงินสะสมกองทุน = จำนวนเงินผลประโยชน์ต้องจ่ายทั้งสิ้น

$$ \therefore \quad {}_nE_x \cdot \ell_x \cdot (1+i)^n = 1 \cdot \ell_{x+n} $$

$$ {}_nE_x = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} $$

$$ = v^n \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} $$

$$ = v^n \cdot {}_nP_x $$

$$
\begin{aligned}
\text{ถ้า}\quad D_x &= v^x \ell_x \\
\therefore\quad {}_nE_x &= \frac{v^x}{v^x} \cdot v^n \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \\
&= \frac{v^{x+n} \cdot \ell_{x+n}}{v^x \cdot \ell_x} \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

พิจารณาจากทฤษฎีบทที่ 3.1 เราจะสรุปได้ว่า

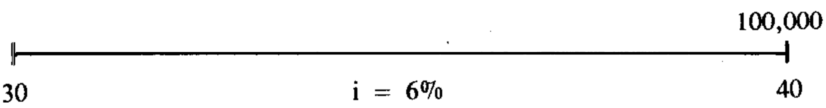
1. ${}_nE_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คำนวณได้จาก ค่าคาดคะเนทางคณิตศาสตร์ (mathematical expectation) ของผลประโยชน์จำนวน 1 หน่วยในเวลาอีก n ปีข้างหน้า

2. การกำหนดสัญลักษณ์ D_x ขึ้น เพื่อให้สะดวกสำหรับการคำนวณในโอกาสต่อไป เราเรียกสัญลักษณ์ประเภทนี้ว่า สัญลักษณ์สลับที่ (Commutation symbol) ซึ่งจะมีอีกมากในหัวข้อต่อ ๆ ไป และมักจะคำนวณไว้แนบท้ายตารางมฤตภาพด้วย

3. ถ้ากำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นที่เท่ากัน จำนวนเงินผลประโยชน์ที่ได้รับจากการสะสมทรัพย์แท้จริง จะมีมูลค่ามากกว่าผลประโยชน์จากการสะสมทรัพย์ตามบทที่ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.1 จะต้องชำระเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิเป็นจำนวนเท่าใด ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี เพื่อรับเงินผลประโยชน์แบบสะสมทรัพย์แท้จริงจำนวน 100,000.- บาท ที่อายุ 40 ปี โดยใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529 ประเภทสามัญ เพศชาย อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

วิธีทำ



จากทฤษฎีที่ 3.1

เพื่อรับจำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้จริง 1 บาท ต้องชำระเบี้ยประกัน $= {}_{10}E_{30}$

$\therefore$ เพื่อรับจำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้จริง 100,000 บาท ต้องชำระเบี้ยประกัน

$$
\begin{aligned}
&= 100{,}000 \cdot {}_{10}E_{30} \\
&= 100{,}000 \frac{D_{40}}{D_{30}} \\
&= 54{,}135.95
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ

ถ้าฝากเงินจำนวน 54,135.95 บาท กับธนาคารพาณิชย์ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% ต่อปี เมื่อครบกำหนดอีก 10 ปีต่อมา จะเป็นจำนวนเงินสะสมทั้งสิ้นเท่ากับ $54,135.95\,(1.06)^{10}$ = 96,949.92 บาท ซึ่งเราจะเห็นว่ามีจำนวนน้อยกว่าการรับผลประโยชน์แบบสะสมทรัพย์แท้จริง

ตัวอย่างที่ 3.2 ผู้เอาประกันชีวิตรายหนึ่งอายุ 25 ปี ชำระเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิจำนวน 20,000.– บาท เพื่อการสะสมทรัพย์รับผลประโยชน์ที่อายุ 40 ปี ดังนั้น ด้วยอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี และใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529 เขาจะได้รับเงินเท่าใด

ถ้า ก. จะได้รับผลประโยชน์นั้นแน่นอนไม่ว่าเขาจะมีชีวิตอยู่รอดหรือไม่

ข. ได้รับเงินผลประโยชน์นั้นหากเขามีชีวิตอยู่รอดเท่านั้น

วิธีทำ

(ก) มูลค่าการสะสมทรัพย์โดยไม่มีเงื่อนไขการมีชีวิตอยู่รอด

$$\therefore \text{ ผลประโยชน์ที่จะได้รับอีก 15 ปี } = 20,000(1.06)^{15}$$
$$= 47,931.16 \text{ บาท}$$

(ข) ผลประโยชน์ที่ได้รับเป็นการสะสมทรัพย์แท้จริง

$$\therefore \text{ ผลประโยชน์ที่จะได้รับอีก 15 ปี } = 20,000 \times \frac{1}{{}_{15}E_{25}}$$
$$= 20,000 \times \frac{D_{25}}{D_{40}}$$
$$= 50,053.56$$

3.3.2 การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปี (Life annuity)

ผู้เอาประกันชีวิตอาจเลือกวิธีรับผลประโยชน์ในอนาคตที่มีเงื่อนไขการมีชีวิตอยู่รอดนั้นเป็น 2 กรณี คือ

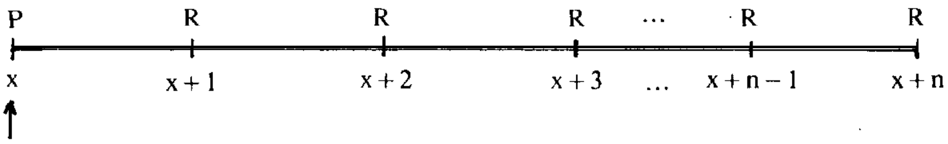
1. การรับผลประโยชน์ทั้งสิ้นครั้งเดียว
2. การรับผลประโยชน์เป็นระดับ

การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิสำหรับการรับผลประโยชน์ในอนาคตทั้งสิ้นครั้งเดียว ซึ่งเป็นจำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้จริงนั่นเอง เราได้ศึกษามาแล้วจากหัวข้อ 3.3.1

การรับผลประโยชน์เป็นระดับนั้น ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับผลประโยชน์เป็นรายงวด ๆ จะเท่า ๆ กัน อาจจะตลอดชีพของผู้เอาประกันหรือเวลาจำกัด และจะต้องมีชีวิตอยู่

รอดเท่านั้น จึงจะรับผลประโยชน์ได้ หากผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตลง ผลประโยชน์นั้นก็จะถูกระงับไป เราเรียกวิธีการจ่ายผลประโยชน์ทำนองนี้ว่า การจ่ายผลประโยชน์แบบเบี้ยรายปี หรือเป็นการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปี (Life annuity)

ในที่นี้เราจะเรียนเฉพาะการจ่ายผลประโยชน์เป็นรายปี ปีละครั้ง พิจารณาแผนภาพข้างล่างนี้



กำหนดให้

1. ผู้เอาประกันชีวิตรายหนึ่ง อายุ x ปี ชำระเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิจำนวน P หน่วย

2. ประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปี เพื่อรับผลประโยชน์แบบเบี้ยรายปี ปีละ R หน่วย เป็นเวลา n ปี ตามแผนภาพ

ดังนั้น

P = จำนวนเงินเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ

= จำนวนมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับในอนาคต

= ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่ได้รับแต่ละปี

ถ้า $P{\cdot}v \text{ of } R_i$ = มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่ได้รับของปีที่ i ซึ่ง

$i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n.$

$$. \; P = \sum_{i=1}^{n} P{\cdot}v \text{ of } R_i$$

หรือเราอาจกล่าวได้ว่า

$$\left\{\begin{array}{l}\text{จำนวนเงินเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ}\\ \text{แบบเบี้ยรายปี}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{ผลรวมมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์}\\ \text{แต่ละปี}\end{array}\right\}$$

และเพราะว่า ผลประโยชน์แต่ละปีนั้น คือ จำนวนเงินสะสมทรัพย์แท้จริงของแต่ละปีนั่นเอง ดังนั้น

$$\left\{\begin{array}{l}\text{จำนวนเงินเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ}\\ \text{ของการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปี}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{ผลรวมมูลค่าปัจจุบันของเงินสะสมทรัพย์}\\ \text{แท้จริงของแต่ละปี}\end{array}\right\}$$

นิยามที่ 3.4

การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปี (Life annuity) คือ การประกันชีวิตที่ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับผลประโยชน์แบบเบี้ยรายปี (annuity) ต่อเนื่องกันไป จนกว่าผู้เอาประกันชีวิตมรณกรรมหรือครบกำหนดตามเงื่อนไขกรมธรรม์ กำหนดวันเริ่มการรับผลประโยชน์นั้นแล้วแต่จะกำหนดไว้ในกรมธรรม์ เราอาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า เบี้ยเลี้ยงชีพรายปี

นิยามที่ 3.5

การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีตลอดชีพ (Whole life annuity) เป็นการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีที่ผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับผลประโยชน์แบบเบี้ยรายปีจนกว่ามรณกรรม หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีตลอดชีพ

กำหนดให้

a_x เป็นมูลค่าปัจจุบันของการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีตลอดชีพ หรือจำนวนเงินเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ ที่มีการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ปลายปี ปีละ 1 หน่วย เริ่มตั้งแต่ปลายปีของอายุ x ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี
(อ่านว่า a – x และเรียกว่า Whole life annuity immediate)

$\ddot{a}_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีตลอดชีพ หรือจำนวนเงินเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิที่มีการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี ปีละ 1 หน่วย เริ่มตั้งแต่ต้นปีของอายุ x ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี
(อ่านว่า a – double dot – x และเรียกว่า Whole life annuity due)

ข้อควรสังเกตเกี่ยวกับการชำระต้นปี (Due) และปลายปี (Immediate)

โดยทั่ว ๆ ไป การคำนวณอายุเริ่มเอาประกันภัยของผู้เอาประกันภัยนั้น จะกำหนดเอาจากการคำนวณอายุเต็มในปีนั้น ๆ โดยนำเอา วัน เดือน ปี พ.ศ. ที่ทำสัญญาลบด้วย วัน เดือน ปี พ.ศ. ที่เกิดของผู้เอาประกันภัย และถ้าเศษของอายุได้ไม่เกิน 6 เดือน ก็ให้ถือว่าเป็นอายุต้นตามนั้น หากเศษของเดือนมากกว่า 6 เดือน ให้นับอายุเต็มเพิ่มอีก 1 ปี เช่น

วันเอาประกันภัย วันที่ 7 พฤษภาคม 2533
วันเกิด วันที่ 18 กันยายน 2490

ดังนั้น

ปี พ.ศ.	เดือน	วันที่
2533	5	7
2490	9	18
42	7	19

ให้นับว่าผู้เอาประกันภัยรายนี้อายุเต็ม 43 ปี

การชำระต้นปี (Due)

การชำระต้นปี เป็นการชำระทันทีที่ครบอายุในปีนั้น ๆ จำนวนครั้งจะเริ่มนับ 1 ทันที ณ อายุเริ่มต้นของการประกันภัย ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ ดังนี้

	1	2	3	4	...
	x	x+1	x+2	x+3	...
พ.ศ.	2533	2534	2535	2536	...
อายุ	43	44	45	46	...

อายุระหว่าง x และ x+1 ปี ให้ถือว่าเป็นช่วงของอายุ x ปี และเป็นปีที่ 1 ของการประกันภัย

การชำระปลายปี (Immediate)

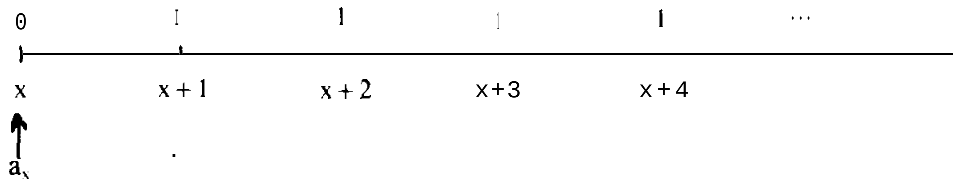
การชำระปลายปี เป็นการชำระปลายปีของอายุนั้น ๆ หรือของปีการประกันภัยนั้น ๆ จำนวนครั้งจะเริ่มนับ 1 ณ ปลายปีของอายุเริ่มต้นของการประกันภัย

อาจเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

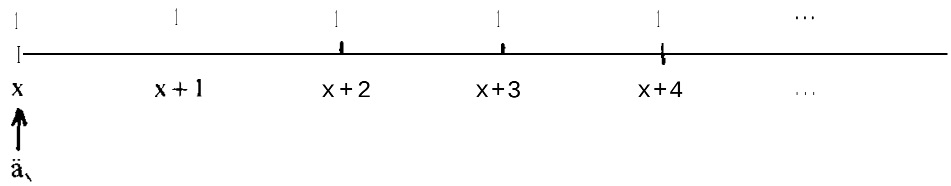
	0	1	2	3	
	t				
	x	x+1	x+2	x+3	...
อายุ	43	44	45	46	..
พ.ศ.	2533	2534	2535	2536	..

ดังนั้น เราอาจเขียนแผนภาพของ a_x และ $\ddot{a}_x$ ได้ดังนี้

แผนภาพของ a_x



แผนภาพของ $\ddot{a}_x$



นิยามที่ 3.6

การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีชั่วคราวระยะเวลา n ปี หรือเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีชั่วคราว (n-year-temporary life annuity) เป็นการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีที่จำกัดระยะเวลาการจ่ายผลประโยชน์ตามที่ระบุไว้ในกรมธรรม์

กำหนดให้

$a_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีชั่วคราวระยะเวลา n ปี ที่มีการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ปลายปี ปีละ 1 หน่วย เริ่มตั้งแต่ปลายปีของผู้เอาประกันอายุ x ปี ติดต่อกันไปเป็นจำนวน n ครั้ง

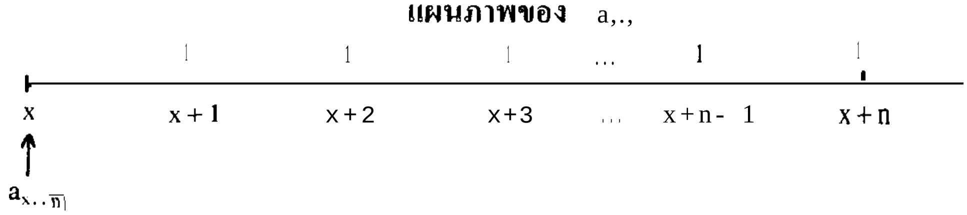
(เราเรียก $a_{x:\overline{n}|}$ ว่า n-year temporary life annuity immediate และอ่านว่า a-x-angle-n)

และ

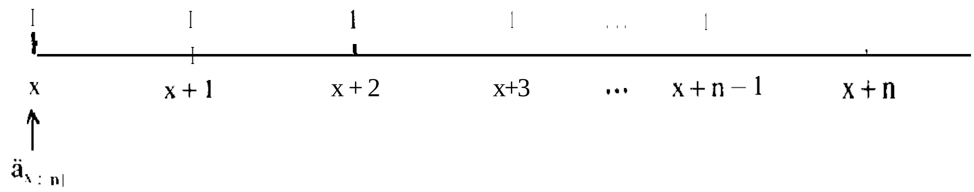
$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีชั่วคราว ระยะเวลา n ปี ที่มีการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี ปีละ 1 หน่วย เริ่มตั้งแต่ต้นปีของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี ติดต่อกันไปเป็นจำนวน n ครั้ง

(เราเรียก $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ว่า n-year temporary life annuity due และอ่านว่า a-double-dot-x-angle-n)

แผนภาพของ $a_{x:\overline{n}|}$



แผนภาพของ $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$



นิยามที่ 3.7

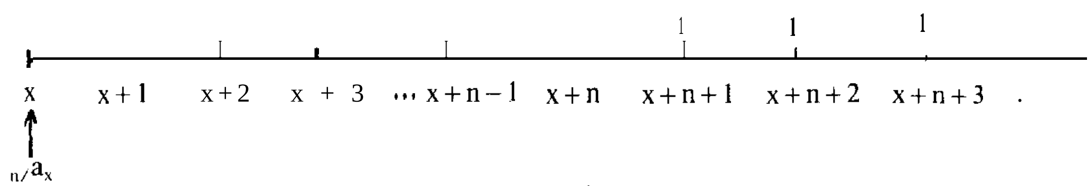
การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีที่ประวิงการรับผลประโยชน์ไปอีก n ปี หรือเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีที่ประวิงการรับผลประโยชน์ไปอีก n ปี (n-year deferred life annuity) คือ เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีที่กำหนดการจ่ายผลประโยชน์หลังจากที่ทำประกันชีวิตหรือกรมธรรม์มีผลบังคับไปแล้วไปอีก n ปี

กำหนดให้

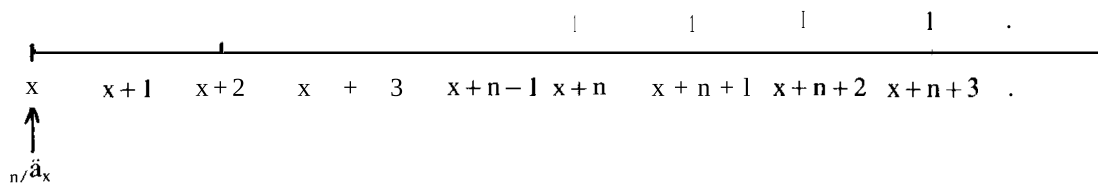
$_{n/}a_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีตลอดชีพของผู้เอาประกันชีวิต อายุ x ปี กำหนดรับผลประโยชน์เริ่มที่ปลายปีอายุ x + n ติดต่อกันทุก ๆ ปี ครั้งละ 1 หน่วย (เราเรียก $_{n/}a_x$ ว่า n-year-deferred life annuity immediate และอ่านว่า n-year-deferred-a-x)

$_{n/}\ddot{a}_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีตลอดชีพของผู้เอาประกันชีวิต อายุ x ปี และกำหนดรับผลประโยชน์เริ่มที่ต้นปีอายุ x + n ติดต่อกันทุก ๆ ปี ครั้งละ 1 หน่วย (เราเรียก $_{n/}\ddot{a}_x$ ว่า n-year-deferred life annuity due และอ่านว่า n-year-deferred a-double-dot-x)

แผนภาพของ $_{n/}a_x$



แผนภาพ $_{n/}\ddot{a}_x$



นิยามที่ 3.8

การประกันชีวิตแบบเบี้ยรายปีที่ประวิงการรับผลประโยชน์และระยะเวลารับผลประโยชน์ชั่วคราว หรือเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีที่ประวิงการรับผลประโยชน์ n ปี ระยะเวลารับผลประโยชน์ m ปี (n-year-deferred-m-year temporary life annuity)

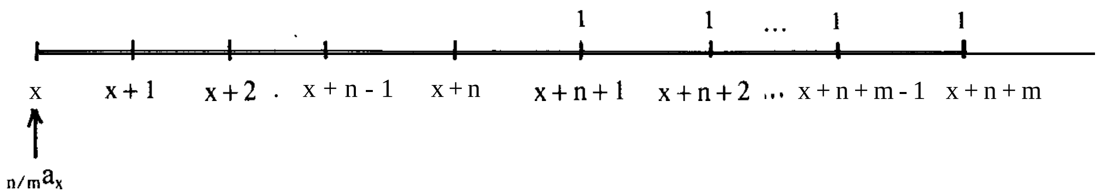
คือ เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีที่กำหนดรับผลประโยชน์หลังจากรับประกันชีวิตไปแล้ว n ปี และระยะเวลาการรับผลประโยชน์ m ปี

กำหนดให้

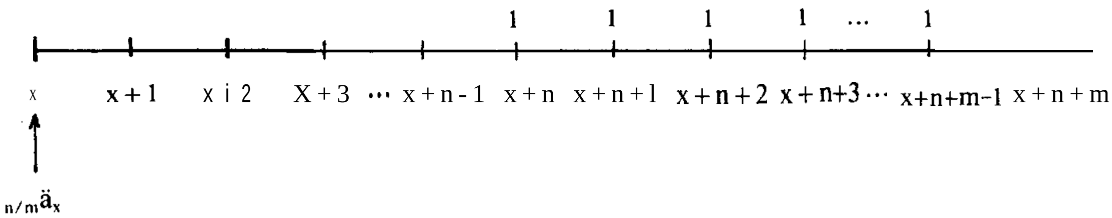
${}_{n/m}a_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีชั่วคราวของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี กำหนดรับผลประโยชน์ที่ปลายปีอายุ $x+n$ ทุก ๆ ปลายปีติดต่อกัน m ปี ครั้งละ 1 หน่วย (เราเรียก ${}_{n/m}a_x$ ว่า n-year deferred-m-year temporary life annuity immediate และอ่านว่า n-year-deferred-m-year-temporary-a-x)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเป็นการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี เราก็เขียนสัญลักษณ์ว่า ${}_{n/m}\ddot{a}_x$ เราเรียกว่า n-year-deferred-m-year-temporary-life annuity-due และอ่านว่า n-year-deferred-m-year-temporrary-a-double dot-x)

แผนภาพของ ${}_{n/m}a_x$



แผนภาพของ ${}_{n/m}\ddot{a}_x$



ทฤษฎีบทที่ 3.2

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ และ n, m เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ถ้า
$$N_x = \sum_{r=o}^{w-x} D_{x+r}$$

ดังนั้น

$$a, = \sum_{t=1}^{w-x-1} {}_tE_x$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a, = \sum_{t=o}^{w-x-1} {}_tE_x$$

$$\begin{matrix} N_x \\ D_x \end{matrix}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=o}^{n--l} {}_tE_x$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{n/}a_x = \sum_{t=n+1}^{w-x-l} {}_tE_x$$

$$= \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_{n/}a_x = \sum_{t=n}^{w-x-1} {}_tE_x$$

$$= \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$ {}_{n/m}a_x = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tE_x $$

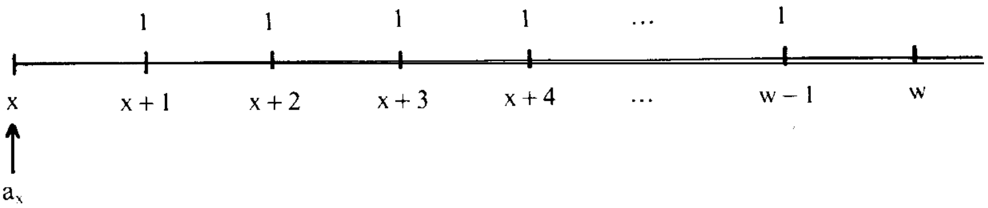
$$ = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} $$

$$ {}_{n/m}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m\ 1} {}_tE_x $$

$$ = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m-1}}{D_x} $$

พิสูจน์

1.



$\because a_x$ = มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีตลอดชีพที่กำหนดจ่ายทุก ๆ ปลายปี เริ่มปลายปีอายุ x

= ผลรวมมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่จ่ายแต่ละปี

= ผลรวมมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์เป็นมูลค่าสะสมทรัพย์แท้จริง จำนวน 1 หน่วย

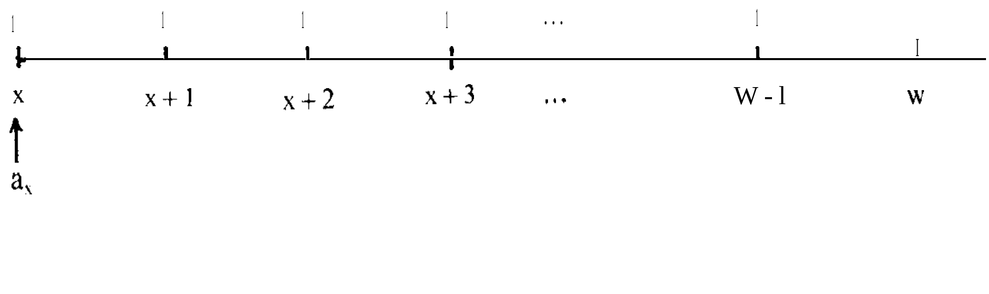
$$ = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_{w-x-1}E_x $$

$$ = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{w-1}}{D_x} $$

$$ = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ + D_{w-1}}{D_x} $$

$$ \frac{N_{x+1}}{D_x} $$

2.



$\because$ $\ddot{a}_x$ = มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพตลอดชีพของผู้เอาประกันชีวิต อายุ x และรับผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี ปีละ 1 หน่วย เริ่มที่ต้นปีอายุ x ปี

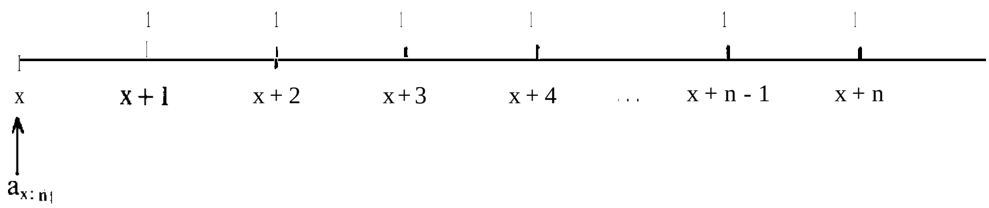
ทำนองเดียวกับ (1)

$$\therefore \ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + . + {}_{w-1}E_x$$

$$= \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + \frac{D_{w-1}}{D_x}$$

$$\frac{N_x}{D_x}$$

3.



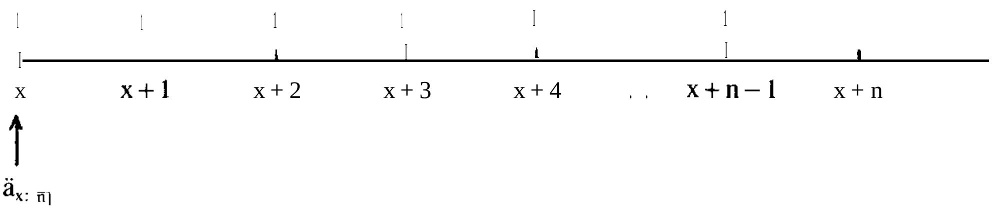
สรุปการพิสูจน์จาก (1) และ (2)

$$a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \dots + {}_{n-1}E_x + {}_nE_x$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

4.

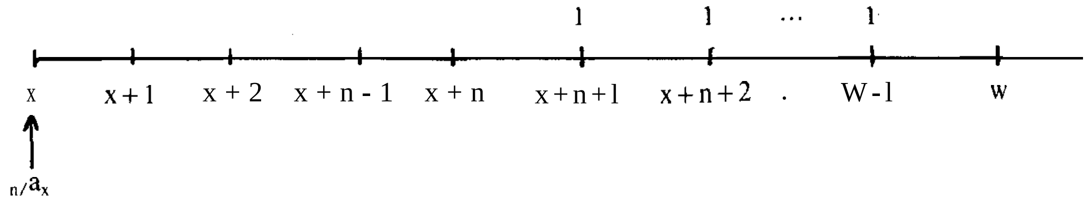


$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \dots + {}_{n-1}E_x$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

5.

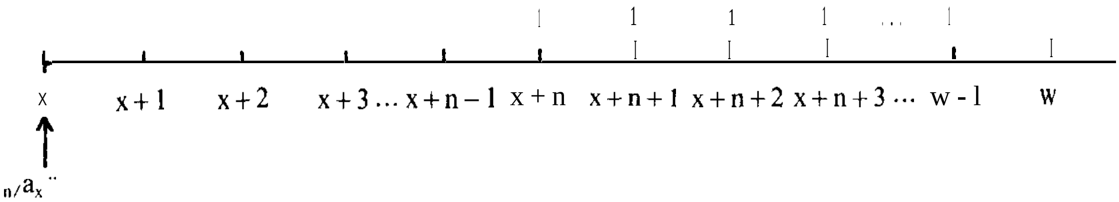


$$\therefore {}_{n/}a_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \dots + {}_{w-1}E_x$$

$$= \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ + D_{w-1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+n+}}{D_x}$$

6.

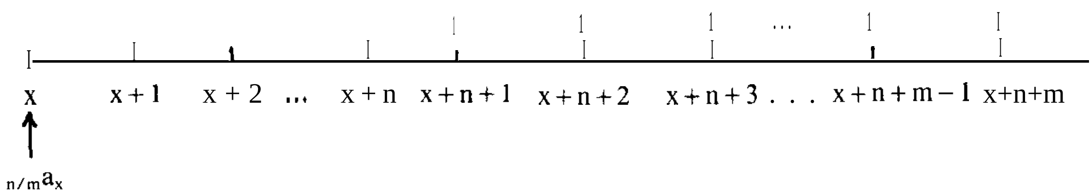


$$\therefore {}_{n/}\ddot{a}_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \dots + {}_{w-1}E_x$$

$$= \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \dots + D_{w-1}}{D_x}$$

$$\frac{N_{x+n}}{D_x}$$

7.

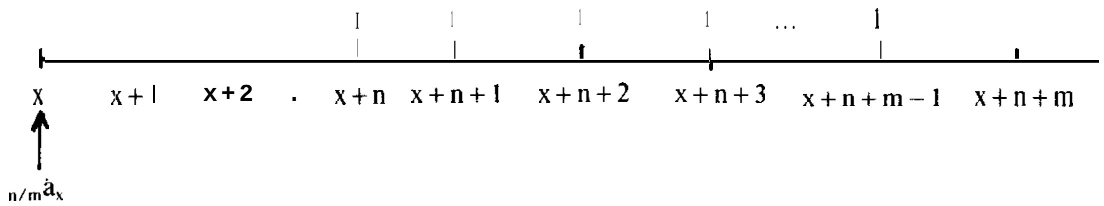


$$\therefore {}_{n/m}a_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \dots + {}_{n+m-1}E_x + {}_{n+m}E_x$$

$$= \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \dots + D_{x+n+m-1} + D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$$

8.



$$\therefore\ {}_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \ldots + {}_{n+m-1}E_x$$

$$= \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots + D_{x+n+m-1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.3

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ และ n, m เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n-1/}a_x$$

$$_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n-1/m}a_x$$

$$_{n/}a_x = a_x - a_{x:\overline{n}|}$$

พิสูจน์

1. $$a_x = {}_{0}E_x + {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + \ldots + {}_{w-x-1}E_x$$

$$= {}_{0}E_x + ({}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + \ldots + {}_{w-x-1}E_x)$$

$$= 1 + a_x$$

2. $$\because\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{0}E_x + {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x$$

$$= {}_{0}E_x + ({}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x)$$

$$= 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

3. $$_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \ldots + {}_{w-1}E_x$$

และ $$_{n/}a_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \ldots + {}_{w-1}E_x$$

$$_{n-1/}a_x = {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \ldots + {}_{w-1}E_x$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n-1/}a_x$$

4. ทำนองเดียวกัน

$$
\begin{aligned}
{}_{n/m}a_x &= {}_{n}E_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots + {}_{n+m-1}E_x \\
&= {}_{n-1/m}a_x
\end{aligned}
$$

5.
$$
\begin{aligned}
{}_{n/}a_x &= {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \ldots + {}_{w-1}E_x \\
&= {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + \ldots + {}_{w-1}E_x - ({}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + \ldots + {}_{n}E_x) \\
&= a_x - a_{x:\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 3.3 คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ (Net single premium) ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี ซึ่งจะรับผลประโยชน์เบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 10,000.- บาท โดยใช้ตารางมฤตภาพไทย พ.ศ. 2529 อัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% ถ้า

(1) ผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพตลอดชีพแบบปลายปี (immediate)

(2) ผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพชั่วคราวแบบปลายปีเป็นจำนวน 15 ครั้ง

(3) ผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพชั่วคราวแบบต้นปี เริ่มรับตั้งแต่อายุ 40 ปี ถึงอายุ 60 ปี (รวมอายุ 60 ปีด้วย)

(4) ได้รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยรายปีชั่วคราวจำนวน 10 ครั้ง เริ่มตั้งแต่อายุ 40 ปี แล้วหลังจากนั้นได้รับผลประโยชน์แบบเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีจนถึงอายุ 70 ปี และที่อายุ 70 ปี (ถ้ารอด) จะได้รับโบนัสอีก 50,000 บาท

วิธีทำ

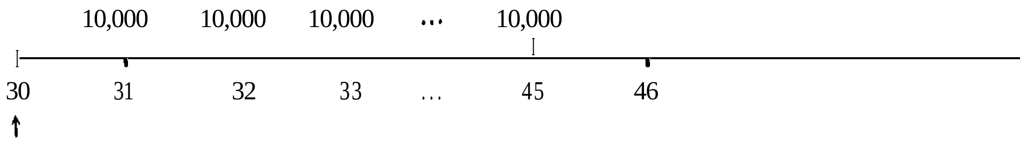
(1)

	10,000	10,000	10,000	...
30 ↑	31	32	33	...

เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพตลอดชีพแบบปลายปี ๆ ละ 10,000.-

$$
\begin{aligned}
&= 10{,}000a_{31} \\
&= 10{,}000({}_{1}E_{31} + {}_{2}E_{31} + {}_{3}E_{31} + \ldots) \\
&= 10{,}000\left(\frac{D_{32} + D_{33} + D_{34} + \ldots}{D_{31}}\right) \\
&= 10{,}000\frac{N_{32}}{D_{31}} \\
&= 143{,}150.73
\end{aligned}
$$

(2)



เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพชั่วคราวจำนวน 15 ครั้ง เริ่มรับผลประโยชน์ที่ปลายปีของอายุ 30 ปี

$$= 10{,}000\,a_{30:\overline{15}|}$$

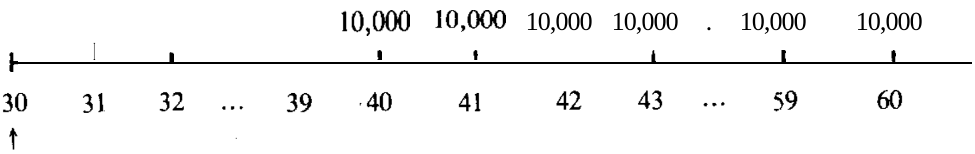
$$= 10{,}000({}_1E_{30} + {}_2E_{30} + {}_3E_{30} + \ldots + {}_{15}E_{30})$$

$$= 10{,}000\left(\frac{D_{31} + D_{32} + D_{33} + \ldots + D_{45}}{D_{30}}\right)$$

$$= 10{,}000\left(\frac{N_{31} - N_{46}}{D_{30}}\right)$$

$$= 95{,}073.52$$

(3)



เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิสำหรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพชั่วคราวจ่ายทุก ๆ ต้นปี ตั้งแต่อายุ 40 ปี ถึงรวมอายุ 60

$$= 10{,}000\,{}_{10/21}\ddot{a}_{30}$$

$$= 10{,}000({}_{10}E_{30} + {}_{11}E_{30} + {}_{12}E_{30} + \ldots + {}_{29}E_{30} + {}_{30}E_{30})$$

$$= 10{,}000\left(\frac{D_{40} + D_{41} + D_{42} + \ldots + D_{59} + D_{60}}{D_{30}}\right)$$

$$= \frac{10{,}000(N_{40} - N_{61})}{D_{30}}$$

$$= 64{,}254.12$$

(4)

30	31	32 ...	40	41	42 ...	49	50	51	52 ...	69	70
			10,000	10,000	10,000 ...	10,000	10,000	10,000	10,000 ...	10,000	60,000

| ←ระยะ CERTAIN→ |

เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิสำหรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยรายปี (ได้รับแน่นอนไม่ว่าจะอยู่รอดหรือไม่) เป็นระยะเวลา 10 ปี และหลังจากนั้นจะได้รับผลประโยชน์แบบเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี (ต้องมีชีวิตอยู่รอดจึงจะรับได้) จนถึงอายุ 70 ปี และเมื่ออยู่รอดที่อายุ 70 ปี จะได้รับโบนัส 50,000 บาท

= มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยรายปี ๆ ละ 10,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี และประวิงการจ่าย 10 ปี

+ มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีชั่วคราวตั้งแต่อายุ 40 ปี ถึงอายุ 70 ปี ปีละ 10,000.- บาท

+ มูลค่าปัจจุบันของโบนัส (เมื่ออยู่รอด) ที่อายุ 70 ปี

$= 10{,}000\ddot{a}_{\overline{10}|.06}\cdot {}_{10}E_{30} + 10{,}000\,{}_{20/21}\ddot{a}_{30} + 50{,}000\,{}_{40}E_{30}$

$= 10{,}00\ddot{a}_{\overline{10}|.06}\cdot\dfrac{D_{40}}{D_{30}} + 10{,}000\dfrac{(N_{50}-N_{71})}{D_{30}} + 50{,}000\dfrac{D_{70}}{D_{30}}$

$= 42{,}235.20 + 31{,}849.44 + 2{,}838.85$

$= 76{,}923.49$ บาท

นิยามที่ 3.9

เบี้ยเลี้ยงชีพรายปี (Life annuity) ที่สะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี เป็นเวลา n ปี จำนวนเงินที่สะสมนั้นนำมาแบ่งให้แก่ผู้ที่มีชีวิตอยู่รอด จำนวนเงินส่วนแบ่งนั้นเรียกว่า เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีสะสม (Forborne annuity)

นิยามที่ 3.10

$S_{x:\overline{n}|}$ คือ เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีสะสมของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 1 หน่วย ทุก ๆ ปลายปี ที่สะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี สะสมนานเป็นเวลา n ปี และจะได้รับจำนวนเงินสะสม ณ อายุ x+n ปี

(อ่านว่า S-x-angle-n)

เบี้ยเลี้ยงชีพสะสมของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 1 หน่วย ทุก ๆ ต้นปี เราเขียนว่า $\ddot{S}_{x:\overline{n}|}$ (อ่านว่า S-double dot-x-angle-n)

ทฤษฎีบทที่ 3.4

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\ddot{S}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{N_x \quad N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

และ

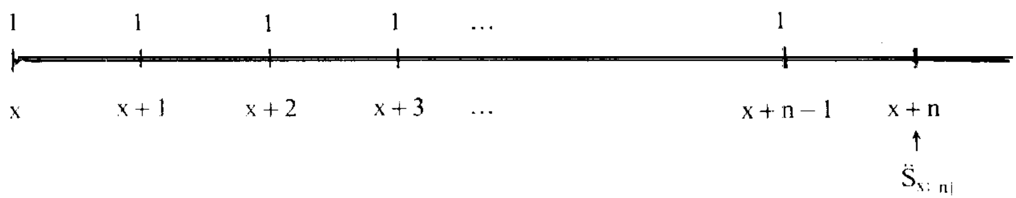
$$S_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

พิสูจน์

1.



$\because$ $\ddot{S}_{x:\overline{n}|}$ = มูลค่าสะสมของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 1 หน่วยทุก ๆ ต้นปี

= ผลรวมมูลค่าสะสมทรัพย์แท้จริง (Pure endowment) ของมูลค่าปัจจุบันที่เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี

มูลค่าซึ่งสะสมทรัพย์แท้จริง ณ อายุ x+n ของมูลค่าปัจจุบัน 1 หน่วย ณ อายุ x ปี

$$= \frac{1}{{}_nE_x}$$

มูลค่าซึ่งสะสมทรัพย์แท้จริง ณ อายุ x+n ของมูลค่าปัจจุบัน 1 หน่วย ณ อายุ x+1 ปี

$$= \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}}$$

มูลค่าซึ่งสะสมทรัพย์แท้จริง ณ อายุ $x+n$ ของมูลค่าปัจจุบัน 1 หน่วย ณ อายุ $x+2$ ปี

$$= \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}}$$

มูลค่าซึ่งสะสมทรัพย์แท้จริง ณ อายุ $x+n$ ของมูลค่าปัจจุบัน 1 หน่วย ณ อายุ $x+n-1$ ปี

$$= \frac{1}{{}_{1}E_{x+n-1}}$$

$$\therefore \quad \ddot{S}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$S_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

ข้อสังเกต

จากนิยาม เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีสะสม (Forborne annuity) เราอาจสรุปได้ว่า

1. เราอาจให้ความหมายเป็นอีกอย่างหนึ่งได้ว่า มูลค่าส่วนแบ่งของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีสะสมนั้น เป็นการสะสมเงินของบุคคลกลุ่มหนึ่งที่สะสมด้วยจำนวนเงินเท่ากันรวมกันในเงินกองทุนแต่ละปี และผู้ที่มีชีวิตอยู่รอดเท่านั้นเป็นผู้สะสมในแต่ละปี จนกระทั่งปีสุดท้าย จึงนำเอาเงินที่สะสมนั้นมาแบ่งกัน

2. เราอาจพิจารณาว่า เป็นแบบการประกันชีวิตอย่างหนึ่ง ซึ่งผู้เอาประกันชีวิตต้องชำระเบี้ยประกันทุก ๆ ปี และจะได้รับผลประโยชน์เมื่อผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่รอด ณ ปีที่สิ้นสุดการสะสมตามกรมธรรม์

ตัวอย่างที่ 3.4 บุคคลกลุ่มหนึ่ง อายุ 40 ปี ช่วยกันสะสมเงินลงในกองทุนคนละ 10,000.- บาท ทุก ๆ ต้นปี (เฉพาะผู้ที่มีชีวิตอยู่รอดเท่านั้น) เมื่อครบกำหนด 20 ปี นำเงินที่สะสมได้มาแบ่งกันระหว่างผู้ที่มีชีวิตอยู่รอด จงคำนวณหามูลค่าที่แต่ละคนจะได้รับ โดยใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529 อัตราดอกเบี้ย 6%

วิธีทำ

$$\text{จำนวนเงินที่แต่ละคนจะได้รับ} = 10{,}000\,\ddot{S}_{40:\overline{20}|}$$
$$= 10{,}000\frac{(N_{40}-N_{60})}{D_{60}}$$
$$= 447{,}815.01 \text{ บาท}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 ผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี ชำระเบี้ยประกันชีวิตปีละ 5,000.- บาท เป็นระยะเวลา 20 ปี กำหนดรับผลประโยชน์เมื่อมีชีวิตอยู่รอด ณ อายุ 50 ปี จงคำนวณเงินผลประโยชน์ที่จะได้รับ ใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529, อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

วิธีทำ

$$\text{จำนวนเงินผลประโยชน์ที่จะได้รับ} = 5{,}000\,\ddot{S}_{30:\overline{20}|}$$
$$= 5{,}000\frac{(N_{30}-N_{50})}{D_{50}}$$
$$= 207{,}117.72 \text{ บาท}$$

3.4 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ กรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิต (Net single premium in case of death)

การประกันชีวิตที่กำหนดเงื่อนไขการจ่ายผลประโยชน์ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตนั้น เราจะพิจารณาคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิตามเงื่อนไขระยะเวลาเอาประกันซึ่งแยกได้ดังนี้

1. ระยะเวลาเอาประกันชีวิตจำกัด เช่น 1 ปี, 3 ปี, 5 ปี, 10 ปี เป็นต้น
2. ระยะเวลาไม่จำกัด หรือตลอดชีพของผู้เอาประกันชีวิต

แบบของการประกันชีวิตที่กำหนดเงื่อนไขการจ่ายผลประโยชน์ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตภายในกำหนดระยะเวลาจำกัดที่ระบุไว้ในกรมธรรม์ เราเรียกว่า การประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลา หรือการประกันชีวิตแบบเฉพาะกาล (Term life insurance) และถ้าเงื่อนไข

การจ่ายผลประโยชน์ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตไม่ได้กำหนดระยะเวลาหรือจนกว่าผู้เอาประกันชีวิตจะเสียชีวิต เราเรียกว่า การประกันชีวิตแบบตลอดชีพ (Whole life insurance)

3.4.1 เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบเฉพาะกาล (Net single premium of term life insurance)

นิยามที่ 3.11

$A_{x:\overline{n}|}$ เป็นจำนวนเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบเฉพาะกาล ระยะเวลาเอาประกัน n ปีของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี เพื่อรับผลประโยชน์จำนวน 1 หน่วย ณ ปลายปีของปีที่เสียชีวิตนั้น

(อ่านว่า A-x-prime-angle-n)

นิยามที่ 3.12

A_x เป็นจำนวนเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบตลอดชีพ (Whole life) ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี เพื่อรับผลประโยชน์จำนวน 1 หน่วย ณ ปลายปีของปีที่เสียชีวิตนั้น

ทฤษฎีบทที่ 3.5

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ

n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

และ

$$C_x = v^{x+1}d_x$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t}$$

ดังนั้น

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}$$

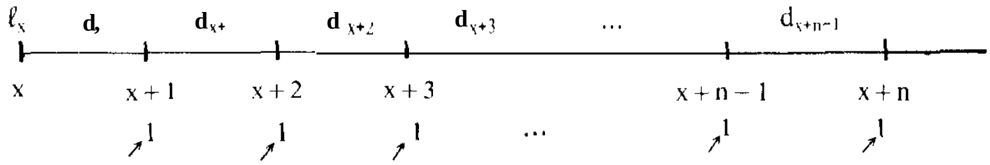
$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t}$$

$$= \frac{M_x}{D_x}$$

พิสูจน์

1.



ตามสมการ 3.2

$$A_{x:\overline{n}|} = \text{เบี้ยประกันเชิงเดี่ยวสุทธิทุนประกัน 1 หน่วย}$$

$$= \frac{1}{\ell_x}(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \ldots + d_{x+n-1} v^n)$$

$$= \frac{v^x}{v^x \cdot \ell_x}(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \ldots + d_{x+n-1} v^n)$$

$$= \frac{v^{x+1} \cdot d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} \cdot d_{x+2} + \ldots + v^{x+n} \cdot d_{x+n-1}}{v^x \cdot \ell_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

และ

2.

$$A_x = \text{เบี้ยประกันเชิงเดี่ยวสุทธิทุนประกัน 1 หน่วย}$$

$$= \frac{1}{\ell_x}(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \ldots + d_{w-1} \cdot v^{w-x})$$

$$= \frac{v^x}{v^x \cdot \ell_x}(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \ldots + d_{w-1} \cdot v^{w-x})$$

$$= \frac{v^{x+1} \cdot d_x + v^{x+2} \cdot d_{x+1} + v^{x+3} \cdot d_{x+2} + \ldots + v^w \cdot d_{w-1}}{v^x \cdot \ell_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots + C_{w-1}}{D_x}$$

$$\frac{M_x}{D_x}$$

หมายเหตุ

$A_{x:\overline{1}|}$ เป็นเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบเฉพาะกาลระยะเวลาประกัน 1 ปี

ซึ่ง

$$A_{x:\overline{1}|} = \frac{C_x}{D_x} = c_x$$

ตัวอย่างที่ 3.6 สมาคมการฌาปนกิจแห่งหนึ่งได้จัดแบ่งกลุ่มสมาชิกเป็นกลุ่มอายุที่เท่ากัน และแต่ละกลุ่มต้องจ่ายเบี้ยประกันภัยแก่สมาคมทุก ๆ ต้นปี โดยสมาคมไม่คิดค่าใช้จ่าย ดังนี้ จงคำนวณเบี้ยประกันสุทธิที่กลุ่มสมาชิกอายุ 50 ปี จะต้องชำระให้สมาคมเพื่อรับผลประโยชน์ในกรณีเสียชีวิตภายใน 1 ปี^{x} โดยใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529, อัตราดอกเบี้ย 6% x จำนวน 20,000.- บาท

วิธีทำ

$$\text{เบี้ยประกันภัยที่ต้องชำระ} = 20{,}000A_{50:\overline{1}|}$$

$$= 20{,}000\frac{C_{50}}{D_{50}}$$

$$= 155.77 \text{ บาท}$$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี ทุนประกัน 100,000.- บาท โดยใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529 อัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% ถ้า

(1) การประกันชีวิตแบบเฉพาะกาล ระยะเวลาประกันภัย 15 ปี

(2) การประกันชีวิตแบบตลอดชีพ

วิธีทำ

(1) เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของกรมธรรม์แบบเฉพาะกาล ระยะเวลาเอาประกันภัย 15 ปี ทุนประกัน 100,000.- บาท ของผู้เอาประกันภัย อายุ 30 ปี

$$= 100{,}000A_{30:\overline{15}|}$$

$$= 100{,}000\frac{(M_{30} - M_{45})}{D_{30}}$$

= 3.215.26 บาท

(2) เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของกรมธรรม์แบบตลอดชีพ

$= 100{,}000A_{30}$

$= 100{,}000\dfrac{M_{30}}{D_{30}}$

$= 12{,}768.18$ บาท

นิยามที่ 3.13

การประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์ เป็นการประกันชีวิตซึ่งกำหนดจ่ายผลประโยชน์ในกรณีที่ผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตภายในระยะเวลาที่กำหนดในกรมธรรม์ และจะจ่ายผลประโยชน์หากผู้เอาประกันชีวิตอยู่รอดถึงระยะเวลาที่กำหนดในกรมธรรม์

กำหนดให้

$A_{x:\overline{n}|}$ เป็นเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของการประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี กำหนดระยะเวลาเอาประกัน n ปี จะจ่ายผลประโยชน์ในกรณีผู้เอาประกันชีวิตเสียชีวิตภายในระยะเวลาเอาประกัน 1 หน่วย และจะจ่ายผลประโยชน์หากผู้เอาประกันชีวิตอยู่รอด ณ อายุ x+n จำนวน 1 หน่วย

หมายเหตุ

1. การประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์นั้น ผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตอาจไม่เท่ากับกรณีอยู่รอด และกำหนดระยะเวลาการจ่ายผลประโยชน์กรณีอยู่รอด ก็อาจจะมีได้หลายครั้งระหว่างการประกัน โดยปกติการกำหนดทุนประกันมักจะกำหนดจากจำนวนผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต

2. การประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์ (Endowment life insurance) เป็นการประกันชีวิตแบบผสมระหว่างการประกันชีวิตแบบเฉพาะกาลและการประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์แท้จริง

ทฤษฎีบทที่ 3.6

กำหนดให้ x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ

และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ดังนั้น

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

พิสูจน์

จากสมการ 3.1 และ 3.2

$\because$ $A_{x:\overline{n}|}$ = เบี้ยประกันเชิงเดี่ยวสุทธิของการจ่ายผลประโยชน์กรณีที่เสียชีวิตภายใน n ปี และอยู่รอด ณ อายุ x + n ปี

$$= \frac{1}{\ell_x}(v \cdot d_x + v^2 \cdot d_{x+2} + v^3 \cdot d_{x+3} + \ldots + v^n \cdot d_{x+n-1} + v^n \cdot \ell_x + n)$$

$$= \frac{v^x}{v^x \cdot \ell_x}(v \cdot d_x + v^2 d_{x+2} + \ldots + v^n \cdot d_{x+n-1} + v^n \cdot \ell_{x+n})$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= A_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของตัวอย่างที่ 3.7 หากเป็นการประกันชีวิตแบบสะสมทรัพย์ระยะเวลาประกัน 20 ปี

วิธีทำ

$$\text{เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ} = 100{,}000A_{30:\overline{20}|}$$

$$= 100{,}000\left(\frac{M_{30} - M_{50} + D_{50}}{D_{30}}\right)$$

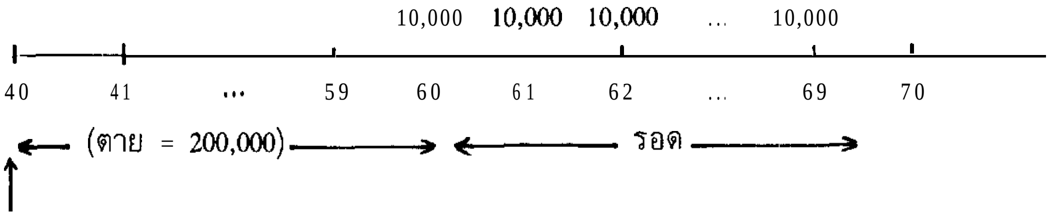
$$= 32{,}875.93$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 40 ปี โดยกำหนดผลประโยชน์ดังนี้

ก. ผลประโยชน์จำนวน 200,000 บาท หากเสียชีวิตภายใน 20 ปี

และ ข. หากอยู่รอด ณ อายุ 60 ปี จะได้รับเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 10,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี (เริ่ม ณ อายุ 60 ปี)

วิธีทำ



เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ $= 200{,}000A_{40:\overline{20|}} + 10{,}000\,{}_{20/10}\ddot{a}_{40}$

$$= 200{,}000\frac{(M_{40} - M_{60})}{D_{40}} + 10\ 000\frac{(N_{60} - N_{70})}{D_{40}}$$

$= 16{,}717.80 + 18{,}244.23$ บาท

$= 34{,}962.03$ บาท

ทฤษฎีบทที่ 3.7

กำหนด x เป็นอายุใด ๆ ตามตารางมฤตภาพ

และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ดังนั้น

1. $C_x = vD_x - D_{x+1}$
2. $A_x = v\ddot{a}_x - a_x = 1 - d\ddot{a}_x$
3. $A_{x:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$
4. $A_{x:\overline{n|}} = 1 - {}_nE_x - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

พิสูจน์

1. $\because\ d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$

$$v^{x+1}\cdot d_x = v^{x+1}\ell_x - v^{x+1}\cdot\ell_{x+1}$$

$$C_x = vD_x - D_{x+1} \qquad \text{........(3.4)}$$

2. จาก (3.4)

$$C_x = vD_x - D_{x+1}$$

$$\therefore\ C_{x+t} = v\cdot D_{x+t} \quad D_{x+t+1}$$

$$\sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t} = v\cdot\sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t+1}$$

$$M_x = v \cdot N_x - N_{x+1} \qquad (3.5)$$

$$\therefore \frac{M_x}{D_x} = v \cdot \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$A_x = v \cdot \ddot{a}_x - a_x$$

$$= v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$= 1 - d\ddot{a}_x$$

3. จาก (3.5)

$$M_x = vN_x - N_{x+1}$$

$$M_{x+n} = vN_{x+n} - N_{x+n+1}$$

$$\therefore \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = v \cdot \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

$$= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x) + {}_nE_x$$

$$\therefore A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

4. จาก (3.5)

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = v \cdot \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x)$$

$$= 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x$$

3.5 การประกันชีวิตแบบทุนประกันแปรผันได้
(Variable life annuity and insurance)

โดยทั่วไป จำนวนเงินทุนประกันชีวิตหรือจำนวนเงินผลประโยชน์ตอบแทนที่บริษัทสัญญาจะจ่ายให้ผู้เอาประกันชีวิตนั้น มักจะเป็นจำนวนคงที่ตลอดระยะเวลาเอาประกันภัย บางแบบการประกันชีวิตจะกำหนดให้จำนวนเงินทุนประกันชีวิตหรือจำนวนเงินผลประโยชน์มีมูลค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแต่ละปี ซึ่งมักจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นสัดส่วนสม่ำเสมอ ทั้งนี้เพื่อความเหมาะสมกับความต้องการของผู้เอาประกันภัย ซึ่งเราเรียกรวม ๆ ว่า การประกันชีวิตแบบทุนประกันแปรผันได้ ในที่นี้เราจะเรียนการประกันชีวิตที่เป็นแบบเบี้ยเลี้ยงชีพและการประกันชีวิตแบบกรณีผลประโยชน์จ่ายเมื่อเสียชีวิตที่ทุนประกันแปรผันเพิ่มขึ้นทุก ๆ ปี (Increasing insurance) และทุนประกันแปรผันลดลงทุกปี (Decreasing insurance)

นิยามที่ 3.14

$(Ia)_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี ที่กำหนดผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพจำนวน 1 หน่วย ณ ปลายปี ของอายุ $x+1$, 2 หน่วย ของอายุ $x+2$, 3 หน่วยของอายุ $x+3$, ตามลำดับ โดยเพิ่มขึ้นปีละ 1 หน่วยตลอดไป

สำหรับผลประโยชน์ที่จ่าย ณ ต้นปี ของแต่ละปี เราเขียนว่า $(I\ddot{a})_x$

$(Ia)_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตที่กำหนดจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ปลายปี โดยจ่าย 1 หน่วยที่อายุ $x+1$, 2 หน่วย ที่อายุ $x+2$ ตามลำดับ และเพิ่มขึ้นปีละ 1 หน่วย สิ้นสุดการจ่ายผลประโยชน์ที่อายุ $x+n$

ถ้าการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี เราเขียนเป็น $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$

$(Da)_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตที่กำหนดจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ปลายปี โดยจ่าย n หน่วยที่อายุ $x+1$, $n-1$ หน่วยที่อายุ $x+2$, $n-2$ หน่วยที่อายุ $x+3$, ลดลงปีละ 1 หน่วย และครั้งสุดท้าย 1 หน่วยที่อายุ $x+n$ ถ้าการจ่ายผลประโยชน์ทุก ๆ ต้นปี เราเขียนเป็น $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$

นิยามที่ 3.15

$(IA)_x$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี เพื่อจ่ายผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตจำนวน 1 หน่วยของการประกันชีวิตปีแรก, 2 หน่วย ของการประกันชีวิตปีที่ 2 และเพิ่มขึ้นปีละ 1 หน่วยตลอดไป

$(IA)_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี เพื่อจ่ายผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตจำนวน 1 หน่วยของการประกันปีแรก, 2 หน่วยของการประกันชีวิตปีที่ 2 และเพิ่มขึ้นปีละ 1 หน่วยตามลำดับ จนกระทั่ง n หน่วยของการประกันชีวิตปีที่ n หลังจากนั้น ไม่มีการจ่ายผลประโยชน์ดังกล่าวอีก

$(DA)_{x:\overline{n}|}$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ x ปี เพื่อจ่ายผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต n หน่วยของการประกันชีวิตปีแรก, $n-1$ หน่วยของการประกันชีวิตปีที่ 2, ลดลงปีละ 1 หน่วยตามลำดับ จนกระทั่ง 1 หน่วยของการประกันปีที่ n หลังจากนี้ไม่มีการจ่ายผลประโยชน์ดังกล่าวอีก

ทฤษฎีบทที่ 3.8

กำหนดให้ $S_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} N_{x+t}$

$$= \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)D_{x+t}$$

ดังนั้น

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x}$$

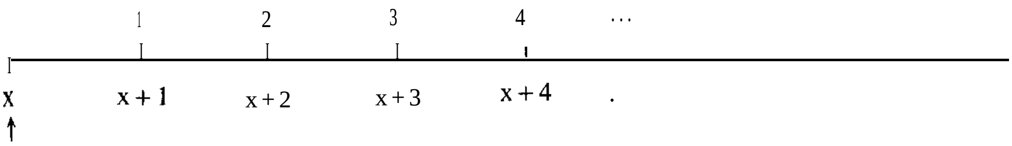
$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

$$(Da)_{x\,\overline{n}|} = \frac{nN_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{nN_x - (S_{x+1} \quad S_{x+n+1})}{D_x}$$

พิสูจน์

1.



$$(Ia)_x = 1\cdot{}_1E_x + 2\cdot{}_2E_x + 3\cdot{}_3E_x + \ldots$$

$$= \sum_{t=0}^{w-x-1} t\cdot{}_tE_x$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{w-x-1} t\cdot D_{x+t}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)(D_{(x+1)+t}$$

$$= \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

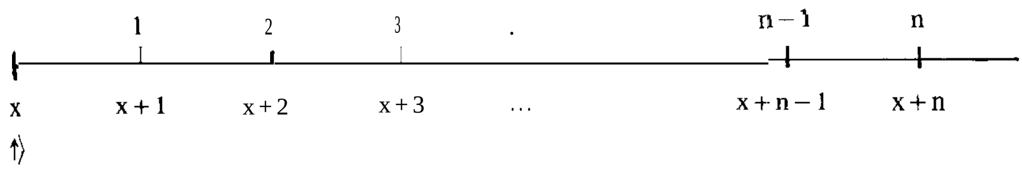
และ

$$(Ii)_x = 1 \cdot {}_0E_x + 2 \cdot {}_1E_x + 3 \cdot {}_3E_x + \ldots$$

$$= \sum_{t=o}^{w-x-1} (t+1)_t \cdot E_x$$

$$= \sum_{t=o}^{w-x-1} \frac{(t+1)D_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{S_x}{D_x}$$



$$(Ia)_{x:\overline{n|}} = 1 \cdot {}_1E_x + 2 \cdot {}_2E_x + 3 \cdot {}_3E_x + \ldots n \cdot {}_nE_x$$

$$= \sum_{t=1}^{n} t \cdot {}_tE_x$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{n} t.D_{x+t}$$

$$\because \sum_{t=1}^{n} t.D_{x+t} = D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \ldots + nD_{x+n}$$

$$= N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n} - n \cdot N_{x+n+1}$$

$$= S_{x+1} - S_{x+n+1} - n.N_{x+n+1}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n|}} \; \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n.N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Iii)_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)_t E_x$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) D_{x+t}$$

$$\because \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) D_{x+t} = D_x + 2.D_{x+1} + 3.D_{x+2} + \ldots + n.D_{x+n-1}$$

$$= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1} - nN_{x+n}$$

$$= S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

4.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & n & n-1 & n-2 & \cdot & 2 & 1 \\
\hline
x & x+1 & x+2 & x+3 & \cdot & x+n-1 & x+n \\
\uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

$$(Da)_{x:\overline{n|}} = n._{1}E_x + (n-1)_{2}E_x + (n-3)_{3}E_x + \ldots + 1._{n}E_x$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (n+1-t)_{t}E_x$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{n} (n+1 \quad t) D_{x+t}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(n.\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} + \sum_{t=1}^{n} D_{x+t} - \sum_{t=1}^{n} t.D_{x+t} \right)$$

$$\because\; n\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} = n(D_{x+1} + D_{x+2} + . + D_{x+n})$$

$$= n(N_{x+1} - N_{x+n+1})$$

$$\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} = N_{x+1} \quad N_{x+n+1}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t \cdot D_{x+t} = S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}$$

$$.(Da)_{x\;\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\left\{ n(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + (N_{x+1} - N_{x+n+1}). - (S_{x+1} - S_{x+n+1} \quad n.N_{x+n+1}) \right\}$$

$$\frac{n.N_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x}$$

5.

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = n._{0}E_x + (n-1)._{1}E_x + (n-2)._{2}E_x + \ldots + 1._{n-1}E_x$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} (n-t)._{t}E_x$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} n._{t}E_x - \sum_{t=0}^{n-1} t._{t}E_x$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{ n.\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} t.D_{x+t} \right\}$$

$$\because \quad n\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = n(N_x - N_{x+n})$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} t.D_{x+t} &= D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \dots + (n-1).D_{x+n-1} \\
&= N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1} - (n-1)N_{x+n} \\
&= N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+n-1} + N_{x+n} - nN_{x+n} \\
&= S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= n(N_x - N_{x+n}) - (S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n}) \\
&= \frac{nN_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.9

กำหนดให้

$$R_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} M_{x+t}$$

$$= \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)C_{x+t}$$

ดังนั้น

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n\cdot M_{x+n}}{D_x}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = \frac{n\cdot M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$$

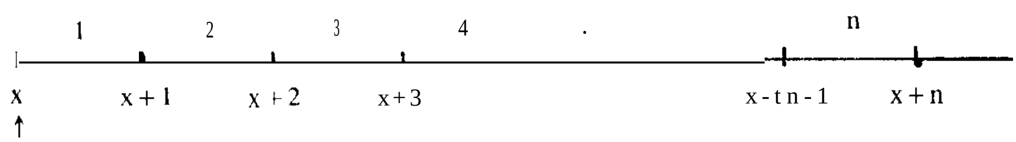
พิสูจน์

1.

$$(IA)_x = \frac{1}{D_x}(C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \dots + (w-x)C_{w-1})$$

$$= \frac{R_x}{D_x}$$

2.



$$(IA)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}(C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots + nC_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}(M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + + M_{x+n-1} - nM_{x+n})$$

$$= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

3.

n	n - 1	n - 2	.		1	
x	x+1	x+2	x+3		x+n−1	x+n

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}(nC_x + (n-1)C_{x+1} + (n-2)C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{n(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}) - (C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (n-1)C_{x+n-1})\right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{n(M_x - M_{x+n}) - (M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + + M_{x+n-1} - (n-1)M_{x+n})\right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{n(M_x - M_{x+n}) - (R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n})\right\}$$

$$= \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$$

ตัวอย่างที่ 3.10 คำนวณหาเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของบุคคลอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพแปรผันได้โดยรับทุก ๆ ปลายปี เริ่มปลายปีอายุ 30 ปี จำนวน 10,000 บาท เพิ่มขึ้นปีละ 1,000 บาท จนถึงอายุ 60 ปี หลังจากนั้นรับผลประโยชน์เบี้ยเลี้ยงชีพรายปีคงที่เท่ากับที่ได้รับที่อายุ 60 ปี

วิธีทำ

	10,000	11,000	12,000	...		39,000	40,000	40,000	40,000	
30	31	32	33	...	59	60	61	62	63	...
0	1	2	3	...	29	30	31	32	33	

วิธีทำ

เราอาจพิจารณาจากตารางข้างล่างดังนี้

เวลา	0	1	2	3	...	29	30	31	32	33
อายุ	30	31	32	33	...	59	60	61	62	63
ผลประโยชน์	0	10,000	11,000	12,000	.	38,000	39,000	40,000	40,000	40,000
การคำนวณ										
$+10{,}000N_{31}$	–	10,000	10,000	10,000		10,000	10,000	10,000	10,000	10,000
$+1{,}000S_{32}$		–	1,000	2,000	.	28,000	29,000	30,000	31,000	32,000
$1{,}000S_{62}$									1,000	2,000
คงเหลือ	0	10,000	11,000	12,000		38,000	39,000	40,000	40,00	40,000

เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ $= \frac{1}{D_{30}}(10{,}000N_{31} + \ ,000S_{32} \quad 1{,}000S_{62})$

$= 313{,}321.75$ บาท

ตัวอย่างที่ 3.11 คำนวณหาค่าเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 40 ปี ที่กำหนดรับผลประโยชน์ในกรณีเสียชีวิต ดังนี้

กรมธรรม์ปีที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ผลประโยชน์	100,000	120,000	140,000	160,000	180,000	200,000	200,000	200,000	200,000	200,000

วิธีทำ

	100,000	120,000	140,000	160,000	180,000	200,000	200,000	200,000	200,000	200,000
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	SO
	1	2	3	4	5	6	1	8	9	10

กรมธรรม์ปีที่	I	2	3	4	5	6	1	8	9	10	II
อายุ	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ผลประโยชน์	100,000	120,000	140,000	160,000	180,000	200,000	200,000	200,000	200,000	200,00	200,000
การคำนวณ											
$+100{,}000M_{40}$	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000
$+20{,}000R_{41}$		20,000	40,000	60,000	80,000	100,000	120,000	140,000	160,000	180,000	200,000
$-20{,}000R_{46}$							20,000	40,000	60,000	80,000	100,000
$-200{,}000M_{50}$											
คงเหลือ											
	100,000	120,000	140,000	160,000	180,000	200,000	200,000	200,000	200,000	200,000	200,000

ดังนั้น

$$\text{เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ} = \frac{1}{D_{40}}(100{,}000M_{40} + 200{,}000R_{41} - 20{,}000R_{46} - 200{,}000M_{50})$$

$$= 6{,}435.11 \text{ บาท}$$

3.6 ข้อสังเกตเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์

การคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิตามที่ได้กล่าวมาแล้วจากหัวข้อ 3.4 และ 3.5 นั้น อาจจะคำนวณได้ง่ายขึ้น เมื่อใช้สัญลักษณ์ Commutation symbol เช่น D_x, M_x, N_x, เป็นต้น ซึ่งจะให้ข้อสังเกตดังนี้

$$\text{เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ} = \frac{\text{สัญลักษณ์ที่กำหนดตามผลประโยชน์}}{D_x}$$

x = อายุ ณ วันคำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ

สัญลักษณ์ที่กำหนดตามผลประโยชน์ กำหนดได้ดังนี้

กรณีอยู่รอด (Survivor)

1. ผลประโยชน์ ณ อายุ y ใด = จำนวนผลประโยชน์ xD_y
2. ถ้าผลประโยชน์จ่ายเป็นค่าคงที่ติดต่อกันเริ่มที่อายุ y สิ้นสุดที่อายุ z
   = จำนวนผลประโยชน์ $x(N_y - N_{z+1})$

กรณีเสียชีวิต

1. ผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตระหว่างอายุ z, z+1
   = จำนวนผลประโยชน์ xC_z
2. ผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตเป็นค่าคงที่ติดต่อกันระหว่างอายุ y และ z
   = จำนวนผลประโยชน์ $x(M_y - M_z)$

ตัวอย่างที่ 3.12 คำนวณหาค่าเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์ตามเงื่อนไขกรมธรรม์ ดังนี้

(ก) รับผลประโยชน์จำนวน 100,000 บาท ถ้าเสียชีวิตระหว่างอายุ 30 ปี และ 40 ปี

(ข) รับผลประโยชน์จำนวน 200,000 บาท ถ้าเสียชีวิตระหว่างอายุ 40 ปี และ 45 ปี

(ค) รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ปีละ 20,000 บาท ทุก ๆ ต้นปี ตั้งแต่อายุ 45 ปี ถึงอายุ 70 ปี

วิธีทำ

ปีละ 20,000

30 100,000 40 200,000 45 70

↑ ←—— กรณีเสียชีวิต ——→ ←—— กรณีอยู่รอด ——→

เราอาจใช้หัวข้อ 3.6 มาคำนวณได้ดังนี้

เศษ

(ก) กรณีเสียชีวิต

จำนวนผลประโยชน์ 100,000 บาท ตั้งแต่อายุ 30 ปี ถึงอายุ 40 ปี

$= 100{,}000(M_{30} - M_{40})$

จำนวนผลประโยชน์ 200,000 บาท ตั้งแต่อายุ 40 ปี ถึงอายุ 45 ปี

$= 200{,}000(M_{40} - M_{45})$

(ข) กรณีอยู่รอด

ผลประโยชน์จำนวน 20,000 บาท ทุก ๆ ปีตั้งแต่อายุ 45 ปีถึงอายุ 70 ปี

$= 20{,}000(N_{45} - N_{71})$

$\therefore$ เศษ $= 100{,}000(M_{30} - M_{40}) + 200{,}000(M_{40} - M_{45}) + 20{,}000(N_{45} - N_{71})$

ส่วน $= D_{30}$

$$\therefore \text{เบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิ} = \begin{aligned} & 100{,}000(M_{30} - M_{40}) \\ & + 200{,}000(M_{40} - M_{45}) \\ & \underline{200{,}000(N_{45} - N_{71})} \\ & \quad D_{30} \end{aligned}$$

$= 102{,}863.87$ บาท

แบบทดสอบบทที่ 3

ใช้ตารางมฤตภาพไทย 2529, อัตราดอกเบี้ย 6%

แบบทดสอบหัวข้อ 3.1, 3.2

1. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นของบุคคลอายุแรกเกิด (อายุ 0 ปี) จะอยู่รอดถึงอายุ x ปี เท่ากับ $\frac{1}{12}\sqrt{100-x}$

   จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการสะสมทรัพย์แท้จริง จำนวน 1 หน่วยของบุคคลอายุปัจจุบัน 20 ปี ระยะเวลาสะสม 15 ปี อัตราดอกเบี้ยทบต้น 5% ต่อปี

2. ${}_nE_x$ จะมีค่าเท่าใด ถ้า

   ก. บุคคลอายุ x จะมีชีวิตอยู่รอดแน่นอนที่อายุ $x+n$

   ข. อัตราดอกเบี้ยเป็นศูนย์

   ค. รวมเงื่อนไขข้อ ก และ ข

3. คำนวณหาค่ามูลค่าปัจจุบันของการชำระหนี้จำนวน 10,000 บาท และ 20,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 3 และ 5 ตามลำดับ ของเจ้าหนี้ปัจจุบันอายุ 30 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 5% ต่อปี โดยมีเงื่อนไขว่า

   ก. มีความแน่นอนว่ามูลหนี้ทั้งสองนั้นต้องได้รับการชำระ

   ข. เจ้าหนี้จะต้องมีชีวิตอยู่รอดเท่านั้นจึงจะได้รับมูลหนี้ดังกล่าว

4. จงพิสูจน์

   ก. ${}_{m+n}E_x = {}_mE_x \cdot {}_nE_x$

   ข. ${}_nE_x = {}_1E_x \cdot {}_1E_{x+1} \cdot {}_1E_{x+2} \ldots {}_1E_{x+n-1}$

   ค. $D_{x+1} = v \cdot p_x \cdot D_x$

5. ชายคนหนึ่งอายุ 30 ปี ได้ฝากเงินกับบริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่งจำนวน 100,000.- บาท เขาจะได้รับเงินจำนวนเท่าใดเมื่ออายุ 50 ปี และมีเงื่อนไขว่า บริษัทประกันชีวิตจะรับเงินที่ฝากไว้ทั้งหมดหากเขาเสียชีวิตก่อนครบอายุ 50 ปี อัตราดอกเบี้ยทบต้น 6%

   แบบทดสอบหัวข้อ 3.3

6. พิสูจน์และอธิบาย

   ก. $$\ell_x \cdot a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t \ell_{x+t}$$

. $a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t {}_tp_x$

ข. $\ddot{a}_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/}q_x \cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}$

ค. $a_x = v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x \cdot \ddot{a}_{x+2}$

7. พิสูจน์

ก. $a_x < \frac{1}{i}$

ข. ${}_{n/}a_x \quad \frac{a_x \cdot a_{x+1} \cdot a_{x+2} \ldots a_{x+n}}{a_{x+1} \cdot a_{x+2} \cdot \bar{a}_{x+3} \ldots \ddot{a}_{x+n}}$

ค. $a_{x+1} = \frac{(1+i)a_x}{p_x}$

ง. $a_x = e_x$ ถ้า $i = 0$

8. กำหนดให้

$\ddot{a}_{20} = 25.85232$

$\ddot{a}_{21} = 25.64379$

$\ddot{a}_{22} = 25.42964$

$\ell_{22} = 9{,}630{,}039$

และ $i = 3\%$

จงคำนวณหา ℓ_{20} และ ℓ_{21}

9. ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี สะสมเงินทุก ๆ ต้นปี ๆ ละ 5,000.- บาท เป็นเวลา 20 ปีติดต่อกัน ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี เงินที่สะสมได้นำไปซื้อกรมธรรม์ประกันชีวิตแบบเบี้ยเลี้ยงชีพตลอดชีพ (Whole life annuity) กำหนดรับผลประโยชน์ตั้งแต่อายุครบ 60 ปี เป็นต้นไป จงคำนวณหาเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีแต่ละปี

10. คำนวณหาเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตคนหนึ่ง อายุ 30 ปี ครบกำหนดเมื่ออายุครบ 60 ปี ซึ่งกำหนดผลประโยชน์ให้เป็นเบี้ยรายปี (Certain annuity) ปีละ 60,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี และหลังจากนั้นจะได้รับเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีตลอดชีพ ปีละ 50,000.- บาท

11. กำหนดให้

$$q_{30} = 0.00213$$
$$q_{31} = 0.00219$$
$$q_{32} = 0.00225$$
$$i = 6\%$$

จงหาค่าของ $\ddot{a}_{30:\overline{4|}}$

12. เพื่อต้องการสร้างทุนการศึกษาแก่บุตรเพื่อการศึกษาในมหาวิทยาลัยเป็นเวลา 4 ปี ๆ ละ 60,000.- บาท ซึ่งกำหนดรับผลประโยชน์อายุ 18 ปี จะต้องชำระเป็นค่าเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิจำนวนเท่าใด ถ้าอายุปัจจุบันของบุตร 10 ปี และ

ก. การรับผลประโยชน์แบบเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี

ข. การรับผลประโยชน์แบบเบี้ยรายปี

ถ้าผู้รับผลประโยชน์เสียชีวิตก่อนอายุ 18 ปี จำนวนเงินนั้นจะถูกริบ

13. พิสูจน์

ก. $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} < \ddot{a}_{\overline{n|}}$

ข. ${}_{n/}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} < v^n \cdot \ddot{a}_{\overline{m|}}$

ค. $\ddot{S}_{x:\overline{n|}} > \ddot{S}_{\overline{n|}}$

ง. $\ddot{S}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{\ddot{a}_x}{{}_nE_x} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

14. ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี สะสมเงินกับบริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่ง ทุก ๆ ต้นปี ๆ ละ 20,000.- บาท เป็นเวลา 20 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละ 6% เมื่อครบกำหนดเขาจะได้รับเงินเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีทันทีเป็นเวลา 25 ปี จงคำนวณจำนวนเงินเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีแต่ละปีที่ได้รับ ถ้า

ก. เงินที่สะสมพร้อมดอกเบี้ยจะจ่ายคืนแก่ทายาททันที หากเขาตายก่อนครบ 20 ปี

ข. บริษัทฯ จะริบเงินทั้งหมดทันที หากเขาตายก่อนครบ 20 ปี

15. บุคคลกลุ่มหนึ่งอายุ 30 ปี ตกลงจะส่งเงินบำรุงในกองทุนคนละ 5,000.- บาท ทุก ๆ ต้นปี เป็นเวลา 20 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% และผู้ที่เสียชีวิตก็หยุดทันที จำนวนเงินที่สะสมพร้อมดอกเบี้ยนี้นำไปลงทุนต่ออีก 10 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% แล้วจำนวนเงินทั้งหมดนี้จะถูกแบ่งให้แก่บุคคลที่อยู่รอดเท่านั้น จงคำนวณจำนวนเงินที่แต่ละคนจะได้รับ

16. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี เมื่อผู้เอาประกันชีวิตอายุครบ 60 ปี ๆ ละ 30,000.- บาท เป็นเวลา 15 ปี และหลังจากนั้นจะได้รับเบี้ยรายปี ๆ ละ 50,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี

แบบทดสอบหัวข้อ 3.4

17. พิสูจน์

ก. $$A_x = v(q_x + p_x \cdot A_{x+1})$$

ข. $$q_x = \frac{(1+i)A_x - A_{x+1}}{1 - A_{x+1}}$$

ค. $$\ell_x \cdot a_x = \ell_{x+1} \cdot A_{x+1} + \ell_{x+2} \cdot A_{x+2} + \cdot + \ell_{w-1} \cdot A_{w-1}$$

ง. $$A, = A,_{:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot A^{1}_{x+n:\overline{n}|} + {}_{2n}E_x \cdot A^{1}_{x+2n\ \overline{n}|} + \dots$$

จ. $$A_x = C_x + {}_1E_x \cdot C_{x+1} + {}_2E_x \cdot C_{x+2} + \dots$$

18. คำนวณหาค่าของ a_x, $\ddot{a}_x$

ถ้า $A_x = 0.3161858$ และ $i = 6\%$

19. คำนวณหาค่าของ $A_{40:\overline{10}|}$ ถ้า $\ell_x = 100 - x$ และ $i = 5\%$

20. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 35 ปี ทุนประกันชีวิต 100,000.- บาท ของกรมธรรม์แบบ

ก. ตลอดชีพ (Whole life)

ข. เฉพาะกาล 10 ปี

ค. สะสมทรัพย์ ระยะเวลา 20 ปี

21. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต จำนวน 100,000.- บาท ภายใน 10 ปี และจำนวน 200,000.- บาท ภายใน 10 ปีต่อมา เมื่ออยู่ครบอายุ 50 ปี จะได้เงินสด 300,000.- บาท

22. พิสูจน์

ก. $$a_{x:\overline{n}|} = \frac{v - A_{x:\overline{n+1}|}}{d}$$

ข. $$\frac{1 - ia_{x:\overline{t-1}|}}{1+i} = \frac{M_x - M_{x+t} + D_{x+t}}{D_x}$$

23. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์ กรณีเสียชีวิตก่อนครบอายุ 60 ปี จำนวน 300,000.- บาท ถ้าอยู่รอดที่อายุ 60 ปี จะได้รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี ๆ ละ 500,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี และหลังจากนั้นจะได้รับเบี้ยรายปี ๆ ละ 60,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี

แบบทดสอบหัวข้อ 3.5 และ 3.6

24. คำนวณมูลค่าปัจจุบันและเขียนอยู่ในรูป Commutation symbol ของการประกันชีวิตบุคคลอายุ x ปี กำหนดรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีเป็นเวลา 25 ปี เริ่มรับผลประโยชน์จำนวน 1 หน่วย ณ อายุ x+5 ปี โดยเพิ่มขึ้นปีละ 0.2 หน่วย เป็นเวลา 10 ปี ตั้งแต่ปีที่ 11 เป็นต้นไป รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีเท่ากันตลอด จำนวนเท่ากับที่ได้รับครั้งสุดท้าย
25. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของบุคคลอายุ 30 ปี กำหนดรับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี เป็นเวลา 30 ปี เริ่มรับผลประโยชน์จำนวน 50,000.- บาท ที่อายุ 30 ปี และเพิ่มขึ้นปีละ 1,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี แล้วเพิ่มขึ้นปีละ 2,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี และเพิ่มขึ้นปีละ 3,000.-บาทของ 10 ปีสุดท้าย
26. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของบุคคลอายุ 35 ปี ได้รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี เป็นเวลา 20 ปี เริ่มรับผลประโยชน์จำนวน 50,000.- บาท ที่อายุ 40 ปี และลดลงปีละ 1,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี หลังจากนั้นได้รับเป็นจำนวนเท่ากันตลอด
27. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของบุคคลอายุ 40 ปี ได้รับผลประโยชน์เป็นเบี้ยเลี้ยงชีพรายปี เริ่มรับผลประโยชน์จำนวน 30,000.- บาท ที่อายุ 41 ปี และปีต่อ ๆ ไปเพิ่มขึ้นปีละ 2,000.- บาท จนถึงจำนวน 50,000.- บาท แล้วลดลงปีละ 1,000.- บาท จนถึงจำนวน 35,000.- บาท หลังจากนั้นได้รับจำนวนคงที่นี้ตลอดไป
28. พิสูจน์

    ก. $R_x = v \cdot S_x - S_{x+1}$

    ข. $R_x = N_x - d \cdot S_x$

    ค. $\ddot{a}_x = (IA)_x + d(I\ddot{a})_x$
29. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของบุคคลอายุ 35 ปี กำหนดผลประโยชน์ในกรณีเสียชีวิตเป็นจำนวน 100,000.- บาท ของกรมธรรม์ปีแรก และเพิ่มขึ้นปีละ 10,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี หลังจากนั้นจำนวนทุนประกันเท่ากันตลอดชีพ
30. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 29 ปี กำหนดผลประโยชน์ในกรณีเสียชีวิตเป็นจำนวน 200,000.- บาท ของกรมธรรม์ปีแรก และลดลงปีละ 10,000.- บาท เป็นเวลา 10 ปี หลังจากนั้นทุนประกันเท่ากันตลอดชีพ
31. คำนวณเบี้ยประกันชีวิตเชิงเดี่ยวสุทธิของกรมธรรม์แบบสะสมทรัพย์ที่แปรผันทุนประกันได้ของผู้เอาประกันชีวิตอายุ 1 ขวบ โดยรับผลประโยชน์ในกรณีเสียชีวิตของกรมธรรม์ปีแรกจำนวน 200,000.- บาท และเพิ่มขึ้นปีละ 20,000.- บาท จนถึงทุนประกัน 500,000.-

บาท หลังจากนั้นทุนประกันเท่ากันตลอด จนกระทั่งครบอายุ 21 ปี ซึ่งผู้เอาประกันชีวิตจะได้รับผลประโยชน์กรณีอยู่รอดจำนวน 500,000.- บาทด้วย

แบบทดสอบรวม 3.1 - 3.6

32. กำหนดตารางของ X, D_x และ N_x ดังนี้

X	D_x	N_x
50	30	290
51	29	270
52	28	250
53	27	230
54	26	210
55	25	190

ผู้เอาประกันชีวิตรายหนึ่งอายุ 50 ปี มีค่าความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิตระหว่างอายุ 50 และ 51 มากกว่าปกติ ซึ่ง

$$q'_{50} = q_{50} + 0.03$$

นอกนั้นเป็นไปตามตารางที่กำหนด

จงคำนวณหาค่า a_{50} ของผู้เอาประกันชีวิตรายนี้ อัตราดอกเบี้ยทบต้น 6%

33. จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของเบี้ยเลี้ยงชีพรายปีของบุคคลอายุ x ปี และได้รับผลประโยชน์จำนวน h ที่อายุ y เพิ่มขึ้นปีละ k เป็นจำนวน n ครั้ง
34. คำนวณมูลค่าปัจจุบันของข้อ (33) ถ้าลดลงปีละ k
35. คำนวณมูลค่าปัจจุบันของข้อ (33) ถ้าเบี้ยเลี้ยงชีพรายปียังคงได้รับตลอดไป และได้รับจำนวนคงที่หลังจากได้รับจำนวน n ครั้งแล้ว