

บทที่ 5

วิธีการขนส่ง

(The Transportation Method)

คำนำ

บทนี้เกี่ยวกับโครงการเส้นตรงเหมือนกันแต่มีแบบเฉพาะของตนเองเรียกว่าแบบของการขนส่ง แบบนี้ต้องการหาต้นทุนต่ำสุดของการขนส่งสินค้าจากแหล่งต่าง ๆ ไปยังที่หมายปลายทางต่าง ๆ ปริมาณที่ขนส่งจากแหล่งผลิตและความต้องการที่จุดหมายแต่ละแห่งเป็นที่ทราบกันดี เช่น ผลิตภัณฑ์ชนิดหนึ่งถูกส่งจากโรงงานต่าง ๆ ไปยังร้านค้าปลีกต่าง ๆ

ถึงแม้ว่าปัญหาของการขนส่งสามารถแก้ได้โดยวิธีของซิมเพล็กซ์ แต่คุณสมบัติพิเศษของแบบการขนส่งนั้นจะให้วิธีการแก้ปัญหาที่สะดวกกว่า วิธีการแบบใหม่นี้อาจดูแตกต่างกันไป แต่ก็สามารถแก้ได้โดยตรงถ้าหากใช้วิธีซิมเพล็กซ์

วิธีการขนส่งเป็นรูปงานหรือเทคนิคสำหรับการวิเคราะห์และแก้ปัญหาทางด้านหนึ่งโดยเฉพาะ จึงเรียกกันว่าเทคนิคทางด้านกรขนส่ง หรือวิธีการขนส่งเพราะว่าปัญหาต่าง ๆ ที่แก้โดยวิธีนี้เกี่ยวข้องกับกรจัดการด้านจรรยาหรือการขนส่งอย่างชัดเจน อย่างไรก็ตามเราจะเห็นว่า เทคนิคด้านการขนส่งได้ถูกนำเอาไปใช้กับปัญหาทางด้านอื่น ๆ ที่ไม่เกี่ยวข้องกับการขนส่งอีกด้วย

แบบของการขนส่ง

สมมติมีแหล่งที่กำเนิดสินค้า m แหล่ง และมีจุดหมายปลายทาง n แหล่ง ให้ a_i เป็นจำนวนหน่วยที่จัดส่งที่ได้มาจากแหล่ง i ($i = 1, 2, \dots, m$) และให้ b_j เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการที่จุดหมายปลายทาง j ($j = 1, 2, \dots, n$) ให้ c_{ij} เป็นต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยบนเส้นทาง (i, j) ซึ่งเชื่อมแหล่ง i และจุดหมายปลายทาง j วัตถุประสงค์ก็คือการหาต้นทุนการขนส่งรวมที่ต่ำสุดซึ่งจำนวนสินค้าที่ขนส่งจากแหล่ง i ไปยังจุดหมายปลายทาง j ต้องเสียต้นทุน ให้ x_{ij} เป็นจำนวนหน่วยที่ขนส่งจากแหล่ง i ไปยังจุดหมายปลายทาง j สมมติให้มีแหล่งกำเนิดสินค้าอยู่ 2 แหล่ง ($m = 2$) และมีจุดหมายปลายทาง (ร้านค้า) อยู่ 3 แห่ง ($n = 3$) ตารางของการขนส่งจะเป็นดังนี้

รูป 5-1

		จุดหมายปลายทาง						
					ซัพพลาย			
แหล่งกำเนิด	1	X_{11}	C_{11}	X_{12}	C_{12}	X_{13}	C_{13}	a_1
	2	X_{21}	C_{21}	X_{22}	C_{22}	X_{23}	C_{23}	a_2
ปริมาณ		b_1		b_2		b_3		

การทำแบบของการขนส่งให้สมดุล

(Balancing the Transportation Model)

ค่าจำกัดความทั่วไปของแบบการขนส่งเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m a_i$$

หมายความว่า ปริมาณสินค้าที่ส่งไปจากทุกแหล่งต้องเท่ากับปริมาณสินค้าที่ต้องการซื้อซึ่งในทางความเป็นจริงแล้ว ข้อกำหนดนี้อาจจะไม่น่าพอใจเสมอไป หรืออีกอย่างหนึ่งสินค้าที่จะส่งไปขายอาจน้อยกว่าหรืออาจมากกว่าปริมาณสินค้าที่ต้องการซื้อ ซึ่งในกรณีเช่นนี้รูปแบบของการขนส่งก็จะไม่สมดุล

ขีดจำกัด $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ ถูกนำมาใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาทางด้านเทคนิค

การขนส่ง ถ้าจำนวนสินค้าที่ซื้อมากกว่าจำนวนสินค้าที่ขายจะต้องเพิ่มแหล่งสินค้าขึ้นเรียกว่า a dummy source ซึ่งจะจัดส่งสินค้าจำนวนที่ขาด $\sum b_j - \sum a_i$ แต่ถ้ามีปริมาณที่ขายมากเกินไป (surplus supply) ทางด้านจุดหมายปลายทางก็ให้เพิ่มช่อง dummy อีกเพื่อซื้อสินค้าส่วนที่เกินนั้น $\sum a_i - \sum b_j$ ต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยจากแหล่งที่เป็น dummy (dummy source) ไปยังจุดหมายปลายทางต่าง ๆ ทั้งหมดเป็นศูนย์ จึงเท่ากับไม่ได้ขนส่งจากแหล่งที่เป็น dummy

เทคนิคการขนส่ง

ขั้นตอนพื้นฐานของเทคนิคการขนส่งมีดังนี้

ขั้นที่ 1 หาคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐานเริ่มต้น

ขั้นที่ 2 หาค่าตัวแปรค่าที่จะเข้ามาจากบรรดาตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานทั้งหลาย ถ้าตัวแปรค่าเช่นนั้นทั้งหมดอยู่ในสภาวะที่ให้ผลสูงสุดก็ให้หยุดได้ มิฉะนั้นก็ให้เริ่มต้นขั้นที่ 3

ขั้นที่ 3 หาตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป (ให้ใช้สภาวะที่เป็นไปได้) จากบรรทัดตัวแปรค่าทั้งหลายของผลลัพท์มาตรฐาน จากนั้นก็ให้หาผลลัพท์มาตรฐานตัวใหม่

ดูจากตัวอย่าง สมมติต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยเป็น c_{ij} บาท ปริมาณสินค้าที่ขายและชื่อแสดงในตารางข้างล่างนี้

รูปที่ 5-2

		จุดหมายปลายทาง				
		1	2	3	4	ซัพพลาย
แหล่งกำเนิด	1	X_{11} 8	X_{12} 0	X_{13} 18	X_{14} 9	30
	2	X_{21} 10	X_{22} 5	X_{23} 7	X_{24} 18	50
	3	X_{31} 0	X_{32} 12	X_{33} 14	X_{34} 16	10
ดีมานด์		10	30	30	20	

เป็นที่น่าสังเกตว่า วิธีการทำนั้นก็เหมือนกับซิมเพล็กซ์ ความแตกต่างที่สำคัญก็คือการเช็คสภาวะที่เป็นไปได้และให้ผลดีที่สุดซึ่งส่วนใหญ่แล้วเกิดจากโครงสร้างพิเศษของแบบการขนส่ง

ผลลัพท์ที่เป็นไปได้แรกเริ่ม

บริษัท ก ข ค จำกัด มีโรงงาน 3 โรงในกรุงเทพ สมุทรปราการ และสมุทรสาคร บริษัทต้องส่งผลิตภัณฑ์สำเร็จรูปไปสู่คลังสินค้าในอุบลราชธานี, อุดรธานี, ขอนแก่น และเชียงใหม่ ต้นทุนการขนส่งต่อหน่วย จำนวนที่สามารถจัดหาสินค้ามาได้ของโรงงาน และจำนวนที่ต้องการของคลังสินค้าแสดงในรูปข้างบนนี้ (รูป 5-2)

มีหลายวิธีที่จะใช้หาผลลัพท์ที่เป็นไปได้แรกเริ่ม ในการที่จะให้ได้ผลลัพท์แรกเริ่มที่ดีกว่า (ในรูปของต้นทุน) และให้มีราคาคำนวณซ้ำจำนวนน้อยครั้งกว่า ให้ดูวิธีการคำนวณดังต่อไปนี้

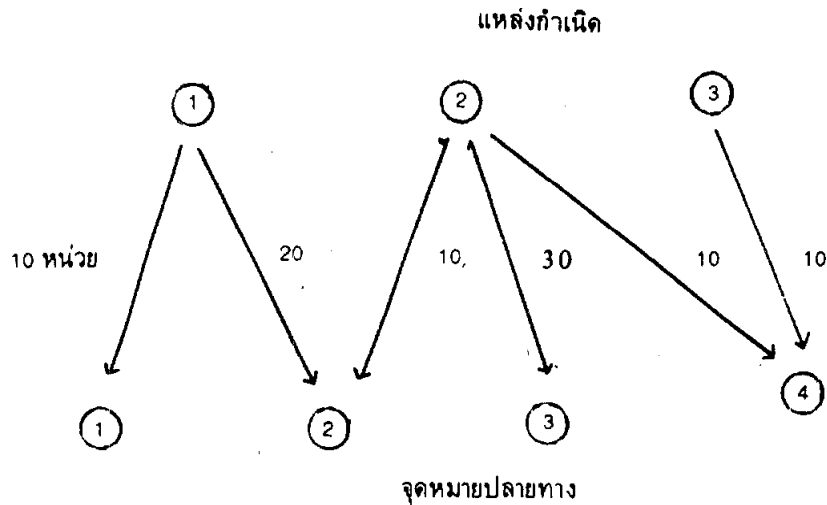
วิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ (North west-corner method) เป็นวิธีที่ง่ายต่อการใช้ แต่แทบจะไม่ประหยัดและปกติแล้วก็คำนวณซ้ำหลายครั้งจนกว่าจะได้ผลลัพท์ที่ได้ผลเป็นที่น่าพอใจ วิธีนี้มีประโยชน์เมื่อการวิเคราะห์ได้กระทำโดยเครื่องอิเล็กทรอนิกส์คอมพิวเตอร์

วิธีนี้เริ่มโดยการแบ่งจำนวนที่มากที่สุดที่จะให้ได้จากปริมาณขายและปริมาณซื้อแก่ตัวแปรค่า X_{11} (ตัวหนึ่งในมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือของตาราง) แถวตั้งที่ใส่ค่าไปแล้วนี้จะถูกขีดฆ่าแสดงว่าตัวแปรค่าที่เหลือในแถวตั้งที่ขีดฆ่าแล้วเท่ากับศูนย์ ถ้าแถวตั้งและแถวนอนถูกใส่ค่าให้เต็มพร้อมกันไป ให้ใช้เพียงแถวเดียวเท่านั้นที่ถูกขีดฆ่าหลังจากที่ได้ปรับค่าของปริมาณขายและปริมาณซื้อแก่แถวตั้งและแถวนอนที่ไม่ได้ขีดฆ่าทั้งหมดแล้ว ค่าที่เป็นไปได้สูงสุดจะถูกแบ่งให้แก่ตัวประกอบที่ยังไม่ได้ขีดฆ่าตัวแรกในแถวตั้ง (แถวนอน) แถวใหม่จากตารางรูปที่ 5-2 ให้ดูวิธีทำดังนี้

- ก. $x_{11} = 10$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวตั้งที่ 1 ดังนั้นแถวตั้งที่ 1 จะไม่ได้รับการแบ่งสรรอีกแล้ว จำนวนที่เหลืออยู่ในแถวนอนที่ 1 คือ 20 หน่วย
- ข. $x_{12} = 20$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวนอนที่ 1 และเหลือ 10 หน่วย ในแถวตั้งที่ 2
- ค. $x_{22} = 10$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวตั้งที่ 2 และเหลือ 40 หน่วย ในแถวนอนที่ 2
- ง. $x_{23} = 30$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวตั้งที่ 3 และเหลือ 10 หน่วย ในแถวนอนที่ 2
- จ. $x_{24} = 10$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวนอนที่ 2 และเหลือ 10 หน่วย ในแถวตั้งที่ 4
- ฉ. $x_{34} = 10$ ซึ่งจะขีดฆ่าแถวนอนที่ 3 หรือแถวตั้งที่ 4 ดังนั้นจะมีเพียงแถวนอนเดียวหรือแถวตั้งเดียวเหลืออยู่ที่ไม่ได้ขีดฆ่า วิธีการเสร็จสิ้น

รูปที่ 5-3

	1	2	3	4	
1	10	20			30
2		10	30	10	50
3				10	10
	10	30	30	20	



ผลลัพธ์มาตรฐานที่ได้แสดงในตาราง 5-3 ตัวแปรค่ามาตรฐานเป็นดังนี้ $x_{11} = 10$, $x_{12} = 20$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 10$ และ $x_{34} = 10$ ตัวแปรค่าที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์และไม่มาตรฐาน ต้นทุนการขนส่งที่เกี่ยวข้องกันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ต้นทุนรวม} &= \sum c_{ij} x_{ij} \\ &= 10(8) + 20(0) + 10(5) + 30(7) + 10(18) + 10(16) \\ &= 680 \text{ บาท} \end{aligned}$$

วิธีต้นทุนที่น้อยที่สุด (Least-Cost Method)

วิธีการแบบมุมทางด้านตะวันตกเฉียงเหนือไม่ได้แก้ปัญหอย่างดีที่สุดโดยเสียต้นทุนที่ต่ำที่สุด วิธีการต้นทุนที่น้อยที่สุดได้ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแบ่งเบาปัญหานี้

วิธีการจะเป็นดังนี้ ให้ใส่ค่าที่มากที่สุดที่จะมากได้แก่ตัวแปรค่าที่มีต้นทุนต่อหน่วยต่ำที่สุด แล้วขีดฆ่าแถวตั้งหรือแถวนอนที่ได้กรอกค่าลงไปแล้ว (ตามวิธีที่เคยอธิบายมาแล้ว ถ้าทั้งแถวตั้งและแถวนอนถูกกรอกค่าลงพร้อมกัน ให้เลือกขีดฆ่าเพียงแถวเดียวเท่านั้น) หลังจากที่ได้ปรับค่าของปริมาณสินค้าที่ขายและที่ซื้อสำหรับตัวประกอบที่ยังไม่ได้ขีดฆ่าทั้งหมดแล้ว จากนั้นก็ให้ใช้วิธีเดิมคือให้ใส่ค่าที่มากที่สุดแก่ตัวแปรค่าที่มีต้นทุนต่อหน่วยต่ำที่สุด กระบวนการจะเสร็จสิ้นลงเมื่อมีแถวตั้งหรือแถวนอนเพียง 1 แถวเหลืออยู่

ปัญหาของการขนส่งตามรูปที่ 5-2 จะนำมาคำนวณอีกครั้งโดยวิธีต้นทุนที่น้อยที่สุด
 รูป 5-4

รูปที่ 5-4

	1	2	3	4	
1	8	0	18	9	30
2	10	5	7	18	50
3	0	12	14	16	10
	10	30	30	20	
	10	30	30	20	

รูปที่ 5-4 จะแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ขั้นตอนการคำนวณเป็นดังนี้

x_{12} และ x_{31} เป็นตัวแปรค่าที่มีต้นทุนต่อหน่วยต่ำสุด ($c_{12} = c_{31} = 0$) ให้เลือกตามความประสงค์โดยเลือก $x_{12} = 30$ กรอกลงในแถวนอน 1 และแถวตั้ง 2 โดยการขีดฆ่าแถวตั้ง 2 ปริมาณสินค้าที่ขายในแถวนอน 1 จะเป็นศูนย์ ขั้นต่อไป x_{31} มีต้นทุนต่อหน่วยที่ยังไม่ได้ขีดฆ่าต่ำสุด ดังนั้น $x_{31} = 10$ ให้กรอกลงในแถวนอน 3 และแถวตั้ง 1 โดยการขีดฆ่าแถวนอน 3 ปริมาณสินค้าที่จะซื้อในแถวตั้ง 1 เป็นศูนย์ ตัวประกอบที่ยังไม่ได้ขีดฆ่าที่มีค่าต่ำสุดคือ $c_{23} = 7$ ให้ $x_{23} = 3$ ให้ขีดฆ่าแถวตั้ง 3 จะเหลือปริมาณสินค้าที่จะขาย 20 หน่วยในแถวนอน 2 ตัวประกอบที่ยังไม่ได้ขีดฆ่าที่มีค่าต่ำสุดคือ $c_{11} = 8$ ให้ $x_{24} = 20$ ต้นทุนรวมจะเป็นดังนี้ $10(0) + 30(0) + 30(7) + 20(18) = 570$ บาท ซึ่งเป็นค่าน้อยกว่าการคำนวณโดยวิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ

วิธีการประมาณค่าแบบ VAM (Vogel's Approximation Model)

วิธีนี้จะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า 2 วิธีข้างต้นนี้ โดยความจริงแล้ว VAM จะให้ค่าที่ให้ผลดีที่สุดในเวลาหรือใกล้เคียงกับค่าที่ให้ผลสูงสุด

ขั้นตอนของวิธีการเป็นดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 หาค่าโทษ (penalty) ของแต่ละแถวตั้งและแถวนอนโดยนำค่าของตัวประกอบต้นทุนที่ต่ำสุดในแถวตั้งหรือแถวนอนหักจากค่าที่ต่ำสุดที่รองลงมาในแถวตั้งหรือแถวนอนเดียวกันนั้น

ขั้นที่ 2 เลือกหาแถวตั้งหรือแถวอนที่มีค่าโทษสูงสุด ให้แบ่งค่าของปริมาณสินค้าให้มากที่สุดที่จะมากได้ให้แก่ตัวแปรค่าที่มีต้นทุนต่ำสุดในแถวตั้งหรือแถวอนนั้น แล้วให้ขีดฆ่าแถวที่ได้กรอกปริมาณลงไปแล้ว ถ้าแถวตั้งและแถวอนจะขีดฆ่าได้ทั้ง 2 แถว ให้เลือกแถวใดแถวหนึ่งและแถวที่เหลือก็จะได้ supply หรือ demand เป็นศูนย์ แถวใดที่มีซัพพลายหรือดีมานด์เป็นศูนย์จะไม่ถูกใช้คำนวณค่าโทษอีกต่อไป

ขั้นที่ 3 ถ้ามีอยู่แถวเดียวที่ยังไม่ขีดฆ่าแสดงว่ากระบวนการทำได้เสร็จสิ้นแล้ว

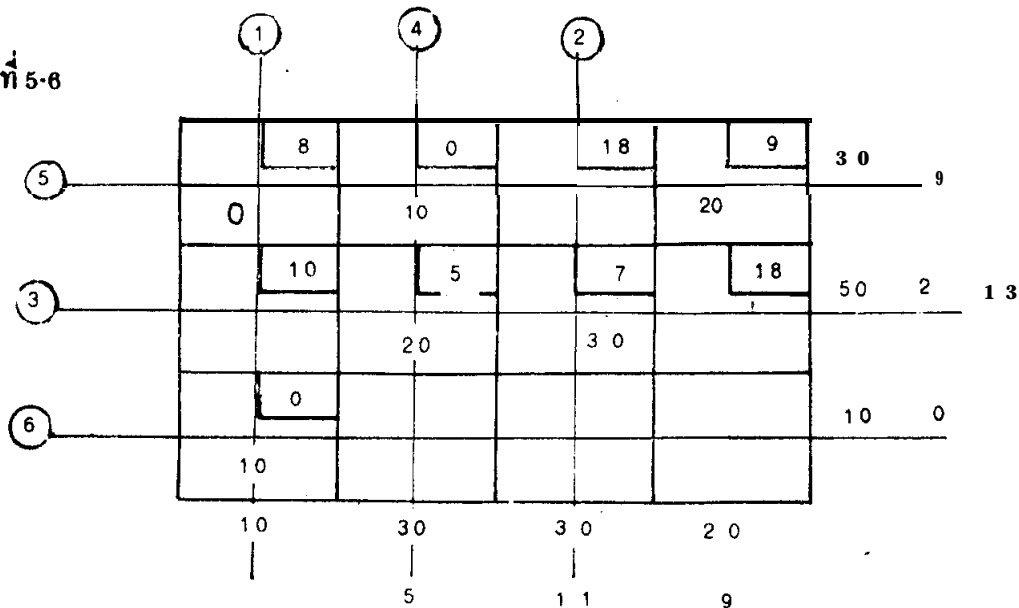
ให้ดูจากตัวอย่างในรูป 5-2, รูปที่ 5-5 แสดงค่าโทษชุดแรก จะเห็นว่าแถวอนที่ 3 มีค่าโทษมากที่สุด (= 12) และ $(c_{31} = 0)$ เป็นต้นทุนที่ต่ำที่สุดในแถวอนนั้น ปริมาณสินค้า 10 หน่วยจะถูกใส่ลงในช่อง x_{31} แถวอนที่ 3 และแถวตั้งที่ 1 จะบรรลุลักษณะประสงค์พร้อมกันไป สมมติให้แถวตั้งที่ 1 ถูกขีดฆ่า ปริมาณสินค้าที่จะเสนอขายในแถวอนที่ 3 จะเป็นศูนย์

รูปที่ 5-5

	8	0	18	9	ลงโทษแถวอน
					30 a
	10	5	7	18	50 2
	0	12	14	16	10 0 12
ลงโทษแถวตั้ง	10	30	30	20	
	8	5	7	7	

รูปที่ 5-6 แสดงค่าโทษชุดใหม่หลังจากที่ได้ขีดฆ่าแถวตั้งที่ 1 ในรูปที่ 5-5 แล้ว (ให้สังเกตแถวอนที่ 3 จะมีปริมาณเสนอขายเป็นศูนย์ จะไม่ถูกใช้ในการคำนวณค่าโทษอีก)

รูปที่ 5-8



แถวอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 3 จะมีค่าโทษอย่างเดียวกัน สินค้าปริมาณ 30 จะถูกกำหนดให้แก่ตัวแปรค่า x_{23} ซึ่งขีดฆ่าแถวตั้งที่ 3 และปรับค่าปริมาณสินค้าเสนอขายในแถวอนที่ 2 เป็น 20 $x_{22} = 20$ ขีดฆ่าแถวอนที่ 2 ได้ $x_{12} = 10$ ขีดฆ่าแถวตั้งที่ 2 $x_{14} = 20$ ขีดฆ่าแถวอนที่ 1 และ $x_{34} = 0$ ขีดฆ่าแถวอนที่ 3 จะได้ต้นทุนของโครงการเป็น $10(0) + (10(0) + 20(5) + 8(0) + 30(7) + 20(9) = 490$ บาท

วิธี Stepping Stone

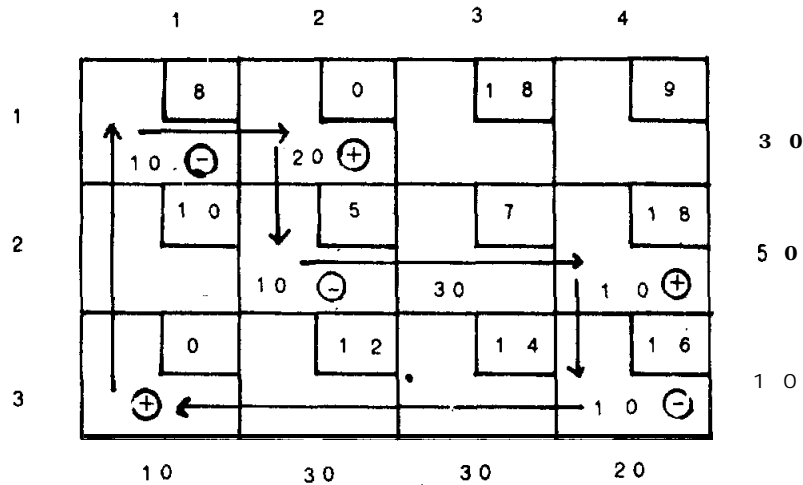
วิธีการนี้ใช้การสร้างเส้นล้อมรอบ (loop) ของแต่ละตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐาน เส้นล้อมรอบนี้ประกอบด้วยเส้นตั้งฉากในแนวดิ่งและแนวระดับ (horizontal and vertical segments) ซึ่งมีส่วนปลายของเส้นอยู่ที่ตัวแปรค่าไม่มาตรฐาน แต่เส้นตั้งฉากจะเริ่มและสิ้นสุดลงที่ตัวแปรค่ามาตรฐานก็ได้ เส้นล้อมรอบนี้ต้องมีมุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมและมุมนั้นจะมีตัวแปรค่าที่มาตรฐานอยู่ด้วย ดูตามรูปที่ 5-7 เส้นล้อมรอบของตัวแปรค่าไม่มาตรฐาน x_{31} ซึ่งจะได้ผลลัพธ์มาตรฐานดูรูปที่ 5-3 เส้นล้อมรอบของ x_{31} จะเป็นดังนี้ $x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{31}$ เส้นล้อมรอบนี้จะเขียนทวนนาฬิกาหรือตามนาฬิกาก็ได้ เส้นล้อมรอบของตัวแปรค่าไม่มาตรฐานที่เหลือดูรูป 5-3 จะสร้างได้ดังต่อไปนี้

ตัวแปรค่าไม่มาตรฐาน

เส้นล้อมรอบ

x_{13}	$x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13}$
x_{14}	$x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14}$
x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$
x_{32}	$x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{32}$
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{33}$

รูปที่ 5-7



เส้นล้อมนี้ถูกนำมาใช้เพื่อเช็คค่าของเส้นวัตถุประสงค์ว่าจะสามารถลดต้นทุนให้ต่ำลงอีกได้หรือไม่ เช่นในตัวอย่างรูปที่ 5-7 ถ้า x_{31} เพิ่มค่าขึ้น 1 หน่วยและเพื่อที่จะคงไว้ซึ่งผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ตัวประกอบที่จุดมุมของเส้นล้อม x_{31} จะต้องถูกปรับค่าดังนี้ ลดค่า x_{11} 1 หน่วย เพิ่มค่า x_{12} 1 หน่วย ลดค่า x_{22} 1 หน่วย เพิ่มค่า x_{24} 1 หน่วย และสุดท้ายลดค่า x_{34} 1 หน่วย กระบวนการเช่นนี้แสดงด้วยเครื่องหมาย + และ - การเปลี่ยนแปลงนี้ต้องทำให้ปริมาณสินค้าที่เสนอซื้อและเสนอขายสมดุลกัน ให้ c_{31} เป็นต้นทุนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงอันเป็นผลมาจากการเพิ่มขึ้น 1 หน่วยของ x_{31} ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{c}_{31} &= c_{31} - c_{11} + c_{12} - c_{22} + c_{24} - c_{34} \\ &= 0 - 8 + 0 - 5 + 18 - 16 \\ &= -11\end{aligned}$$

จะเห็นว่าแต่ละหน่วยของ x_{31} ที่เพิ่มขึ้น จะลดต้นทุนการขนส่งลง 11 บาท ในทำนองเดียวกันการใช้เส้นล่อมสำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานอื่น ๆ ที่เหลือ จะได้ค่าที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงต่อต้นทุน 1 หน่วย เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{c}_{13} &= 16 \text{ บาท} \\ \bar{c}_{14} &= -4 \text{ บาท} \\ \bar{c}_{21} &= -3 \text{ บาท} \\ \bar{c}_{32} &= 9 \text{ บาท} \\ \text{และ } \bar{c}_{33} &= 9 \text{ บาท}\end{aligned}$$

จากที่แสดงมานี้ x_{31} ให้ค่าต้นทุนลดลงต่ำที่สุด ($\bar{c}_{31} = -11$ บาท) จึงถูกเลือกให้เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา

ตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปถูกเลือกจากตัวแปรค่าที่จุดมุมของเส้นล่อมที่จะมีค่าลดลงเมื่อตัวแปรค่าที่กำลังเข้ามา x_{31} มีค่าเพิ่มขึ้นมากกว่าศูนย์ ตัวแปรค่าดังกล่าวแสดงในรูปที่ 5-7 โดยใช้เครื่องหมาย - จากรูปที่ 5-7 x_{11} , x_{22} และ x_{34} เป็นตัวแปรค่ามาตรฐานที่จะมีค่าลดลงเมื่อ x_{31} มีค่าเพิ่มขึ้น ตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปจะถูกเลือกขึ้นมาจากตัวที่มีค่าน้อยที่สุดเพราะว่าเป็นค่าแรกที่ไปถึงค่าศูนย์ก่อน ในตัวอย่างนี้ตัวแปรค่าที่เป็น - มี 3 ตัว คือ x_{11} , x_{22} และ x_{34} มีค่าอย่างเดียวกันคือ = 10 ในกรณีเช่นนี้ตัวใดตัวหนึ่งจะถูกเลือกเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป สมมติ x_{34} ถูกเลือกเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป เมื่อค่าของ x_{31} เพิ่มเป็น 10 และค่าของตัวแปรค่ามาตรฐานที่จุดมุมจะถูกปรับค่าแต่ละตัวเพิ่มหรือลดลง 10 ขึ้นอยู่กับว่ามีค่าเป็น + หรือ - ผลลัพธ์ใหม่แสดงในรูป 5-8 ต้นทุนใหม่จะเป็นดังนี้ $0(8) + 10(0) + 30(0) + 0(5) + 30(7) + 20(18) + 0(16) = 570$ บาท ค่านี้ต่างจากค่าในรูป 5-3 เท่ากับ $680 - 570 = 110$ บาทซึ่งเท่ากับจำนวนหน่วยที่เพิ่มให้แก่ x_{31} คือ 10 หน่วย คูณด้วย ต้นทุนต่อหน่วยที่ลดลงคือ 11 บาท

รูปที่ 5-8

	1	2	3	4	
	8	0	18	9	
	0	30			30 ↑
2	10	5	7	18	
		0	30	20	50 2
3	0	12	14	16	
	10			0	10 3
	10	30	30	20	

รูปที่ 5-10

	1	2	3	4	
	8	0	18	9	
	0 ⊖			20 ⊕	30 1
	10	5	7	18	
	⊕	20 ⊖	30	0	50 2
	0	12	14	16	
	10			0	10 3
	10	30	50	20	

รูปที่ 5-9

	1	2	3	4	
	8	0	18	9	
	0	10 ⊖		20 ⊕	30
	10	5	7	18	
		20 ⊕	30	0 ⊖	50 2
	0	12	14	10	
	10			0	10 3
	10	30	30	20	

รูปที่ 5-11

	1	2	3	4	
	8	0	18	9	
		10		20	30 1
	10	5	7	18	
	0	20	30		50 2
	0	12	14	16	
	10			0	10 3
	10 0	30	30	20	

ผลลัพธ์มาตรฐานในรูป 5-8 เป็นค่าที่ถูกลดจำนวนช่องลง (degenerate) ตัวแปรค่ามาตรฐาน x_{11} และ x_{22} มีค่าเป็นศูนย์ ตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานตัวใหม่จะถูกตรวจสอบว่าควรปรับปรุงผลลัพธ์ล่าสุดนี้หรือไม่ ตารางที่ 5-8 นี้จะถูกหาเส้นล้อมใหม่และตรวจสอบตัวแปรค่าไม่มาตรฐานแต่ละตัวเพื่อหาค่าที่ให้ผลดีที่สุด เช่นการเพิ่มขึ้นใน x_{14} 1 หน่วย จะทำให้ลดต้นทุนรวมไป 4 บาท ดูจากรูปที่ 5-9 x_{14} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา เส้นล้อมที่เกี่ยวข้องกับ x_{14} แสดงว่า x_{12} และ x_{24} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปให้เลือก x_{24} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป รูปที่ 5-9 เป็นผลลัพธ์มาตรฐานตัวใหม่ ต้นทุนใหม่จะเป็นดังนี้

$$10(0) + 20(5) + 30(7) + 0(18) + 10(0) + 20(9) = 490 \text{ บาท}$$

รูปที่ 5-10 แสดง x_{21} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาและมี x_{11} และ x_{22} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป ให้เลือก x_{11} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปเพียงตัวเดียว ผลลัพธ์จะยังคงเหมือนเดิมไม่เปลี่ยนแปลงเพราะตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปมีค่าเป็นศูนย์ ต้นทุนใหม่จะเป็น 490 บาท เหมือนเดิม

วิธีตัวทวีคูณ (The Method of Multipliers)

วิธีนี้กำหนดให้แต่ละแถวของ i มีตัวทวีคูณเป็น u_i ในทำนองเดียวกันแต่ละแถวตั้ง j มีตัวทวีคูณเป็น v_j สำหรับตัวแปรค่ามาตรฐานแต่ละตัวของ x_{ij} ในผลลัพธ์ที่ได้นี้จะเขียนสมการได้เป็น

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ สำหรับตัวแปรค่ามาตรฐาน } x_{ij} \text{ แต่ละตัว}$$

สมการเหล่านี้จะมีจำนวน $m + n - 1$ สมการ (เพราะว่ามีตัวแปรค่ามาตรฐานอยู่เพียง $m + n - 1$ ตัว) จากตัวที่ไม่รู้ค่า $m + n$ ตัว ค่าต่าง ๆ ของตัวทวีคูณสามารถหาได้จากสมการเหล่านี้โดยการสมมติค่าขึ้นเองสำหรับตัวใดตัวหนึ่งของตัวทวีคูณ (ปกติแล้ว u_1 จะถูกกำหนดให้เท่ากับศูนย์) จากนั้นก็แก้สมการ $m + n - 1$ สมการหาค่าของตัวทวีคูณ $m + n - 1$ ตัว เมื่อหาค่าดังกล่าวได้แล้ว ก็ให้หาค่าของตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานแต่ละตัวของ x_{pq} ดังนี้

$$\bar{c}_{pq} = c_{pq} - u_p - v_q \text{ สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานแต่ละตัวของ } x_{pq}$$

ดูจากรูปที่ 5-7 สมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรค่ามาตรฐานเป็นดังนี้

$$x_{11} : u_1 + v_1 = c_{11} = 8$$

$$x_{12} : u_1 + v_2 = c_{12} = 0$$

$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 5$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 7$$

$$x_{24} : u_2 + v_4 = c_{24} = 18$$

$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} = 16$$

เมื่อให้ $u_1 = 0$ ค่าของตัวทวีคูณจะเป็นดังนี้ $v_1 = 8, v_2 = 0, u_2 = 5, v_3 = 2, v_4 = 13$ และ $u_3 = 3$ การหาค่าของตัวแปรค่าไม่มาตรฐานเป็นดังต่อไปนี้

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 2 = 16$$

$$\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 0 - 13 = -4$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 10 - 5 - 8 = -3$$

$$\bar{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - 3 - 8 = -11$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 12 - 3 - 0 = 9$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 14 - 3 - 2 = 9$$

ค่าที่ได้จะเป็นค่าเดียวกับคิดด้วยวิธี stepping-stone ซึ่งแสดงว่า x_{31} เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา ส่วนตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปหามาได้โดยใช้เส้นล้อมที่เกี่ยวข้องกับ x_{31} ตามที่แสดงโดยวิธี stepping-stone สำหรับค่า u_1 นั้น จะสมมติให้มีค่าเท่าไรก็ได้จะไม่ทำให้ค่า \bar{c}_{pq} เปลี่ยนแปลงไปแต่อย่างไร ค่าของตัวทวิคูณสำหรับ ผลลัพธ์มาตรฐานจะถูกหาค่าขึ้นใหม่ในรูปที่ 5-12 ตัวแปรค่ามาตรฐานถูกแทนด้วย \ominus

เพราะว่า $u_i + v_j = c_{ij}$ สำหรับ x_{ij} มาตรฐาน จากรูปที่ 5-12 ให้ $u_1 = 0$ จะได้ $v_1 = 8, v_2 = 0, u_2 = 5, u_3 = -8, v_3 = 2$ และ $v_4 = 13$ ส่วนค่า \bar{c}_{pq} สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานแต่ละตัวของ x_{pq} จะคำนวณได้ดังนี้

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 2 = 16$$

$$\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 0 - 13 = -4$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 10 - 5 - 8 = -3$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 12 - (-8) - 0 = 20$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 14 - (-8) - 2 = 20$$

$$\bar{c}_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 16 - (-8) - 13 = 11$$

รูป 5-12

	$v_1=8$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	
$u_1=0$	\in 8 \ominus	0 \ominus	18 \ominus	9 \ominus	30
$u_2=5$	10 \ominus	\in 5 \ominus	7 \ominus	18 \ominus	50
$u_3=-8$	0 \ominus	12 \ominus	14 \ominus	16 \ominus	10
	10	30	30	20	

ขั้นตอนสุดท้าย

$$V_1=8 \quad V_2=0 \quad V_3=2 \quad V_4=9$$

$U_1=0$	0	8	10	0	18	20	9	30
$U_2=5$		10		5	7		18	50
$U_3=-8$	10	0		12	14		16	10
	10		30		30		20	

ให้ $u_1 = 0$ จะได้ $v_1 = 8,$
 $v_2 = 0$ $u_2 = 5,$
 $v_3 = 2, u_3 = -8$
 $v_4 = 9$

หา \bar{c}_{pq} สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานได้ดังนี้

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 v_3 = 18 - 0 - 2 = 16$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 10 - 5 - 8 = -3$$

$$\bar{c}_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 18 - 5 - 9 = 4$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 12 - (-8) - 0 = 20$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 14 - (-8) - 2 = 20$$

$$\bar{c}_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 16 - (-8) - 9 = 15$$

$$V_1=5 \quad V_2=0 \quad V_3=2 \quad V_4=9$$

$U_1=0$		8		0	18		9	30
			10				20	
$U_2=5$	0	10	20	5	7	30	18	50
$U_3=-5$	10	0		12	14		16	10
	10		30		30		20	

ให้ $u_1 = 0$ จะได้ $v_2 = 0,$
 $u_2 = 5$ $v_1 = 5, u_3 = -5,$
 $v_3 = 2$ และ $v_4 = 9$

หา \bar{c}_{pq} สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานได้ดังนี้

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 8 - 0 - 5 = 3$$

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 2 = 16$$

$$\bar{c}_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 18 - 5 - 9 = 4$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 12 - (-5) - 0 = 17$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 14 - (-5) - 2 = 17$$

$$\bar{c}_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 16 - (-5) - 9 = 12$$

จากการทดสอบจะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้เป็นบวกทั้งหมดทุกค่าจึงเป็นผลลัพธ์ที่น่าพอใจ
จะได้ต้นทุนต่ำสุดดังนี้

$$0(10) + 10(0) + 20(5) + 10(0) + 30(7) + 20(9) = 490 \text{ บาท}$$

ตอบ

ในการคำนวณหาต้นทุนนั้นจะใช้สูตรดังนี้ก็จะได้ให้ผลลัพธ์เท่ากัน

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j &= [(30 \times 0) + (50 \times 5) + (10 \times (-5))] + \\ & [(10 \times 5) + (30 \times 0) + (30 \times 2) + \\ & (20 \times 9)] \\ &= 490 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตอบ

ทบทวนกระบวนการคำนวณซ้ำ กระบวนการคำนวณซ้ำทั้งหมดประกอบด้วย การประเมินค่า ติดตามด้วยการย้ายค่า ติดตามด้วยการประเมินค่า ติดตามด้วยการย้ายค่า ฯลฯ จนกว่ากระบวนการประเมินค่าแสดงว่าได้บรรลุถึงค่าที่น่าพอใจแล้ว

แรกเริ่มนั้นจำเป็นที่จะต้องมีการประเมินค่า มีวิธีการหลายอย่างที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้แรกเริ่มตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยทั่วไปแล้ววิธีการลงโทษ (penalty method) ตามแบบการประมาณค่าของ Vogel เป็นวิธีที่นำใช้มากกว่าเพราะไม่ต้องทำซ้ำหลายครั้ง จากนั้นก็ทดสอบค่าว่าจะให้ผลดีที่สุดหรือไม่ โดยดูจากค่า c_{ij} ของตัวแปรมาตรฐานแล้วหาค่าของ u_i และ v_j ซึ่งจะต้องใช้ทั้ง 2 ค่านี้สำหรับคำนวณหาต้นทุนทางอ้อม จากนั้นก็คำนวณหาผลต่างระหว่างต้นทุนโดยตรงและต้นทุนทางอ้อม ถ้าผลต่างทั้งหมดเป็นบวก ผลลัพธ์ที่ได้จากการประเมินค่าจะเป็นที่น่าพอใจ

ถ้าผลลัพธ์ที่ได้จากการประเมินค่าไม่เป็นที่น่าพอใจ ให้เลือกช่องว่างที่มีค่าผลต่างเป็นลบสูงสุดเพื่อที่จะเปลี่ยนเป็นช่องที่กรอรายการ โดยการเคลื่อนย้ายจำนวนหน่วยจากช่องอื่นมาสู่ช่องนี้ เส้นปิดจะถูกสร้างขึ้นจากช่องนี้และย้อนกลับเข้าหาช่องนี้อีกโดยหักมุมเดียวที่จุดมุมซึ่งเป็นช่องที่มีรายการ บางช่องที่จุดมุมจะสูญเสียจำนวนหน่วยที่กรอรายการไปและบางช่องจะได้รับจำนวนหน่วยเพิ่มขึ้น

จำนวนหน่วยที่จะเคลื่อนย้ายก็คือ จำนวนหน่วยที่น้อยที่สุดในช่องมุมที่มีรายการอื่นจะต้องเคลื่อนย้ายรายการออกไป หลังจากเคลื่อนย้ายแล้วช่องนี้จะกลายเป็นช่องว่าง

จำนวนผลลัพธ์ที่ลดน้อยลง

ไม่ว่าจะอยู่ในขั้นใดที่กำลังแก้ปัญหาอยู่นั้น อันจะทำให้ช่อง 2 ช่อง (หรือมากกว่า) ว่างลงในเวลาเดียวกัน ดังนั้นจำนวนช่องที่กรอรายการจะน้อยกว่า $(m + n - 1)$ ซึ่ง m เป็นจำนวนแถวบนและ n เป็นจำนวนแถวดั้ง ผลลัพธ์ที่ได้นั้นจัดเป็น degenerate วิธีการประเมินค่าก็ไม่สามารถดำเนินต่อไปได้นอกจากจะใช้วิธีใหม่ ทั้งนี้ก็เพราะว่าผลลัพธ์ที่เป็น degenerate นั้นเส้นปิดไม่สามารถสร้างขึ้นมาได้สำหรับช่องว่างแต่ละช่องนั้น และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกันนี้จึงไม่สามารถคำนวณค่า u_i และ v_j ได้

สถานการณ์เช่นนี้สามารถแก้ไขได้ง่ายโดยการเลือกช่องเพิ่มเติม 1 ช่อง (หรือ 2 ช่อง หรือมากกว่าถ้าจำเป็น) โดยปฏิบัติเหมือนกับว่าเป็นช่องที่มีรายการ นั่นคือถ้าจำนวนของช่องที่มีรายการเป็น $(m + n - 2)$ นั่นก็คือผลลัพธ์จะขาดไป 1 ช่อง ให้เลือกช่องว่าง 1 ช่อง ซึ่งถ้ากรอรายการแล้วก็เหมือนช่องที่กรอรายการแล้วจะมีจำนวนช่องที่เป็นอิสระ $(m + n - 1)$

ให้ $\epsilon \in$ ลงในช่องนี้ ค่า ϵ นี้ถือเป็นจำนวนหน่วยที่น้อยที่สุด ϵ นี้สามารถเคลื่อนย้ายได้ถ้าจำเป็นและให้ถือว่าค่า ϵ มีเป็นจำนวนหนึ่ง นอกเสียจากว่าเมื่อ a มีค่าเป็นจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

$$a + \epsilon = a$$

ถ้าช่อง ϵ รับมา a หน่วย จำนวนที่อยู่ในช่องก็เป็น a ในการคำนวณต้นทุนรวมจำนวน ϵ หน่วย ไม่มีต้นทุนใด ๆ ทั้งสิ้น

ถ้าในการเคลื่อนย้ายค่าของ ϵ จำต้องเคลื่อนย้ายจำนวนหน่วย จำนวนหน่วยที่มากที่สุดที่จะต้องเคลื่อนย้ายก็คือ ϵ และผลก็คือการเคลื่อนย้ายรายการ ϵ จากช่องเดิมไปสู่ช่องใหม่ที่เลือกไว้แล้ว การเคลื่อนย้ายนี้ไม่ทำให้ต้นทุนรวมเปลี่ยนแปลงเพียงแต่ ϵ จะอยู่ในช่องที่มี

ต้นทุนสูง เพราะ่วิธีการประมาณค่า นั้นจะประเมินแต่ต้นทุนของช่องว่างและช่องที่ถูกกรอกรายการเท่านั้น ช่อง \in เป็นเหมือนช่องที่ถูกกรอกรายการและถ้าเป็นช่องที่มีต้นทุนสูง ก็จะเคลื่อนย้ายช่อง \in ไปสู่ช่องที่มีต้นทุนต่ำ เพื่อว่าผลอันสุดท้ายจะเป็นต้นทุนรวมต่ำสุดสำหรับช่องที่ถูกกรอกรายการทุกช่องรวมทั้งช่อง \in ด้วย ดังนั้นในการเลือกช่องที่จะใส่ \in ลงไปจึงต้องเลือกช่องที่มีต้นทุนต่ำถ้าเป็นไปได้จะทำให้ลดการคำนวณซ้ำหลายครั้งลงได้ (แต่ถ้าช่องที่กรอกเป็นกำไร ก็ให้เลือกช่องที่ทำให้กำไรสูงสุด)

ในบางกรณีอาจมี \in ถึง 2 ช่องหรือมากกว่าเพื่อที่จะทำให้ช่องที่กรอกรายการมีเป็นจำนวนถึง $(m + n - 1)$ เช่นนี้ก็ไม่ยุ่งยากอะไรเพียงแต่กรอก \in ลงไปตามช่องที่ต้องการแล้วดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนจนกว่าจะได้ค่าสูงสุด

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ในบางปัญหารายการที่กรอกลงไปในช่วงต่าง ๆ ไม่ใช่ต้นทุนแต่เป็นกำไร จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะหาค่าสูงสุดมากกว่าค่าต่ำสุดและมักเกิดขึ้นกับปัญหาซึ่งจะใช้วิธีคิดแบบ transportation model แต่ไม่เกี่ยวข้องกับวิธีการขนส่งเช่นการเคลื่อนย้ายคนหรือสินค้า ถ้าเป็นปัญหาของการหาค่าสูงสุดในการหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ครั้งแรกนั้นให้เลือกค่าโทษที่มากที่สุดระหว่างกำไรสูงสุดและกำไรรองลงมาในแต่ละแถวตั้งและแถวอน และในการประเมินค่า นั้นให้หาค่ากำไรโดยตรงของช่องว่างให้มีค่าน้อยกว่ากำไรทางอ้อม อันจะทำให้ได้ผลต่างของต้นทุนโดยตรงและต้นทุนทางอ้อมเป็นศูนย์หรือลบทั้งหมดในขั้นสุดท้าย

ความต้องการและความสามารถในการจัดหาสินค้าให้ไม่เท่ากัน

ตามที่ได้กล่าวเน้นมาข้างต้นว่าในการสร้างแบบการขนส่งนั้น ความสามารถในการจัดหาสินค้าที่แหล่งกำเนิดต้องเท่ากับความต้องการรวมทั้งจุดหมายปลายทาง ($\sum a_i = \sum b_j$) จะต้องให้เป็นไปตามเงื่อนไขนี้มิฉะนั้นก็ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงแล้วไม่เป็นปัญหากว่ามีสินค้ามากเกินไปหรือเกิดการขาดแคลนสินค้ามากเกินไป ในการวิเคราะห์จึงจำเป็นที่จะต้องเพิ่มช่องสมมติเข้าไปซึ่งเขียนคำว่า สินค้ามากไปหรือขาดแคลน

	อุบลฯ	อุดรฯ	ขอนแก่น	เชียงใหม่	
กรุงเทพฯ	20	10			30
สมุทรสาคร		20	30	10	60
สมุทรปราการ			10	10	20
	20	30	40	20	

จากตัวอย่างถ้าขอนแก่นต้องการสินค้า 50 หน่วย แทนที่จะเป็น 40 หน่วย แถวนอนจะเขียนว่า ขาดแคลน ภายใต้ชื่อสมุทรสงครามเป็นจำนวน 10 หน่วยซึ่งมีต้นทุนการขนส่งเป็นศูนย์ ในวิธีการคำนวณจะจัดสรรจำนวนที่ขาดแคลน 10 หน่วยไปสู่ จุดหมายปลายทางต่าง ๆ อันจะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมต่ำสุด ในทางตรงข้ามถ้าสมุทรสาคร มี 75 หน่วยที่จะต้องขนส่งไปแทนที่จะเป็น 60 หน่วย แถวดังใหม่จะถูกเพิ่มเข้าไปและเขียนคำว่า สินค้ามากไปหรือสินค้าคงคลังยกไป ทางด้านขวาของเชียงใหม่และมีความต้องการเป็น 15 หน่วย มีต้นทุนการขนส่งเป็นศูนย์ วิธีการขนส่งนั้นจะจัดสรรส่วนที่เกินไปให้แก่แหล่งกำเนิดต่าง ๆ อันจะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมต่ำสุด

ตัวอย่าง ในตัวอย่างต่อไปนี้จะได้เห็น 3 กรณีด้วยกันตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น กรณีแรกเป็นการคิดวิธีการขนส่ง กรณีที่สองความต้องการและความสามารถในการจัดหาสินค้าให้ไม่เท่ากัน กรณีที่สามผลลัพธ์แรกเริ่มเป็น degenerate

บริษัท ก ข ค จำกัด ทำการจัดซื้อขนสัตว์ดิบและปั่นเป็นเส้นด้ายปริมาณขายเส้นด้ายขนสัตว์รายปีของบริษัทเป็น 24,000 กิโลกรัม การผลิตและการขายตลอดช่วง 3 เดือนของปีแสดงในตารางข้างล่างนี้ ในตารางยังจะได้แสดงราคาของขนสัตว์ดิบซึ่งเป็นเพียงวัตถุดิบที่บริษัทจัดซื้อ ราคานี้จะเปลี่ยนแปลงไปตามฤดูกาลตามที่แสดงในตาราง

บริษัทดำเนินการผลิตติดต่อกันตลอดปีมาเป็นเวลาหลายปี ในระหว่างนี้ได้พยายามที่จะคิดค้นหาวิธีที่จะทำการจัดซื้อขนสัตว์ดิบอันจะทำให้ต้นทุนการจัดซื้อ ต้นทุนการผลิต และต้นทุนการเก็บรักษาต่ำสุด ต้นทุนการผลิตและการเก็บรักษาสินค้าแสดงในตารางข้างล่างนี้

บริษัท ก ข ค จำกัด

การผลิต การขาย การซื้อ และข้อมูลราคา

ไตรมาสที่	การผลิต (ก.ก.)	การขายเส้นด้าย (ก.ก.)	ราคาซื้อขนสัตว์ดิบ (ต่อ ก.ก.)
1	4,000	4,000	80 บาท
2	6,000	6,000	120 บาท
3	6,000	6,000	150 บาท
4	8,000	8,000	200 บาท

ข้อมูลต้นทุน

วันที่จัดซื้อ	ต้นทุนการผลิตและการเก็บรักษา (ต่อ ก.ก.)
ไตรมาสเดียวกันกับที่ทำการผลิต	100 บาท
1 ไตรมาสถัดไป	120 บาท
2 ไตรมาสถัดไป	160 บาท
3 ไตรมาสถัดไป	200 บาท
4 ไตรมาสหรือมากกว่าถัดไป	ต้องห้าม

สมมติว่าบริษัทได้รับขนสัตว์ดิบในวันแรกของไตรมาสที่ทำการจัดซื้อ ขนสัตว์ที่ทำการจัดซื้อในวันใดก็ตามของไตรมาสนั้นจะถูกนำมาผลิตในไตรมาสนั้นหรืออาจจะถูกนำมาเก็บรักษาไว้เพื่อทำการผลิตในไตรมาสต่อไปก็ได้ เส้นด้ายที่ทำเสร็จจะถูกขายไปเพื่อว่า ตัวเลขที่ทำการผลิตและขายจะเท่ากันดังในตาราง ก. ราคาขายของเส้นด้ายของบริษัทคงที่เป็น 400 บาทต่อ ก.ก. ข้อจำกัดสำหรับการจัดซื้อก็มีเพียงประการเดียวคือ บริษัทไม่สามารถจัดซื้อขนสัตว์ดิบมากกว่า 10,000 ก.ก.ต่อไตรมาส

จงแสดงการซื้อ การผลิต และการขายที่ให้ผลสูงสุด

วิธีทำ ปัญหานี้จะถูกจัดเป็นปัญหาด้านการขนส่งได้ ซึ่งมีแหล่งกำเนิด (sources) เป็นขนสัตว์ดิบที่จัดซื้อในไตรมาสของปี และจุดหมายปลายทางเป็นขนสัตว์ที่ถูกผลิตเป็นเส้นด้ายและถูกขายไปในไตรมาสต่าง ๆ แต่เพราะว่าบริษัทมีความสามารถที่จะซื้อขนสัตว์ดิบได้ถึงไตรมาสละ 10,000 ก.ก. จะมีช่องหนึ่งทางด้านผลผลิตที่มีการจัดสรรรายไตรมาสของความสามารถที่จะไม่จัดซื้อ

ดังนั้นขนสัตว์ดิบจำนวน 10,000 ก.ก. อาจถูกจัดซื้อในแต่ละไตรมาสบางส่วนอาจจะถูกจัดสรรให้แก่การผลิตในไตรมาสแรก บางส่วนในไตรมาสที่สอง บางส่วนในไตรมาสที่สาม บางส่วนในไตรมาสที่สี่ และบางส่วนจะไม่ถูกซื้อ ในตาราง ก. แต่ละต้นทุนเป็นผลรวมของต้นทุนการจัดซื้อและต้นทุนการผลิตและเก็บสินค้า เช่น ช่อง 11 แทนต้นทุนของขนสัตว์ดิบที่จัดซื้อในไตรมาสแรก (80 บาท) และผลิตในไตรมาสเดียวกัน (100 บาท) ในทำนองเดียวกัน ช่อง 23 แทนต้นทุนขนสัตว์ดิบที่ซื้อในไตรมาสที่สอง (120 บาท) และผลิตในไตรมาสถัดไป (120 บาท) ช่อง 21 แทนขนสัตว์ดิบที่จัดซื้อในไตรมาสที่สอง (120 บาท) และผลิตในไตรมาสที่หนึ่งของปีถัดไปซึ่งเป็นสามไตรมาสถัดไป (200 บาท) พึงสังเกตว่ามีแถวตั้งเพิ่มขึ้นมา 1 แถวภายใต้ชื่อไม่ซื้อถือเป็นช่องสมมติ (dummy) ซึ่งถูกเพิ่มเข้าไปเพื่อให้เกิดความเท่ากันในการซื้อและขาย ช่องสมมตินี้แทนขนสัตว์ดิบที่ไม่ถูกซื้อ ต้นทุนในช่องสมมติจะเป็นศูนย์ อักษร a, แทนจำนวนที่ซื้อ 10,000 ก.ก.ต่อไตรมาส และอักษร b, แทนจำนวนที่ผลิตและขายในแต่ละไตรมาส มีจำนวนรวมที่ไม่ซื้อเป็น 16,000 ก.ก.ทุกปี จะทำการวิเคราะห์เพื่อหาว่าจะจัดสรรปริมาณซื้อและผลิตขายอย่างไรระหว่าง 4 ไตรมาส

การผลิตและขายรายไตรมาส

	v_1 1	v_2 2	v_3 3	v_4 4	v_5 ไม่ซื้อ	
u_1 1	180	200	240	280	0	a.
การซื้อ	4,000	6,000			ϵ	10,000
รายไตรมาส	320	220	240	280	0	
u_2 2			6,000	4,000		10,000
u_3 3	310	350	250	270	0	10,000
u_4 4	320	360	400	300	0	10,000
b,					10,000	
	4,000	6,000	6,000	8,000	16,000	40,000

ตาราง ก แมทริกแสดงต้นทุนพร้อมด้วยผลลัพธ์ที่เป็นไปได้แรกเริ่มโดยวิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ ผลลัพธ์ที่ออกมาจะลดน้อยลง (degenerate solution) ในการประเมินค่าจึงใช้ \in ใส่ลงในช่อง 15

ในตาราง ก จะเห็นว่ามีค่าที่กรอกลงไปจริง ๆ เพียง 7 ค่า แต่ $(m + n - 1)$ มีค่าเท่ากับ 8 ค่านี้จึงเป็นค่าที่ลดน้อยลง (degenerate) จึงเป็นไปได้ที่จะหาค่าของแมทริกนั้นออกเสียจากว่าช่องที่ถูกกรอกรายการมีเป็นจำนวน $(m + n - 1)$ พอดี ดังนั้นจึงใส่ค่า \in ลงในช่อง 15 ซึ่งเป็นช่องหนึ่งในบรรดาหลายช่องที่สามารถกรอกลงไปได้ จะมีเพียงเงื่อนไขเดียวที่ว่า \in ต้องถูกกรอกลงในตำแหน่งอิสระเท่านั้น (independent position) นั่นก็คือหลังจากที่ถูกกรอกรายการลงไปแล้วต้องไม่มีเส้นลูปปิด (closed loops) จากช่องที่ถูกกรอกรายการใด ๆ (รวมทั้งช่อง \in ด้วย) ย้อนกลับมาหาช่องเดิมคือช่อง \in จะเห็นว่าช่อง 25, 33, และ 44 ไม่สามารถที่จะเลือกใช้เป็นช่อง \in ได้ ผลลัพธ์ที่จะหากก็ใช้การคำนวณตามปกติ จะมีแตกต่างกันบ้างก็เพียงค่า \in ถ้า \in ถูกเคลื่อนย้ายไป ช่องอื่น ๆ ที่มีตัวเลขจริง ๆ ก็ยังไม่เปลี่ยนแปลง เพราะว่า \in เป็นจำนวนที่น้อยมากจนการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของ \in จะไม่ทำให้ค่าจริงเปลี่ยนแปลงไป การประเมินค่าตามการคำนวณข้างล่างนี้แสดงว่าผลลัพธ์นี้ไม่ให้ค่าสูงสุด ดังนั้นช่อง 25 ควรจะถูกกรอกรายการลงไปให้ ดูตาราง ก จะเห็นว่าเส้นปิดสำหรับการเคลื่อนย้ายไปสู่ช่อง 25 เป็นรูปสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ คือช่อง 24, 34 และ 35 และจำนวน 4,000 ก.ก. จะถูกเคลื่อนย้ายไป ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ชุดต่อไปหลังจากการเคลื่อนย้ายนี้ ได้แสดงในรูปตาราง ข นี้จึงเป็นผลลัพธ์ที่ให้ขีดสูงสุด

จาก $u_i + v_j = c_{ij}$ สำหรับ x_{ij} มาตรฐาน ให้ $u_1 = 0$ จะได้ $v_1 = 180, v_2 = 200, v_3 = 0, u_4 = 0, u_3 = 0, v_4 = 270, u_2 = 10$ และ $v_3 = 230$ ส่วนค่า \bar{c}_{pq} สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานแต่ละตัวของ x_{pq} จะคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{c}_{13} &= c_{13} - u_1 - v_3 = 240 - 0 - 230 = 10 \\ \bar{c}_{14} &= c_{14} - u_1 - v_4 = 280 - 0 - 270 = 10 \\ \bar{c}_{21} &= c_{21} - u_2 - v_1 = 320 - 10 - 180 = 130 \\ \bar{c}_{22} &= c_{22} - u_2 - v_2 = 220 - 10 - 200 = 10 \\ \bar{c}_{25} &= c_{25} - u_2 - v_5 = 0 - 10 - 0 = -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{31} &= C_{31} - u_3 - v_1 = 310 - 0 - 180 = 130 \\ \bar{C}_{32} &= C_{32} - u_3 - v_2 = 350 - 0 - 200 = 150 \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} - u_3 - v_3 = 250 - 0 - 230 = 20 \\ \bar{C}_{41} &= C_{41} - u_4 - v_1 = 320 - 0 - 180 = 140 \\ \bar{C}_{42} &= C_{42} - u_4 - v_2 = 360 - 0 - 200 = 160 \\ \bar{C}_{43} &= C_{43} - u_4 - v_3 = 400 - 0 - 230 = 170 \\ \bar{C}_{44} &= C_{44} - u_4 - v_4 = 300 - 0 - 270 = 30 \end{aligned}$$

การผลิตและการขายรายไตรมาส

		1	2	3	4	ไม่ซื้อ	
การซื้อราย ไตรมาส	1	4,000	6,000				10,000
	2			6,000		4,000	10,000
	3				8,000	2,000	10,000
	4					10,000	10,000
		4,000	6,000	6,000	8,000	16,000	

ตาราง ข ผลลัพธ์ที่ให้ผลสูงสุด

ตอบ

แบบฝึกหัด

- (1) บริษัท ก ข ค อีเล็กทรอนิกส์ ทำการผลิตเครื่องไฟฟ้า ได้ผลิตพัสดุตั้งและจัดส่งไปตามใบสั่งซื้อที่ได้รับ จำนวนพัสดุที่ได้จะจัดส่งไปในปลายเดือนหน้าเป็นดังนี้

จัดส่งไปที่	จำนวนพัสดุ
อุบลฯ	120
อุดรฯ	100
ขอนแก่น	170
เชียงใหม่	90

บริษัทมีโรงงานอยู่ 3 แห่งที่กรุงเทพฯ สมุทรปราการ และสมุทรสงคราม ยอดผลิตรายเดือนของแต่ละโรงงานเป็นดังนี้

โรงงานที่	ความสามารถในการผลิตต่อเดือน (พัสดุ)
กรุงเทพฯ	90 หน่วย
สมุทรปราการ	110 หน่วย
สมุทรสงคราม	50 หน่วย

บริษัทได้คำนวณกำไรต่อหน่วยในการจัดส่งพัสดุจากโรงงานทั้งสามไปยังจุดหมายปลายทางทั้งสิ้นแห่งดังแสดงตารางข้างล่างนี้

	อุบลฯ	อุดรฯ	ขอนแก่น	เชียงใหม่
กรุงเทพฯ	84	79	80	87
สมุทรปราการ	92	61	76	69
สมุทรสงคราม	60	75	91	81

จงหาว่าจะต้องทำการจัดสรรส่งพัสดุจากโรงงานไปยังที่หมายปลายทางอย่างไร จึงจะได้รับกำไรสูงสุด และกำไรสูงสุดเป็นเท่าไร

- (2) บริษัท ก ข ค จำกัด มีโรงงาน 3 แห่ง คือ 1, 2 และ 3 ซึ่งสามารถผลิตสินค้าที่แตกต่างกัน 4 ชนิด คือ ก, ข, ค และ ง ต้นทุนแปรค่าที่แตกต่างกันในแต่ละโรงงานหมายถึงกำไรของผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดที่แตกต่างกันดังในตารางข้างล่างนี้

โรงงาน	กำไรต่อหน่วย				ความสามารถในการผลิต จำนวนหน่วย/สัปดาห์
	ก	ข	ค	ง	
1	22 บ.	26 บ.	20 บ.	21 บ.	450
2	21 บ.	24 บ.	20 บ.	21 บ.	300
3	18 บ.	20 บ.	19 บ.	20 บ.	250

ความต้องการที่มีต่อผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดเป็นดังนี้

ผลิตภัณฑ์ จำนวนหน่วย/สัปดาห์

ก	200
ข	340
ค	150
ง	270

จงหาว่าแต่ละโรงงานจะผลิตสินค้าเป็นจำนวนเท่าไรเพื่อที่จะได้รับกำไรสูงสุด
ให้ใช้วิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ

- (3) โรงงานแห่งหนึ่งทำการผลิตสินค้า 3 ชนิด คือ ก, ข และ ค ความต้องการสำหรับผลิตภัณฑ์เหล่านี้เป็น 90, 210 และ 120 หน่วย/สัปดาห์ ตามลำดับ ผลิตภัณฑ์เหล่านี้จะถูกผลิตขึ้นมาโดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่งใน 3 วิธี คือ 1, 2 และ 3 ความสามารถในการผลิตของแต่ละวิธีและกำไรที่เกี่ยวข้องกับผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดและเกี่ยวข้องกับวิธีการผลิตแต่ละชนิดได้แสดงในตารางข้างล่างนี้ จงหาวิธีการผลิตสินค้าที่ให้ผลดีที่สุดโดยใช้วิธีจุดมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

วิธีทำ	จำนวนหน่วย/สัปดาห์	กำไร/หน่วย			
		ผลิตภัณฑ์	1	2	3
1	160	ก	139 บ.	140 บ.	137 บ.
2	120	ข	209 บ.	207 บ.	210 บ.
3	140	ค	254 บ.	255 บ.	255 บ.

- (4) บริษัท ข ค จำกัด มีโกดังจัดส่งสินค้า 3 แห่ง คือ ก, ข และ ค ซึ่งจัดส่งสินค้าไปให้แก่ร้านค้าปลีก 5 แห่ง ตารางข้างล่างนี้แสดงระยะทางจากโกดังไปยังร้านค้าปลีกต่าง ๆ ความต้องการของร้านค้าปลีก และปริมาณสินค้าที่โกดังสามารถจัดส่งได้ จงหาว่าโกดังแห่งใดควรจัดส่งสินค้าไปให้ร้านค้าปลีกเพื่อที่จะให้ได้ระยะทางใกล้ที่สุด ให้ใช้วิธี VAM

ร้านค้าปลีก	โกดัง			จำนวนสินค้าที่ต้องการ
	f1	ข	ค	
1	6	7	8	12
2	4	6	7	15
3	5	7	6	21
4	4	4	9	24
5	8	3	5	24

จำนวนสินค้าที่จัดส่งไปได้ 15 48 33

- (5) โกดัง 3 แห่งจัดส่งสินค้าไปให้ร้านค้า 5 แห่ง ตารางข้างล่างนี้แสดงต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยระหว่างโกดังกับร้านค้า ความจุของโกดัง และความต้องการของร้านค้า อย่างไรก็ตามสะพานใหญ่ได้รับความเสียหายจนทำให้การขนส่งชะงักระหว่างโกดัง ก ไปสู่อร้านค้า 5 จากโกดัง ข ไปสู่อร้านค้า 2 และจากโกดัง ค ไปสู่อร้านค้า 4 จากข้อกำหนดเหล่านี้ จงหาตารางการขนส่งสินค้าที่ให้ผลดีสุดให้ใช้ VAM

ต้นทุนการขนส่งต่อหน่วย

ร้านค้า	โกดัง			จำนวนสินค้าที่ต้องการ
	ก	ข	ค	
1	2 บ.	4 บ.	6 บ.	75
2	3	8	7	345
3	4	3	8	180
4	4	6	3	90
5	2	6	5	210

จำนวนสินค้าที่จัดส่งไปได้ 850 300 450

- (6) ตารางข้างล่างนี้แสดงต้นทุนต่อหน่วยของค่าขนส่งและปริมาณสินค้าที่ต้องการ พร้อมทั้งปริมาณสินค้าที่จะจัดส่งไปให้ จงหาตารางการขนส่งที่ให้ผลดีสุดโดยใช้
- จุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ
 - วิธีต้นทุนที่น้อยที่สุด
 - วิธี VAM

วันค้า	โกดัง				จำนวนสินค้าที่ต้องการ
	ก	ข	ค	ง	
1	20	40	10	14	20
2	26	18	24	16	40
3	8	30	14	18	60
4	28	14	2	0	80
5	6	24	10	38	100
ความจุของโกดัง	120	120	40	20	

- (7) จงแก้ปัญหาของการขนส่งที่ไม่สมดุลโดยใช้วิธี VAM ความต้องการที่จุดหมายปลายทาง
อุบลราชธานีต้องได้รับสินค้าส่งโดยตรงจากสมุทรสงครามเท่านั้น

	อุบลฯ	อุดรฯ	ขอนแก่น	ปริมาณสินค้าที่จัดส่งได้
กรุงเทพฯ	10	2	0	40
สมุทรปราการ	6	4	8	20
สมุทรสาคร	14	10	4	30
สมุทรสงคราม	18	12	0	30
ความต้องการสินค้า	10	20	30	

- (8) จากปัญหาด้านการขนส่งที่กำหนดให้ข้างล่างแสดงให้เห็นความต้องการรวมที่มากกว่า
ปริมาณจัดส่ง สมมติว่า ต้นทุนการลงโทษ (The penalty cost) ต่อหน่วยของความ
ขาดแคลนเป็น 5, 3 และ 2 สำหรับที่หมายปลายทาง ก, ข และ ค จงหาค่าที่ให้ผลดีที่สุด

แหล่งจัดส่ง	ที่หมายปลายทาง			ปริมาณสินค้าที่จัดส่ง
	ก	ข	ค	
1	10	2	14	20
2	12	8	12	160
3	6	4	10	30
ความต้องการสินค้า	150	40	100	

- (9) จากตารางปัญหาการขนส่งที่ไม่สมดุลกันที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ ถ้า 1 หน่วยจากแหล่ง
จัดส่งสินค้า i แห่ง ไม่ได้ถูกส่งไป (สู่ที่หมายปลายทางแห่งใดแห่งหนึ่ง) ต้นทุนของการ

เก็บรักษา (storage cost) จะเกิดขึ้น ให้ต้นทุนของการเก็บรักษาต่อหน่วยที่แหล่ง 1, 2 และ 3 เป็น 5, 4 และ 3 นอกจากนั้นถ้าสินค้าที่จะส่งไปทั้งหมดจากแหล่ง 2 ต้องถูกส่งไปหมดเพื่อเตรียมที่สำหรับเก็บสินค้าชนิดใหม่ จงหาค่าที่ให้ผลดีที่สุด

ที่หมายปลายทาง

แหล่งมีสินค้า	ก	ข	ค	ปริมาณที่จัดส่ง
1	2	4	2	40
2	0	8	10	80
3	4	6	6	60
ความต้องการ	60	40	40	

(10) ในปัญหาด้านการขนส่ง (3×3) ให้ x_{ij} เป็นจำนวนที่ถูกขนส่งจากแหล่ง i ไปสู่ที่ปลายทาง j และ c_{ij} เป็นต้นทุนการขนส่งต่อหน่วย ปริมาณสินค้าที่จัดส่งไปจากแหล่งกำเนิด 1, 2 และ 3 เป็น 15, 30 และ 85 หน่วย และความต้องการที่จุดหมายปลายทาง 1, 2 และ 3 เป็น 20, 30 และ 80 หน่วย สมมติว่าในการหาค่าผลดีที่ดีที่สุดนั้นใช้จุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ กำหนดให้ตัวหาค่าของแหล่งกำเนิดสินค้า 1, 2 และ 3 เป็น -2, 3 และ 5 และตัวหาค่าของที่หมายปลายทาง 1, 2 และ 3 เป็น 2, 5 และ 10

(ก) จงหาต้นทุนรวมของการขนส่งที่ได้ผลดีที่สุด

(ข) อยากทราบค่าที่น้อยที่สุดของ c_{ij} สำหรับตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานอันจะทำให้ค่าดังกล่าวข้างบนนั้นได้ผลดีที่สุด

(11) จงแก้ปัญหาด้านการขนส่งต่อไปนี้ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าน้อยจำนวนลง (degenerate) ให้ใช้วิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ

ที่หมายปลายทาง

แหล่งสินค้า	ก	ข	ค	ปริมาณที่จัดส่ง
1	0	4	2	10
2	4	2	10	20
3	4	8	6	10
ความต้องการ	10	10	20	

(12) จงแก้ปัญหาด้านการขนส่งต่อไปนี้โดยใช้วิธีจุดมุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือ วิธีต้นทุนที่น้อยที่สุดและวิธี VAM

ที่หมายปลายทาง

แหล่งสินค้า	ก	ข	ค	ปริมาณที่จัดส่ง
1	10	2	16	24
2	4	8	0	28
3	6	12	14	8
ความต้องการ	18	20	22	