บทที่ 1 คณิตศาสตร์ดอกเบี้ยทบต้น
(Mathematics of compound interest)

1.1 บทนำ (Introduction)

1.2 ฟังก์ชั่นมูลค่าสะสม (Accumulation function)

1.3 อัตราดอกเบี้ย (Rate of interest)

1.4 การคำนวณแบบดอกเบี้ยทบต้น (Compound interest)

1.5 มูลค่าปัจจุบัน (Present value)

1.6 อัตราดอกเบี้ยส่วนลดทบต้น (Compound discount)

1.7 เบี้ยรายปี (Annuity)

1.8 แบบทดสอบ

บทที่ 1
คณิตศาสตร์ดอกเบี้ยทบต้น
(Mathematics of compound interest)

1.1 บทนำ (Introduction)

เป็นที่ทราบกันดีว่า **เงิน (Money)** มีความสำคัญในการแลกเปลี่ยนเพื่อให้ได้มาในสิ่งที่ต้องการ ดังนั้น ธุรกิจการเงินจึงมีความสำคัญยิ่ง โดยเฉพาะการกู้และยืมเงินซึ่งตัวประกอบที่ทำให้เกิดการกู้ยืมเงินนั้น มีดังนี้

1. จำนวนเงินที่ให้กู้ (Principal)
2. ผู้ให้กู้ (Lender)
3. ผู้กู้ (Borrower)
4. ระยะเวลาการกู้ (Term)

อนึ่ง จำนวนเงินที่ต้องชำระคืนจากการกู้มักจะมีจำนวนมากกว่าจำนวนที่ให้กู้ ทั้งนี้เพราะในธุรกิจการเงินนั้น จำนวนเงินย่อมมีจำนวนเพิ่มมากขึ้น (Productive) แม้ว่าเวลาจะผ่านไปเพียงเล็กน้อยก็ตาม จำนวนเงินที่เพิ่มขึ้นนี้เราเรียกว่า **ดอกเบี้ย (Interest)**

การคำนวณและการตั้งข้อสมมติฐานหาจำนวนดอกเบี้ยมีอยู่หลายวิธี วิธีที่นิยมกันในปัจจุบัน คือ **วิธีการคำนวณแบบดอกเบี้ยคงต้น (Simple interest)** และ **ดอกเบี้ยทบต้น (Compound interest)**

การคำนวณด้วยวิธีดอกเบี้ยทบต้น ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณกำหนดอัตราเบี้ยประกันชีวิต (Life insurance premium rate) ซึ่งเราจะได้ศึกษาในบทต่อ ๆ ไป

ในที่นี้เราจะศึกษาการคำนวณดอกเบี้ยด้วยวิธีดอกเบี้ยทบต้น ที่จำเป็นใช้สำหรับเนื้อหาในวิชานี้เท่านั้น

1.2 ฟังก์ชั่นมูลค่าสะสม (Accumulation function)

ก่อนที่เราจะทราบการกำหนดวิธีการคำนวณดอกเบี้ย เราจำเป็นต้องทราบคำต่าง ๆ และข้อสมมติฐานเกี่ยวกับดอกเบี้ยก่อนดังนี้

นิยามที่ 1.1

เงินต้น (Principal) คือ จำนวนเงินที่ผู้กู้ (Borrower) ได้รับจาก การกู้ (Lending) อาจจะเป็นจำนวนเงินครั้งเดียว หรือหลายครั้ง ถ้าเป็นจำนวนเงินที่ให้กู้ไปครั้งเดียวตั้งแต่แรก เรียกว่า เงินต้นกำเนิด (Original Principal) เงินต้นที่มีการชำระคืนไปบางส่วนแล้ว จำนวนเงินต้นเฉพาะส่วนที่ยังไม่ชำระเราเรียกว่า เงินต้นค้างชำระ (Outstanding Principal)

มูลค่าสะสม (Accumulated Value) คือ มูลค่าของจำนวนเงินต้น ณ เวลาใดเวลาหนึ่งระหว่างเวลาการกู้ยืม (Period of transaction) หรืออาจจะเป็นมูลค่า ณ วันสิ้นสุดสัญญาการกู้ยืมก็ได้

ดอกเบี้ย (Interest) คือ จำนวนเงินที่แตกต่างกันระหว่างมูลค่าสะสมและเงินต้น ซึ่งเป็นจำนวนเงินที่ผู้ให้กู้ได้รับเพิ่มจากการให้กู้ (Money earned)

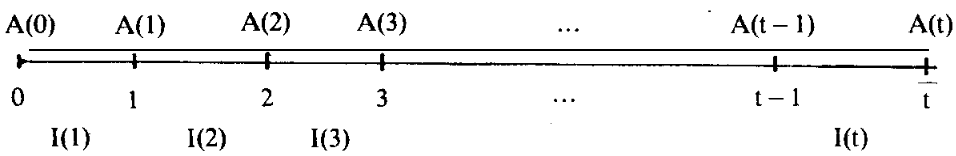
โดยปกติแล้วการคำนวณมูลค่าดอกเบี้ย จะคำนวณ ณ เวลาสิ้นสุดของแต่ละอันตรภาคดอกเบี้ย (Interest intervals) ซึ่งเป็นระยะเวลาครบรอบการคำนวณดอกเบี้ยแต่ละครั้งแล้วแต่สัญญาการกู้ยืมนั้น ๆ เช่น อันตรภาคดอกเบี้ยทุก ๆ 3 เดือน, อันตรภาคดอกเบี้ยทุก ๆ ปี ซึ่งหมายความว่า การคำนวณดอกเบี้ยทุก ๆ ครบรอบเวลา 3 เดือน, การคำนวณดอกเบี้ยทุก ๆ ครบรอบปี เป็นต้น

จากนิยาม 1.1 เราจะสรุปได้ว่า

1. **ในช่วงเวลาเดียวกัน**

มูลค่าสะสม = เงินต้น + ดอกเบี้ย ....(1.1)

ซึ่งเราอาจอธิบายได้โดยการกำหนด สัญลักษณ์ (Symbol) ดังนี้



กำหนดให้

$A(t)$ = มูลค่าสะสม ณ เวลาที่ t, $t \geqslant 0$

$\therefore$ $A(0)$ = เงินต้นกำหนด (Original principal)

และ $I(t)$ = ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นระหว่างช่วงเวลา $t-1$ และ t โดยที่ $t \geqslant 1$

ดังนั้น

$$A(1) = A(0)+I(1)$$
$$A(2) = A(1)+I(2)$$
$$A(3) = A(2)+I(3)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$A(t) = A(t-1)+I(t) \qquad \ldots\ldots..(1.2)$$

2. ตามสมการ (1.1) ถ้าเงินต้นมีจำนวนคงที่ มูลค่าสะสมจะมีจำนวนมากเพียงใดย่อมขึ้นอยู่กับจำนวนดอกเบี้ย นั่นก็คือ ถ้าดอกเบี้ยมีระบบและระเบียบในการคำนวณที่แน่นอน การคำนวณหามูลค่าสะสมก็สามารถคำนวณได้เป็นจำนวนที่แน่นอนได้เช่นเดียวกัน ซึ่งมูลค่าดังกล่าวนี้มีค่าแปรผันโดยตรงกับเวลาที่ให้กู้ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่ง มูลค่าสะสมจะเป็นจำนวนเท่าใดย่อมกำหนดได้เองโดยผู้ให้กู้

ดังนั้น การคำนวณมูลค่าสะสมเราจึงกำหนดเป็น ฟังก์ชั่นมูลค่าสะสม (Accumulation function) ได้ดังนี้

กำหนดให้

$a(t)$ = มูลค่าสะสม ณ เวลา t, $t \geqslant 0$

และ $a(0) = 1$

ดังนั้น เราเรียก $a(t)$ เป็น ฟังก์ชั่นมูลค่าสะสม (Accumulation function) ณ เวลา t ของเงินต้น 1 หน่วย

ถ้าเงินต้น = P

$$A(t) = P.a(t) \qquad ; t \geqslant 0 \qquad \ldots\ldots..(1.3)$$

ตัวอย่างที่ 1.1 เงินกู้จำนวน 100,000 บาท กำหนดชำระคืน 5 ปี ดอกเบี้ยคำนวณเป็นรายปี และกำหนดฟังก์ชั่นมูลค่าสะสมเป็น

$$a(t) = 1+(0.02)t$$

จงคำนวณ (1) มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 5

(2) จำนวนดอกเบี้ยที่ได้รับ ณ สิ้นปีที่ 5

วิธีทำ (1) P = เงินต้นจำนวน 100,000 บาท

$$t = 5$$
$$\therefore \; A(5) = 100{,}000\{1+(0.02)5\}$$
$$= 110{,}000$$

$\therefore$ มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 5 เท่ากับ 110,000 บาท

(2) ดอกเบี้ยที่ได้รับ ณ สิ้นปีที่ 5 = 110,000 − 100,000

= 10,000 บาท

1.3 อัตราดอกเบี้ย (Rate of interest)

จากสมการ (1.3) เราอาจพิจารณาได้ว่า จำนวนเงินต้น $A(t-1)$ ผลิตดอกเบี้ยจำนวน $I(t)$ ภายใน 1 หน่วยเวลา ดังนั้น จำนวนเงินต้น 1 หน่วยในช่วงระหว่างเวลา $t-1$ และ t นั้น จะสามารถผลิตดอกเบี้ยได้จำนวนเท่ากับ $\frac{I(t)}{A(t-1)}$ ซึ่งจำนวนนี้เราเรียกว่า อัตราดอกเบี้ย (Rate of interest)

นิยามที่ 1.2

อัตราดอกเบี้ย (Rate of interest) คือ จำนวนดอกเบี้ยที่ได้จากการลงทุนของเงินต้น 1 หน่วย ภายใน 1 หน่วยเวลา หรือเป็นอัตราส่วนของจำนวนดอกเบี้ยต่อจำนวนเงินต้นภายใน 1 หน่วยเวลานั้น ๆ

จากนิยาม 1.2 เราสรุปได้ว่า

$$\text{อัตราดอกเบี้ย} = \frac{\text{จำนวนดอกเบี้ยภายใน 1 หน่วยเวลาใด ๆ}}{\text{จำนวนเงินต้นของหน่วยเวลานั้น}}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้

$i(t)$ = อัตราดอกเบี้ยระหว่างช่วงเวลา $t-1$ และ t

$$\therefore \; i(t) = \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} \qquad ; t \geqslant 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1.4)$$

ตัวอย่างที่ 1.2 คำนวณหาอัตราดอกเบี้ยจากตัวอย่างที่ 1.1 ของช่วงเวลา (2, 3) ; (3, 4) ; (4, 5)

วิธีทำ

(1) อัตราดอกเบี้ยของช่วงเวลา (2, 3)

$$i(3) = \frac{\{(1+(0.02)3\}-\{1+(0.02)2\}}{1+(0.02)2}$$

$$= 0.01923$$

(2) อัตราดอกเบี้ยของช่วงเวลา (3, 4)

$$i(4) = \frac{\{1+(0.02)4\}-\{1+(0.02)3\}}{1+(0.02)3}$$

$$= 0.018867$$

(3) อัตราดอกเบี้ยของช่วงเวลา (4, 5)

$$i(5) = \frac{\{1+(0.02)5\} \quad \{1+(0.02)4\}}{1+(0.02)4}$$

$$= 0.018518$$

จากตัวอย่าง 1.2 จะเห็นว่าแต่ละ i(t) อาจจะมีมูลค่าเท่ากัน หรือแตกต่างกันได้

การคำนวณดอกเบี้ยในธุรกิจการเงินโดยทั่ว ๆ ไปนั้น มักจะนิยมใช้วิธีการคำนวณดอกเบี้ย 2 วิธี คือ

1. ดอกเบี้ยที่ผลิตได้แต่ละ 1 หน่วยเวลามีมูลค่าเท่ากัน
2. อัตราดอกเบี้ยของแต่ละ 1 หน่วยเวลามีมูลค่าเท่ากัน

วิธีแรก มักจะใช้กับระยะเวลาอันสั้น เช่น ประมาณ 3 – 4 ปี ซึ่งเรียกว่า วิธีคำนวณแบบดอกเบี้ยคงต้น (Simple Interest)

วิธีที่สอง มักจะใช้กับระยะเวลานานกว่า เช่น มากกว่า 5 ปีขึ้นไป เรียกว่า วิธีคำนวณแบบดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest) และในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะวิธีคำนวณแบบนี้เท่านั้น

1.4 การคำนวณดอกเบี้ยแบบทบต้น (Compound interest)

นิยามที่ 1.3

วิธีคำนวณดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest Method) หมายถึง วิธีการนำเอาดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในหน่วยเวลาหนึ่งมารวมกับเงินต้นของหน่วยเวลานั้น เพื่อเป็นเงินต้นของหน่วยเวลาต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 1.1 กำหนดให้เงินต้น 1 หน่วย ณ $t = 0$

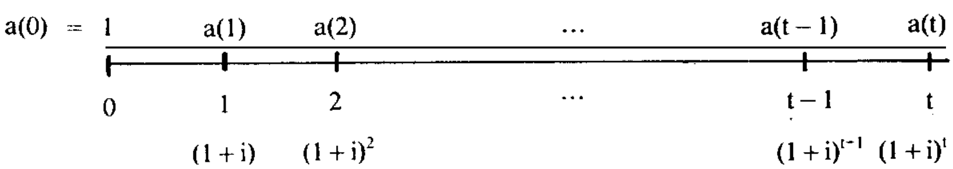
ด้วยวิธีการคำนวณดอกเบี้ยแบบดอกเบี้ยทบต้น

โดยที่ $i = a(1) - a(0)$

ดังนั้น

$$a(t) = (1+i)^t \quad ; t \geq 0$$

พิสูจน์



ณ สิ้นปีที่ 1 $a(1) = 1+i$

ณ สิ้นปีที่ 2 $a(2) = (1+i)+i(1+i)$

$= (1+i)^2$

ณ สิ้นปีที่ 3 $a(3) = (1+i)^2+i(1+i)^2$

$= (1+i)^3$

ณ สิ้นปีที่ t $a(t) = (1+i)^t$

หมายเหตุ

อัตราดอกเบี้ยต่อ 1 หน่วยเงินต้น i, หมายถึง

$$i = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{I(1)}{a(0)} = I(1)$$

ถ้าอัตราดอกเบี้ยต่อ 100 หน่วยเงินต้น อัตราดอกเบี้ยนั้นจะกำหนดเป็นเปอร์เซ็นต์ เช่น อัตราดอกเบี้ย 10% หมายถึง อัตราดอกเบี้ยที่ผลิตดอกเบี้ยได้ 10 หน่วย ต่อ 100 หน่วย ของเงินต้น

ตัวอย่างที่ 1.3 จำนวนเงินกู้ 100,000 บาท กำหนดชำระคืนให้หมดภายใน 10 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% ต่อปี

(ก) คำนวณมูลค่าสะสมเมื่อสิ้นปีที่ 10

(ข) คำนวณดอกเบี้ยที่ได้รับทั้งสิ้นเมื่อสิ้นปีที่ 10

(ค) ถ้า ณ สิ้นปีที่ 6 ชำระคืนจำนวน 60,000 บาท เงินที่ต้องชำระคืนเมื่อสิ้นปีที่ 10 เป็นเท่าใด

วิธีทำ

(ก) มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 10 $= 100(1+0.08)^{10}$

$= 215,892.50$ บาท

(ข) ดอกเบี้ยทั้งสิ้นที่ได้รับ ณ สิ้นปีที่ 10 $= 215,892.50 - 100,000$

$= 115,892.50$ บาท

(ค) เงินต้นค้างชำระ ณ สิ้นปีที่ 6 = เงินสะสมปีที่ 6 – เงินชำระคืน 60,000

$= 100,000(1.08)^6 - 60,000$

$= 98,687.43$ บาท

$\therefore$ เงินที่ต้องชำระคืนเมื่อสิ้นปีที่ 10 $= 98{,}687.43\,(1.08)^{4}$

$= 134{,}263.16$ บาท

1.5 มูลค่าปัจจุบัน (Present value)

ตั้งแต่หัวข้อ 1.1 – 1.4 เราได้ศึกษาวิธีการคำนวณมูลค่าสะสม เมื่อกำหนด เงินต้น, อัตราดอกเบี้ย และระยะเวลา ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดอัตราดอกเบี้ย, ระยะเวลาในอนาคต และมูลค่าสะสม เราก็สามารถคำนวณหามูลค่าเงินต้น (Principal) นั้นได้

นิยามที่ 1.4

มูลค่าปัจจุบัน (Present value) ของมูลค่าสะสมใด หมายถึง จำนวนเงินต้น ณ เวลาหนึ่ง ซึ่งเมื่อรวมกับจำนวนดอกเบี้ยตามระยะเวลาที่กำหนดจะเท่ากับมูลค่าสะสมนั้น

นิยามที่ 1.5

กำหนดให้ $v = \dfrac{1}{1+i}$

เราเรียกมูลค่า v ว่า ตัวประกอบส่วนลด (Discount factor)

ทฤษฎีบทที่ 1.2

มูลค่าปัจจุบันของเงินสะสมมูลค่า 1 ณ เวลา t ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i จะมีมูลค่า v^t

พิสูจน์

$A(0) = v^t$ $A(t) = 1$

0 ดอกเบี้ยทบต้น $= i$ t

ณ สิ้นปีที่ t

$$A(t) = A(0)(1+i)^t$$
$$= 1$$
$$A(0) = \frac{1}{(1+i)^t}$$
$$= v^t$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จะต้องฝากเงินในธนาคารจำนวนเท่าใด จึงจะได้ยอดเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 5 จำนวน 100,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% ต่อปี

วิธีทำ

เงินที่ต้องฝากในธนาคาร = มูลค่าปัจจุบันของเงินสะสม 100,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5

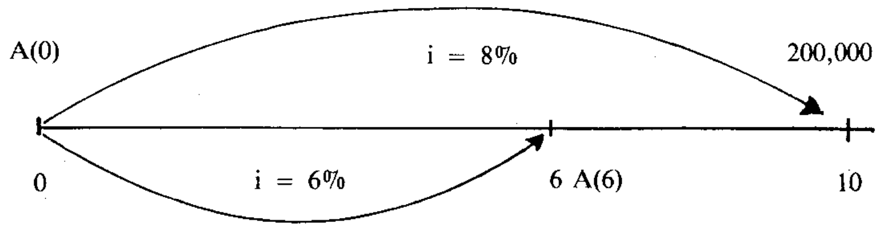
$$\therefore \text{ จำนวนเงินฝากที่ควรจะเป็น } = 100{,}000\, v^5$$

$$\frac{100{,}000}{(1.08)^5}$$

$$= 54{,}026.89 \text{ บาท}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จำนวนเงินกู้ที่ต้องชำระคืน ณ สิ้นปีที่ 10 ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% เป็นเงิน 200,000 บาท ถ้าต้องการชำระคืน ณ สิ้นปีที่ 6 ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% จะเป็นจำนวนเงินเท่าใด

วิธีทำ



∵ จำนวนเงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบันของทั้งสองกรณีมีมูลค่าเท่ากัน

∴ มูลค่าปัจจุบันของเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 6 = มูลค่าปัจจุบันของเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 10

ถ้า A(6) = มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 6 ของ $i = 6\%$

$$\therefore \quad A(6)\cdot v_{0.06}^{6} = 200{,}000\, v_{0.08}^{10}$$

$$A(6) = \frac{200{,}000\, v_{0.08}^{10}}{v_{0.06}^{6}}$$

$$= \frac{200{,}000(1/1.08)^{10}}{(1/1.06)^{6}}$$

$$= 147{,}005.97$$

จำนวนเงินที่ต้องชำระคืน ณ สิ้นปีที่ 6 = 147,005.97 บาท

1.6 อัตราดอกเบี้ยส่วนลดแบบทบต้น (Compound discount interest rate)

บางครั้งผู้ให้กู้ (The lender) จะนำเอาดอกเบี้ยที่จะเกิดขึ้นในหน่วยเวลานั้นมาหักออกจากเงินต้น (Principal) ก่อน ดังนั้น ผู้กู้ (The borrower) จึงได้รับเงินจำนวนที่กู้หักด้วยดอกเบี้ย เช่น จำนวนเงินกู้ 100 บาท อัตราดอกเบี้ย 10% แบบส่วนลด ดังนั้น ผู้กู้จะได้รับเงินไป $100 - 10 = 90$ บาท แต่เมื่อนำมาชำระคืนเมื่อสิ้นปีต้องชำระคืน 100 บาท เป็นต้น

นิยามที่ 1.6

อัตราดอกเบี้ยส่วนลด (Rate of discount) เป็นอัตราส่วนของจำนวนดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นระหว่างหน่วยเวลาต่อจำนวนเงินปลายเทอมของหน่วยเวลานั้น

จากนิยาม 1.6 เราสามารถคำนวณอัตราดอกเบี้ยส่วนลดได้ดังนี้

กำหนดให้

$d(t)$ = อัตราดอกเบี้ยส่วนลดของช่วงเวลา $t-1$ และ t

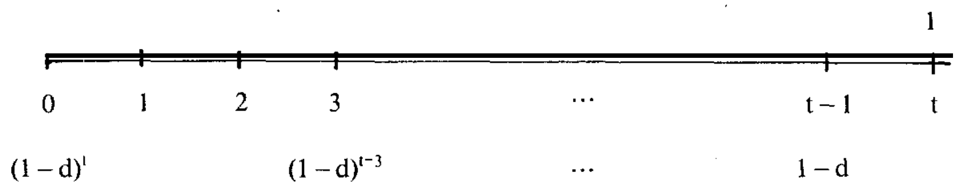
$$\therefore\ d(t) = \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)} \quad ; t \geqslant 1 \qquad \ldots\ldots\ (1.5)$$

ในกรณีที่เป็น อัตราส่วนลดแบบทบต้น (Compound discount rate) มูลค่าของ d จะมีจำนวนเท่ากันของทุกช่วงเวลา ซึ่งละไว้ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบทที่ 1.3

มูลค่าปัจจุบันของเงินมูลค่าสะสม 1 หน่วย ณ เวลาที่ t ด้วยอัตราดอกเบี้ยส่วนลดทบต้น d จะมีมูลค่า $(1-d)^t$

พิสูจน์



มูลค่า ณ สิ้นปีที่ $t = 1$

ด้วยอัตราส่วนลด d แบบทบต้น

$\therefore$ มูลค่า ณ สิ้นปีที่ $t-1 = 1-d$

มูลค่า ณ สิ้นปีที่ $t-2 \quad = \quad (1-d)-d(1-d)$

$$= (1-d)'$$

มูลค่า ณ สิ้นปีที่ $t-3 \quad = \quad (1-d)^2-d(1-d)^2$

$$= (1-d)^3$$

มูลค่า ณ สิ้นปีที่ 0 $\quad = (1-d)'$

ทฤษฎีบทที่ 1.4

กำหนด อัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

อัตราดอกเบี้ยส่วนลด d ต่อปี

ดังนั้น

$$d = iv$$
$$= 1-v$$

พิสูจน์

1 - d

0

$$\because \ A(0) = 1-d$$

$$\mathbf{A(1) = !}$$

$$\therefore \ i = \frac{1-(1-d)}{1-d}$$

$$\frac{d}{I-d}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$= iv$$

และ

$$d = 1-\frac{1}{1+i}$$

$$= 1-v$$

ตัวอย่างที่ 1.6 คำนวณมูลค่าปัจจุบันของเงินที่ต้องชำระคืนเงินกู้ ณ สิ้นปีที่ 5 จำนวน 100,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยส่วนลดทบต้น 8% ต่อปี

วิธีทำ

$$\text{มูลค่าปัจจุบัน} = 100{,}000(1-0.08)^5$$
$$= 65{,}908.15 \text{ บาท}$$

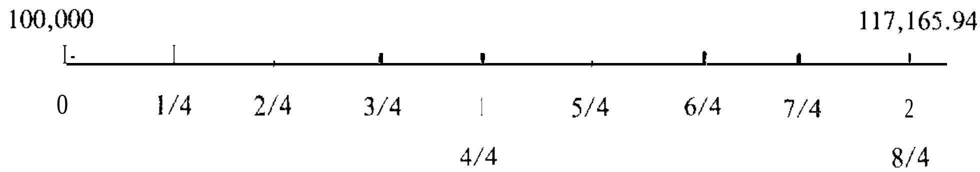
หมายเหตุ

1. อัตราดอกเบี้ยที่กำหนดทบต้นรายปี เรียกว่า Effective interest rate

2. อัตราดอกเบี้ยที่กำหนดทบต้นหลายครั้งต่อปี เรียกว่า Nominal rate of interest เช่น Nominal 8% Compounded quarterly หมายความว่า อัตราดอกเบี้ยทบต้น 2% ทุก ๆ รอบ 3 เดือน ดังนั้น เมื่อดอกเบี้ยทบต้นครบปีอัตราดอกเบี้ยเมื่อคำนวณแบบ effective rate จะไม่เท่ากับ 8%

ตัวอย่างที่ 1.7 คำนวณมูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 2 ของเงินต้น 100,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น Nominal 8% quarterly และถ้าคำนวณแบบ effective rate จะเป็นอัตราดอกเบี้ยเท่าใด

วิธีทำ



(ก) มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 2 $= 100{,}000(1+0.02)^8$

$= 117{,}165.94$ บาท

(ข) i = อัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี

$$1 + i = (1 + 0.02)'$$
$$i = 8.2432\%$$

1.7 เบี้ยรายปี (Annuity)

การชำระคืนเงินกู้ อีกวิธีหนึ่งที่นิยมกันมากเป็นการผ่อนชำระ เป็นรายงวดติดต่อกัน แต่ละงวดอาจจะเท่ากันหรือไม่ก็ได้ แต่โดยทั่วไปมักจะมีมูลค่าเท่ากัน หน่วยเวลาแต่ละงวดก็อาจจะเป็นรายเดือน, รายสามเดือน หรือรายปี

ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะ การชำระเงินเป็นรายปีติดต่อกัน

นิยามที่ 1.7

เบี้ยรายปี (Annuity) หมายถึง การชำระเงินเป็นประจำทุก ๆ หน่วยเวลา ติดต่อกัน (Series of periodic payments) ถ้าระยะเวลาของการชำระมีการสิ้นสุด เรียกว่า เบี้ยรายปีตามกำหนด (Annuity – Certain)

เบี้ยรายปีต้นงวด (Annuity-due) หมายถึง เบี้ยรายปีที่มีการชำระ ณ ทุก ๆ ต้นงวดของแต่ละหน่วยเวลานั้น (Payments at the beginings of the payments periods)

เบี้ยรายปีปลายงวด (Annuity-immediate) หมายถึง เบี้ยรายปีที่มีการชำระ ณ ทุกปลายงวดของแต่ละหน่วยเวลานั้น (Payments at the ends of the payments periods)

นิยามที่ 1.8

$a_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า a angle n at i) คือ มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยรายปีปลายงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นจำนวน n ครั้ง ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า a double-dot angle n at i) คือ มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยรายปีต้นงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นเวลา n ครั้ง ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

$m/\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า m deffered a angle n at i) คือ มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยรายปีปลายงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นจำนวน n ครั้ง งวดแรกได้รับปลายงวดของปีที่ m+1 ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

$m/\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า m defered double-dot a angle n at i) คือ มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยรายปีต้นงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นจำนวน n ครั้ง งวดแรกได้รับต้นงวดของปีที่ m+1 ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

นิยามที่ 1.9

$s_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า s angle n at i) คือ มูลค่าสะสมของเบี้ยรายปีปลายงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นเวลา n ครั้ง ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ (อ่านว่า s double-dot angle n at i) คือ มูลค่าสะสมของเบี้ยรายปีต้นงวด ๆ ละ 1 หน่วย ได้รับติดต่อกันเป็นจำนวน n ครั้ง ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี

หมายเหตุ

1. เพื่อความเข้าใจลำดับการชำระแบบเบี้ยรายปี นิยมเขียน แผนภาพ (Diagram) เป็นเส้นตรง โดยวันแรกของข้อสัญญา (evaluation date) จะถูกกำหนดด้วยหมายเลข 0 และหน่วยเวลาถัดไปเป็นเลข 1, 2, 3 ตามลำดับ เช่น เบี้ยรายปีปลายงวด จำนวน 5 ครั้ง เริ่มสัญญาวันที่ 1 มีนาคม 2531 ดังนั้น เขียนแผนภาพได้ดังนี้

R	R	R	R	R

0	1	2	3	4	5
1/3/31	1/3/32	1/3/33	1/3/34	1/3/35	1/3/36

– วันเริ่มสัญญา วันที่ 1 มี.ค. 2531 ให้เป็นหมายเลข 0

– วันปลายงวดของปีแรก และเสมือนเป็นวันต้นงวดของปีที่ 2 กำหนดให้เป็นหมายเลข 1 ทำดังนี้ต่อ ๆ กันไป

ดังนั้น การชำระครั้งสุดท้ายตรงกับวันที่ 1 มี.ค. 2536

2. การคำนวณหาวันที่ชำระครั้งสุดท้าย สำหรับเบี้ยรายปีต้นงวดให้ วัน, เดือน เช่นเดิม จำนวนปีเพิ่มอีก $n-1$

สำหรับเบี้ยรายปีปลายงวดให้ วัน, เดือน เช่นเดิม จำนวนปีเพิ่มอีก n

ทฤษฎีบทที่ 1.5

กำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี ระยะเวลารับเบี้ยรายปี n ครั้ง ดังนั้น

(ก) $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-v^n}{i}$ (ข) $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-v^n}{d}$

(ค) $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ (ง) $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{d}$

พิสูจน์

(ก)

	1	1	1	.	1	1
0	1	2	3	.	n - 1	n

$\uparrow$ $a_{\overline{n}|i}$

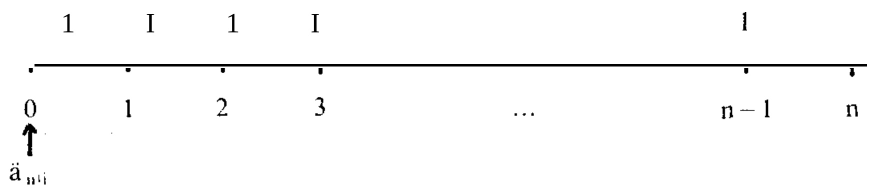
$$a_{\overline{n}|i} = v+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1}+v^n$$

$$= \frac{v(1-v^n)}{1-v}$$

$$= v\frac{(1-v^n)}{iv}$$

$$= \frac{1-v^n}{i}$$

(ข)



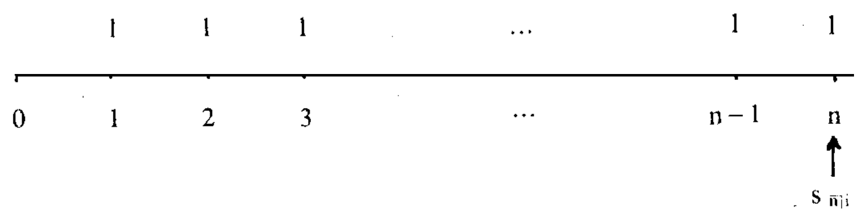
$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1}$$

$$= \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$= \frac{1 - v^n}{iv}$$

$$= \frac{1 - v^n}{d}$$

(ค)

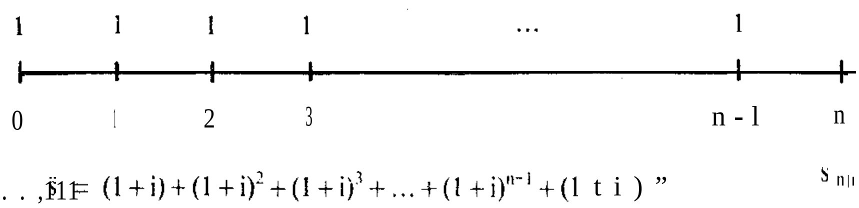


$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(ง)



$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

$$= (1+i)\left\{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right\}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{iv}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

หมายเหตุ

การคำนวณหามูลค่าปัจจุบัน หรือมูลค่าสะสม ณ วันใด ให้เขียนลูกศรกำกับ ณ วันนั้น

ทฤษฎีบทที่ 1.6

(ก) $$m/a_{\overline{n}|i} = v^m a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}$$

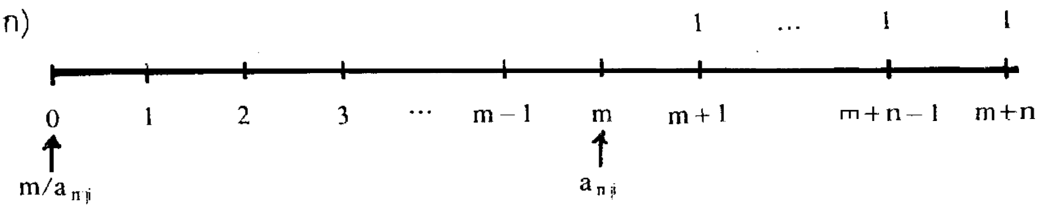
(ข) $$m/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|i} - \ddot{a}_{\overline{m}|i}$$

(ค) $$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i) = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

(ง) $$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i) = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

พิสูจน์

(ก)



ณ เวลาที่ m มูลค่าปัจจุบันของเงินเบี้ยรายปี = $a_{\overline{n}|i}$

ณ เวลาที่ 0 มูลค่าปัจจุบันของเงินเบี้ยรายปี = $v^m a_{\overline{n}|i}$

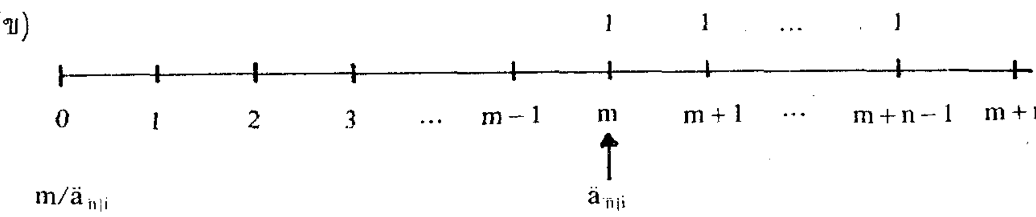
$= v^m(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n)$

$= v^{m+1} + v^{2+m} + v^{3+m} + \ldots + v^{m+n-1} + v^{m-n}$

$= v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \ldots + v^{m+n-1} + v^{m+n} - (v + v^2 + v^3 + \quad + v^1 \quad v$

$= a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}$

(ข)



ณ เวลาที่ m มูลค่าปัจจุบันของเงินเบี้ยรายปี = $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

ณ เวลาที่ 0 มูลค่าปัจจุบันของเงินเบี้ยรายปี = $v^m\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

$$v^m\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^m(1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1})$$

$$= v^m+v^{m+1}+v^{m+2}+\ldots+v^{m+n-1}$$

$$= (1+v+v^2+v^3+\ldots+v^m+v^{m+1}+v^{m+2}+\ldots+v^{m+n-1})-(1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{m-1})$$

a,,,,,, -a $_{m|i}$

(ค) $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1+v+v^2+\ldots+v^{n-1}$

$$= \frac{v}{v}(1+v+v^2+\ldots+v^{n-1})$$

$$= \frac{v+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1}+v^n}{v}$$

$$= (1+i)a_{\overline{n}|i}$$

และ $= 1+(v+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1})$

$$= 1+a_{\overline{n-1}|i}$$

(ง) $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}+(1+i)^n$

$$= (1+i)\{1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}\}$$

$$= (1+i)\,s_{\overline{n}|i}$$

และ $= \{1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^n\}-1$

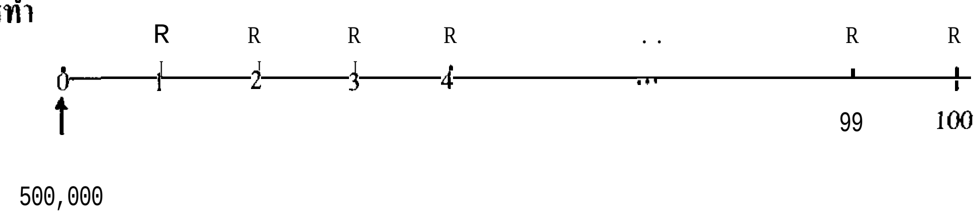
$$= \ddot{s}_{\overline{n+1}|i}-1$$

ตัวอย่างที่ 1.8 บ้านหลังหนึ่งราคาเงินสด 500,000 บาท ถ้าจะซื้อโดยวิธีผ่อนชำระเป็นรายเดือนเวลา 100 เดือน ด้วยอัตราดอกเบี้ย Nominal 9% compounded monthly และชำระทุก ๆ ปลายเดือน

(ก) คำนวณจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระรายเดือน

(ข) หลังจากชำระมาได้ 10 เดือน ต้องการจ่ายเป็นเงินสดครั้งเดียว (Single payment) ทันทีที่ครบชำระเดือนที่ 11 จะต้องชำระเท่าใด

วิธีทำ



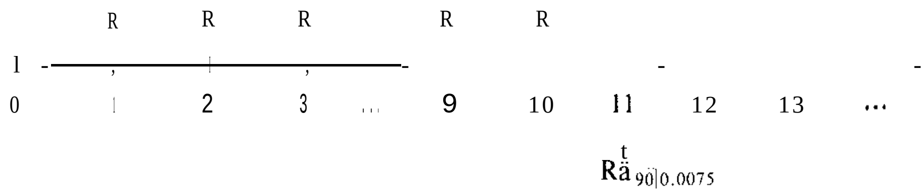
(ก) จำนวนเงินทีต้องผ่อนชำระรายเดือน $= Ra_{\overline{100}|0.0075}$

$= 500{,}000$

$\therefore\ R = \dfrac{500{,}000}{a_{\overline{100}|0.0075}}$

$= 7{,}125.08$ บาท

(ข)



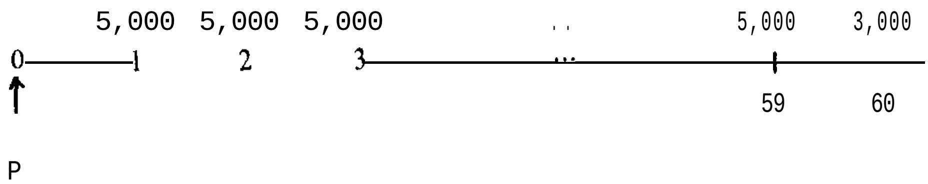
จำนวนเงินที่ต้องชำระครั้งเดียว

ณ วันครบชำระเดือนที่ 11 $= 7{,}125.08\ \ddot{a}_{\overline{90}|0.0075}$

$= 468{,}574.96$ บาท

ตัวอย่างที่ 1.9 ผ่อนชำระเงินกู้ทุก ๆ ปลายเดือน ๆ ละ 5,000 บาท เป็นเวลา 59 เดือน และจำนวน 3,000 บาท ของเดือนที่ 60 ด้วยอัตราดอกเบี้ย Nominal 6% Compounded monthly จงคำนวณหาเงินต้นที่กู้ไป

วิธีทำ



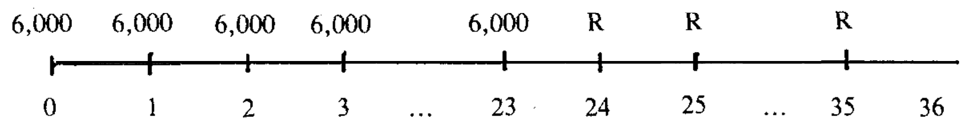
ให้ P = เงินต้น

$P = 5{,}000a_{\overline{59}|0.005} + 3{,}000\ v^{60}$

$= 257{,}145.06$ บาท

ตัวอย่างที่ 1.10 ฝากเงินในธนาคารทุก ๆ ต้นเดือนเป็นเวลา 24 เดือน ๆ ละ 6,000 บาท ต้องการถอนออกมาทุก ๆ ต้นเดือน ครั้งแรกเป็นต้นเดือนถัดไป จำนวน 12 เดือน เงินที่สะสมไว้หมดพอดี ทั้งนี้ด้วยอัตราดอกเบี้ย Nominal 9% Compounded monthly ตลอด จงคำนวณจำนวนเงินที่ถอนออกแต่ละเดือนนั้น

วิธีทำ



ณ ต้นเดือนที่ 24

มูลค่าปัจจุบันของจำนวนเงินที่ถอน = มูลค่าสะสมของเงินที่ฝาก

ให้ R = จำนวนเงินที่ถอนแต่ละเดือน

$$\therefore \quad R\ddot{a}_{\overline{12}|0.0075} = 6{,}000\,\ddot{s}_{\overline{24}|0.0075}$$

$$\therefore \quad R = 13{,}741.32 \text{ บาท}$$

แบบทดสอบบทที่ 1

สำหรับหัวข้อ 1.1-1.3 (ฟังก์ชั่นมูลค่าสะสม-อัตราดอกเบี้ย)

1. กำหนดให้ฟังก์ชั่นสะสม $A(t) = t^2+t+2$; $t \geq 0$ คำนวณหา
   (ก) ฟังก์ชั่นสะสม $a(t)$
   (ข) อัตราดอกเบี้ย $i(2)$, $i(3)$, $i(4)$
2. กำหนดให้ฟังก์ชั่นสะสม $A(t) = 100+10t$ คำนวณหา
   (ก) ดอกเบี้ย $I(5)$, $I(7)$
   (ข) อัตราดอกเบี้ย $i(5)$, $i(7)$
   (ค) ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นระหว่าง $t = 4$ และ $t = 7$
   (ง) เงินต้นกำเนิด (Original Principal)
   (จ) ฟังก์ชั่นสะสม $a(t)$
3. กำหนดให้เงินต้นจำนวน 1 หน่วย ดอกเบี้ยแต่ละช่วงเวลามีมูลค่าเท่ากัน
   ถ้า $a(1) = 1+i$, i = อัตราดอกเบี้ย จงพิสูจน์ว่า
   $a(t) = 1+it$; $t \geq 0$
   เราเรียกการคำนวณดอกเบี้ยวิธีนี้ว่า ดอกเบี้ยคงต้น (Simple interest)
4. จากข้อ (3) ซึ่ง $a(t) = 1+it$ ถ้าจำนวนเงินต้นเท่ากับ P,
   อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี, ระยะเวลา t, จงพิสูจน์ว่า
   (ก) ถ้า I เป็นดอกเบี้ยทั้งสิ้นตั้งแต่แรก จวบจนระยะเวลา t ดังนั้น $I = Prt$
   (ข) $A(t) = P(1+rt)$
5. ด้วยการคำนวณแบบ ดอกเบี้ยคงต้น (Simple interest) 12% ต่อปี จงพิจารณาข้อเสนอการชำระค่าสินค้าราคา 5,000 บาท ว่าวิธีไหนดีที่สุด ถ้า
   (ก) จ่ายเงินสดลด 4%
   (ข) ชำระเงินสดภายใน 30 วัน ลด 3%
   (ค) ชำระเต็มราคาเมื่อครบ 90 วัน

สำหรับหัวข้อ 1.4-1.5 (คำนวณแบบดอกเบี้ยทบต้น)

6. ถ้าเงินจำนวน 5 บาท สะสมเป็น 10 บาท ด้วยเวลา 10 ปี จงคำนวณว่าเงินจำนวน 100 บาท จะมีมูลค่าเป็นเท่าใดอีก 25 ปี
7. คำนวณหาอัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี (Effective annual rate) ถ้าลงทุนด้วยเงินจำนวน 10,000 บาท จะเป็นเงินสะสมจำนวน 15,000 บาท ระยะเวลา 10 ปี

8. สินค้าชนิดหนึ่งถ้าซื้อเงินสดราคา 6,000 บาท ถ้าซื้อเงินเชื่อต้องชำระล่วงหน้าจำนวน 3,000 บาท และที่เหลือชำระปลายปีทุก ๆ ปี เป็นเวลา 2 ปี ครั้งละ 1,800 บาท จงพิจารณาว่าควรจะซื้อวิธีไหนระหว่างชำระด้วยเงินสดกับซื้อเงินเชื่อ ถ้าคำนวณด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% ต่อปี

9. หนี้จำนวน 10,000, 8,000 และ 5,000 บาท กำหนดต้องชำระเมื่อ 4, 5 และ 6 ปีมาแล้วตามลำดับ หนี้เหล่านี้ได้รับการชำระครั้งเดียวจำนวน 23,000 บาท เมื่อ 5 ปีมาแล้ว คำนวณหาอัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี

สำหรับหัวข้อ 1.6 (อัตราดอกเบี้ยส่วนลดทบต้น)

10. ถ้าคำนวณด้วยดอกเบี้ยส่วนลดแบบทบต้น (Compound discount) จงพิสูจน์ว่า $d(t)$ มีค่าคงที่สำหรับทุก ๆ ค่าของ t

11. คำนวณจำนวนเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 10 ของเงิน 10,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยส่วนลดทบต้น 4%

12. จากข้อ (11) ถ้าเงินสะสมเท่ากับ 15,000 บาท จงหามูลค่าปัจจุบัน

13. จงหามูลค่าสะสมของเงินต้นจำนวน 30,000 บาท เป็นระยะเวลา 15 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น แบบ Nominal annual rate 8% Compounded quartely

14. ก. กู้เงินจาก ข. จำนวน 100,000 บาท กำหนดชำระเมื่อสิ้นปีที่ 5 ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% Compounded quarterly หลังจากที่กู้มาได้ 1 ปี ก. ได้ชำระหนี้หมดซึ่งเป็นจำนวนมูลค่าปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี (Effective rate) 8% จงคำนวณหามูลหนี้ที่ ก. ชำระ

สำหรับหัวข้อ 1.7 (เงินเบี้ยรายปี)

15. กำหนดให้
$$(1.03)^{31} = 2.500$$
$$(1.03)^{-31} = 0.4000$$
$$s_{\overline{31}|0.03} = 50.00$$
$$a_{\overline{31}|0.03} = 20.00$$

หาค่าของ

(ก) $s_{\overline{62}|0.03}$ (ข) $s_{\overline{32}|0.03}$

(ค) $a_{\overline{93}|0.03}$ (ง) $a_{\overline{32}|0.03}$

16. ต้องการสะสมเงินเป็นกองทุน ณ สิ้นปีที่ 6 เป็นเงิน 100,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี 5% โดยการฝากเงินทุก ๆ สิ้นปี ๆ ละ 15,000 บาท จงคำนวณหาเงินที่ต้องฝากปีสุดท้าย

17. จากข้อ (16) ถ้าฝากด้วยเงินปีละ 15,000 บาท ไปเรื่อย ๆ ต้องใช้เวลากี่ปีและปีสุดท้ายต้องฝากด้วยเงินจำนวนเท่าใด

18. จากข้อ (16) ถ้า 3 ปีแรก เขาฝากเงินปีละ 20,000 บาท และ 3 ปีหลัง ฝากปีละ R บาท จงหาค่า R

19. คำนวณหามูลค่าปัจจุบันของข้อ (16)

ข้อทดสอบรวม 1.1-1.7

20. ถ้าอัตราดอกเบี้ย $i = \frac{1}{n}$ จงหาค่าของ d

21. จงหามูลค่าสะสมของเงินต้น 100,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 10 ด้วยอัตราดอกเบี้ยคงต้น 5% ตลอดระยะเวลาเริ่มแรกถึงสิ้นปีที่ 3 ต่อด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% Compounded semiannually จนสิ้นปีที่ 6 และระยะเวลาที่เหลือด้วยดอกเบี้ยส่วนลดทบต้นรายปี 8%

22. ถ้า $a_{\overline{n}|i} = x \quad a_{\overline{2n}|} = y$

    แสดงค่าของ d ที่มีค่าของ x และ y

23. ถ้า $a_{\overline{n}|} = 10$ และ $i = 5\%$

    หาค่าของ $s_{\overline{3n}|} + 2s_{\overline{2n}|} + s_{\overline{n}|}$

24. พิสูจน์ $\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = i$

25. ถ้าเงินสะสมเป็น 2 เท่าของเงินต้นในเวลา n ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นรายปี i, ดังนั้น จงพิสูจน์ว่า ถ้าทุก ๆ $x > 0$ จะมีมูลค่าสะสม 2^x ณ ปีที่ nx

26. กำหนดให้ $(1+i)^n = 1.2$

    หาค่าของ $\frac{s_{\overline{2n+1}|i} - s_{\overline{2n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n-1}|i}}$

27. ถ้า $a_{\overline{n}|i} = 10$ และ $s_{\overline{n}|i} = 25$ หาค่าของ i