บทที่ 3
โปรแกรมเส้นตรง
(Linear Programming)

คำโปรแกรมเส้นตรงนี้เกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรที่มีจำนวนจำกัดในระหว่างงานต่าง ๆ ที่แข่งขันกัน เพื่อจะให้ผลได้เป็นที่น่าพอใจที่สุด เป็นการใช้การคำนวณแบบคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาที่ต้องการ คำคุณศัพท์ linear หมายความว่า ฟังก์ชั่นทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ทั้งหมดเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรงทั้งสิ้น ส่วนคำ programming ในที่นี้ไม่ได้หมายถึง โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ แต่คำ programming นี้มีความหมายเช่นเดียวกับคำ planning ดังนั้นคำว่า linear programming จึงหมายถึง การวางแผนงานเพื่อจะให้ได้ผลเป็นที่น่าพอใจที่สุด

บทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะพัฒนาวิธีการทางพีชคณิตที่จะใช้แก้สมการโครงการเส้นตรง โดยใช้วิธีที่เรียกว่า วิธีแบบง่าย (Simplex method) เริ่มแรกจะเป็นการแก้สมการด้วยกราฟของปัญหาที่มีตัวแปร 2 ตัว ซึ่งจะใช้เป็นพื้นฐานของการพัฒนาความเข้าใจในวิธีแบบง่ายนี้

การแก้สมการโครงการเส้นตรง ที่มี 2 ตัวแปร โดยวิธีกราฟ ดูจากตัวอย่าง

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 8x_1 + 6x_2$

เงื่อนไข

$$4x_1 + 6x_2 \leq 12 \quad \text{.........................(1)}$$

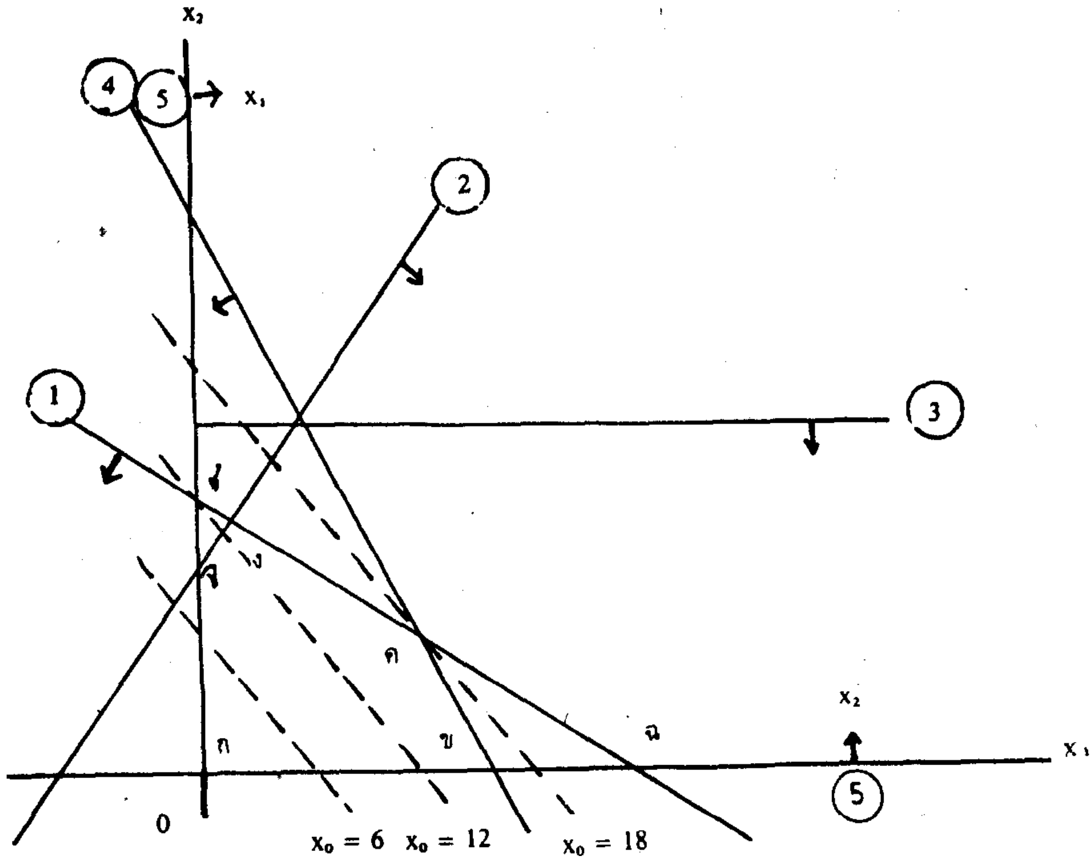
$$-6x_1 + 4x_2 \leq 6 \quad \text{.........................(2)}$$

$$4x_2 \leq 10 \quad \text{.........................(3)}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad \text{.........................(4)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{.........................(5)}$$

รูปที่ 1



วิธีทำก็คือ ให้จุดลงในกราฟเพื่อหาพื้นที่แก้ปัญหาที่เป็นไปได้ (feasible solution space) ซึ่งตามคำจำกัดความก็คือ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบโดยขีดจำกัดจาก (1) ถึง (5) การแก้ปัญหาที่ได้ผลก็คือ หาจุด (ในพื้นที่ที่ใช้แก้ปัญหา) ที่จะทำให้ค่าของฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ x_0 มีค่ามากที่สุด

พื้นที่แก้ปัญหาถูกจุดลงในกราฟในแนวระนาบ (x_1, x_2) ตามที่แสดงในรูปที่ 1 ขีดจำกัดที่เป็นบวก (5) ระบุว่าค่าที่เป็นไปได้นั้น (feasible solution) ต้องอยู่ใน quadrant แรก เป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่า $x_1 \geqslant 0$ และ $x_2 \geqslant 0$ ขีดจำกัดจาก (1) ถึง (4) จะถูกจุดลงในกราฟเป็นครั้งแรกด้วยเครื่องหมาย $\leqslant$ ถูกแทนโดย = อัน เป็นสมการเส้นตรงชั้นเดียวอย่างง่าย ๆ พื้นที่ซึ่งแต่ละขีดจำกัดล้อมรอบนั้น แสดงให้เห็นโดยลูกศรบนหรือใต้เส้นตรงของเส้นนั้น ๆ ผลที่ได้

ก็คือ พื้นที่แก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ดังในรูปที่ 1 นั่นก็คือพื้นที่ ก ข ค ง จ ส่วนขีดจำกัด (3) เป็นขีดที่ไม่จำเป็น (redundant) เพราะว่าเส้นนี้อาจถูกยกเลิกได้โดยไม่สะเทือนต่อพื้นที่แก้ปัญหา

ทุกจุดภายในหรือบนเส้นรอบพื้นที่ ก ข ค ง จ เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งหมด (constraints) จาก (1) ถึง (5) ดังนั้นค่าที่ให้ผลดีที่สุด (optimun solution) ก็คือจุดในเส้นรอบรูป ก ข ค ง จ ซึ่งจะให้ค่าสูงสุดของ x_0 ในรูปที่ 1 แสดงการเขียนกราฟของเส้นวัตถุประสงค์ $x_0 = 8x_1 + 6x_2$ มีค่า $x_0 = 6, 12$ และ 18 อันแสดงถึงทิศทางที่ x_0 เพิ่มขึ้น ตามรูปจะเห็นว่าถ้า x_0 เพิ่มขึ้นมากกว่า 18 เส้นวัตถุประสงค์ (objective function) จะไม่ผ่านค่าต่าง ๆ ที่อยู่ในพื้นที่แก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ดังนั้นจึงหมายความว่า $x_0 = 18$ ถือเป็นค่าสูงสุด ค่า $x_0 = 18$ หามาได้อย่างไรหามาได้โดยการเคลื่อนย้ายเส้น $8x_1 + 6x_2 = x_0$ ขนานกันไปทุกเส้น ในทิศทางที่เพิ่มค่า x_0 ขึ้นเป็นลำดับ จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ x_0 เกิดขึ้นเมื่อเส้นวัตถุประสงค์ผ่านจุด ค ซึ่งมีจุดตัดเป็น $x_1 = 1.5$ และ $x_2 = 1$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการเส้นวัตถุประสงค์ จะได้ $x_0 = 8x_1 + 6x_2 = 8(1.5) + 6(1) = 18$

การแก้สมการโดยการทำให้เป็นแบบฟอร์มมาตรฐาน

การวิวัฒนาการของวิธีซิมเพล็กซ์ อยู่บนรากฐานของการใช้แบบฟอร์มมาตรฐาน (ซึ่งเงื่อนไขต่าง ๆ ได้ถูกเปลี่ยนเป็นสมการ) เพื่อที่จะเปลี่ยนจากกราฟมาเป็นการเสนอแบบวิธีพีชคณิต ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่า พื้นที่แก้ปัญหาแบบกราฟ สามารถนำมาเสนอในรูปแบบฟอร์มมาตรฐานดังนี้

ตัวอย่างของแบบฟอร์มมาตรฐาน

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$

เงื่อนไข

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$ ....(1)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2$ ....(2)

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$ ....(m)

และ $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \ldots\ldots, x_n \geqslant 0$

เปลี่ยนเป็นดังนี้

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n$

เงื่อนไข

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \qquad + s_1 = b_1$ ....:1)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \qquad + s_2 = b_2$ .... (2)

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \qquad + s_m = b_m$ .... (3)

และ $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n \geq 0$

$s_1, s_2 \ldots\ldots, s_n \geq 0$

จากตัวอย่างข้างต้นเขียนเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานได้ดังนี้

จงหาค่าสูงสุดของของ $x_0 = 8x_1 + 6x_2$

เงื่อนไข

$4x_1 + 6x_2 + s_1 \quad = 12$ ....(1)

$-6x_1 + 4x_2 \quad + s_2 \quad = 6$ ....(2)

$4x_2 \quad + s_3 = 10$ ....*...... (3)

$4x_1 + 2x_2 \quad + s_4 = 8$ ....(4)

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3\ s_4 \geq 0$

ตัวแปรค่า s_1, s_2, s_3 และ s_4 เป็นค่าของช่วงว่าง (slacks) ใช้สำหรับเปลี่ยนความไม่เท่ากันให้เป็นสมการ

ทุกจุดในพื้นที่ของผลลัพธ์ (solution space) จะถูกแทนในรูปของตัวแปร x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 และ s_4 สิ่งแรกให้สังเกตดูว่า $s_1 = 0$ ลดสมการที่ (1) ลงเป็น $4x_1 + 6x_2 = 12$ ดูในกราฟรูปที่ 1 ทุกจุดในเส้น งค ต้องมี $s_1 = 0$ ดังนั้นเส้น คง อาจถูกแทนโดย $s_1 = 0$ หรือ $4x_1 + 6x_2 = 12$ ทำนองเดียวกัน $s_2 = 0$ และ $s_4 = 0$ หมายถึงเส้น จง และ คข ตามลำดับ ส่วนเงื่อนไขที่ (3) แสดงถึง $s_3 = 0$

แต่เมื่อ $s_1 = 1$ มีความหมายว่าอะไร จากเงื่อนไข (1) จะได้ $4x_1 + 6x_2 = 12 - s_1 = 11$ ดังนั้น $s_1 = 1$ เท่ากับว่าเป็นการเคลื่อนย้ายเส้น งค ลงมา และขนานกับเส้นเดิมจนกระทั่ง $4x_1 + 6x_2 = 11$ ดังนั้น เมื่อ $s_1 \geqslant 0$ พร้อมกับ $x_1 \geq 0$ และ $x_2 \geq 0$ หมายถึงพื้นที่ กฉช ในทำนองเดียวกันก็อาจใช้กับ $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$ และ $s_4 \geq 0$

วิธีหาจุดมุมสูงสุดตามวิธีพีชคณิต

จากที่แสดงข้างต้นนี้ จะเห็นว่าจุดที่ให้ผลดีที่สุด ต้องเกิดขึ้นที่จุดมุมสูงสุดที่จะเป็นไปได้ของพื้นที่ที่แสดงผลลัพธ์นั้น เพื่อที่จะให้ได้ผลนี้ออกมา โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต ในการแก้สมการโครการเส้นตรง จึงจำเป็นที่จะต้องแสดงให้เห็นว่า จุดมุมสูงสุดนี้จะถูกหาขึ้นมาตามวิธีการทางพีชคณิตได้อย่างไร ซึ่งจะอธิบายตามตัวอย่างดังต่อไปนี้

จากตัวอย่างของแบบฟอร์มมาตรฐานข้างต้น แสดงว่าพื้นที่ของผลลัพธ์ (พื้นที่ ก ข ค ง จ) สามารถถูกแทนโดยสมการ (1) ถึง (4) พร้อมกับเงื่อนไขที่เป็นบวก เงื่อนไขที่เป็นบวกจะเป็นคำตอบสำหรับการพิจารณา ผลลัพธ์ที่เป็นบวกจากการแก้สมการ (1) ถึง (4) ดังนั้นจึงแยกเงื่อนไขที่เป็นบวกออกต่างหากเหลือ 4 สมการ กับตัวที่ไม่รู้ค่าอยู่ 6 ตัว ผลต่างระหว่างจำนวนตัวที่ไม่รู้ค่า กับจำนวนของสมการ (= 2) มีความสัมพันธ์โดยตรงกับลักษณะสำคัญของจุดมุม (เมื่อเปรียบเทียบกับจุดที่ไม่อยู่ในมุมของพื้นที่ที่แสดงผลลัพธ์) โดยเฉพาะจุดมุมทุกจุดของพื้นที่ ก ข ค ง จ (ดูต่อรูปที่ 1) มีตัวแปรค่า 2 ตัว (จาก 6 ตัว) เท่ากับศูนย์ ตารางข้างล่างนี้แสดงตัวแปรค่ามีค่าเป็นศูนย์สำหรับจุดมุม ก, ข, ค ง และ จ

จุดมุม	**ตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์**
ก	$x_1 = x_2 = 0$
ข	$x_2 = s_4 = 0$
ค	$s_1 = s_4 = 0$
ง	$s_1 = s_2 = 0$
จ	$x_1 = s_2 = 0$

จะเห็นว่าทุก ๆ จุดที่ไม่ได้เป็นจุดมุมในพื้นที่แสดงผลลัพธ์จะมีตัวแปรค่าเป็นศูนย์อย่างมากเพียง 1 ตัว เช่น จุดกลางของเส้น งค มีตัวแปรค่าที่เป็นศูนย์เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ $s_1 = 0$ จุดที่อยู่ภายในพื้นที่ เช่น $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ จะไม่มีตัวแปรค่าเป็นศูนย์ แต่จะได้ค่า $s_1 = 2$, $s_2 = 8$, $s_3 = 6$ และ $s_4 = 2$

จากที่แสดงมานี้ จะเห็นว่าจุดมุมหาได้โดยตรงจากแบบฟอร์มมาตรฐาน โดยกำหนดให้ตัวแปร 2 ตัว เป็นศูนย์พร้อมกัน เช่น $x_2 = s_4 = 0$ เพื่อทำให้สมการจาก (1) ถึง (4) ซึ่งมี 4 สมการมีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว ดังต่อไปนี้

$$4x_1 + s_1 = 12$$

$$-6x_1 + s_2 = 6$$

$$+ s_3 = 10$$

$$4x_1 = 8$$

ค่าที่ได้ทุกตัวแปรจะมีอยู่ค่าเดียวดังนี้ $x_1 = 2, s_1 = 4, s_2 = 18$ และ $s_3 = 10$ พร้อมทั้งมี $x_2 = s_4 = 0$ จะได้จุด ข

วิธีการดังที่กล่าวข้างต้นนี้เป็นการหาค่ามาตรฐานของสมการที่เป็นแบบฟอร์มมาตรฐาน โดยทั่วไปแล้ว ค่ามาตรฐานของกลุ่มสมการที่มี m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว สามารถหาได้โดยกำหนดให้ตัวแปรค่า n – m ตัว เท่ากับศูนย์แล้วจึงแก้สมการที่มี m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่าอยู่ m ตัว โดยกำหนดเงื่อนไขว่า ทุกตัวแปรมีอยู่ค่าเดียว ในกรณีนี้ตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์ n – m ตัว จะถูกเรียกว่าตัวแปรไม่มาตรฐาน (non basic) ส่วนที่เหลือคือตัวแปร m ตัว จะถูกเรียกว่า ตัวแปรมาตรฐาน (basic) ถ้าค่าที่ได้ออกมาเป็นตัวแปรมาตรฐานที่มีค่าเป็นบวก ก็จะถูกเรียกว่า ค่าเป็นไปได้ที่เป็นมาตรฐาน (basic feasible solution) ถ้าเป็นลบก็เป็นค่าที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible) ดังนั้นจุดมุมที่เป็นไปได้ (feasible extreme point) ก็คือ ค่าที่เป็นไปได้ที่เป็นมาตรฐาน

คุณสมบัติพื้นฐานของโปรแกรมเส้นตรง เป็นดังนี้ จุดมุมที่เป็นไปได้ของสมการโครงการเส้นตรง หามาได้ทั้งหมดจากค่าเป็นไปได้ที่เป็นมาตรฐาน (basic feasible solution) ของสมการ

วิธีการของซิมเพล็กซ์ (Simplex method)

ขั้นแรกก็คือ การเริ่มจากค่าเป็นไปได้ที่เป็นมาตรฐาน (นั่นก็คือจุดมุมที่เป็นไปได้) แล้วจึงเคลื่อนย้ายผ่านจุดมุมที่เป็นไปได้จุดอื่น ๆ เป็นลำดับ เพื่อว่าค่าที่ได้ใหม่ออกมาแต่ละครั้งสามารถที่จะเพิ่มค่าของสมการวัตถุประสงค์ได้

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 8x_1 + 6x_2$

เงื่อนไข

$$4x_1 + 6x_2 \leqslant 12$$

$$-6x_1 + 4x_2 \leqslant 6$$

$$4x_2 \leqslant 10$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

วิธีทำ $x_0 = 8x_1 + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

เงื่อนไข

$4x_1 + 6x_2 + s_1 = 12$ .... (1)

$-6x_1 + 4x_2 + s_2 = 6$ .... (2)

$4x_2 + s_3 = 10$ .... (3)

$4x_1 + 2x_2 + s_4 = 8$ .... (4)

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

วิธีการแบบซิมเพล็กซ์ จะเริ่มจากค่าเป็นไปได้ที่เป็นมาตรฐาน (หรือจุดมุม) จากตัวอย่างนี้จะต้องมีตัวแปร 2 ตัว (จากทั้งหมด 6 ตัว) มีค่าเป็นศูนย์ ค่าเป็นไปได้มาตรฐาน (basic feasible solution) แรกเริ่มหามาได้โดยกำหนดให้ $x_1 = x_2 = 0$ จะได้ค่าตัวแปรที่ห้อยท้ายของแต่ละสมการ ดังนี้ $s_1 = 12$, $s_2 = 6$, $s_3 = 10$ และ $s_4 = 8$ ตัวแปรค่าห้อยท้าย (slack variables) จะเป็นผลลัพธ์แรกเริ่ม ซึ่งจะมีสัมประสิทธิ์ในรูปของแมทริก ที่มีค่าเป็น 1 (identity matrix) ตัวคงที่ด้านขวามือของสมการจะมีค่าเป็นบวกเสมอ (คุณสมบัติของแบบฟอร์มมาตรฐาน)

การคำนวณแรกเริ่มของการแก้สมการเป็นดังนี้

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-8	-6	0	0	0	0	0
S_1	1	-	4	6	1	0	0	0	12
S_2	2	-	-6	4	0	1	0	0	6
s_3	3	-	0	4	0	0	1	0	10
s_4	4	-	4	2	0	0	0	1	8

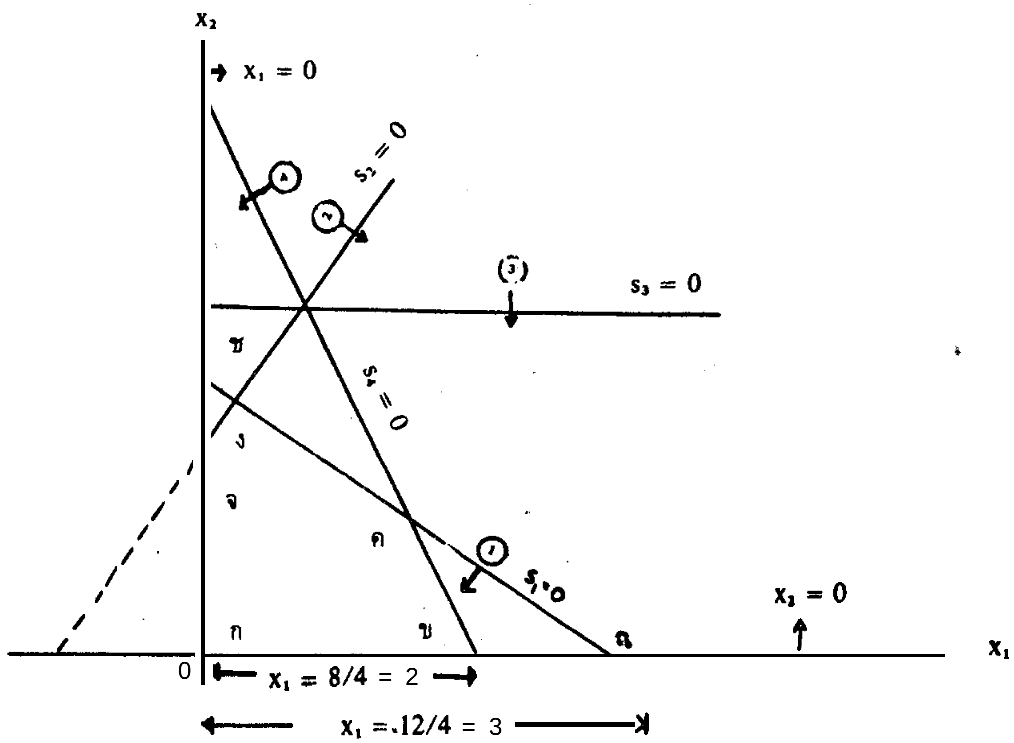
ให้สังเกตว่าสมการของเส้นวัตถุประสงค์ แสดงในรูปของสมการเป็นดังนี้

$$x_0 - 8x_1 - 6x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 - 0s_4 = 0$$

ช่วงคอลัมน์มาตรฐาน (the basic column) มีตัวแปรค่ามาตรฐานคือ s_1, s_2, s_3 และ s_4 ช่วงผลลัพธ์จะให้ค่าปัจจุบันของตัวแปรค่ามาตรฐาน คือ $s_1 = 12$, $s_2 = 6$, $s_3 = 10$ และ $s_4 = 8$ แต่ละสมการในตารางจะมีตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานปัจจุบัน (the current nonbasic variables) อันเป็นค่าที่ไม่ปรากฏในคอลัมน์มาตรฐาน และมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $x_1 = x_2 = 0$ เส้นวัตถุประสงค์จะได้ค่า $x_0 = 0$ ตามที่แสดงในช่องผลลัพธ์

คอลัมน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรมาตรฐานแรกเริ่ม (s_1, s_2, s_3 และ s_4) จะปรากฏทางด้านซ้ายมือ และมีสัมประสิทธิ์จัดอยู่ในรูปของแมทริกที่มีค่าเป็น 1 เพื่อความสะดวกจะแสดงด้วยกราฟ เพื่อให้เห็นพื้นที่แสดงผลลัพธ์ ค่าที่เริ่มต้นก็คือจุด ก. ดูในพื้นที่ของกราฟ

รูปที่ 2



ขั้นต่อไปก็คือ การหาค่าเป็นไปได้มาตรฐานตัวใหม่ (จุดมุม) พร้อมกับการเพิ่มค่าของเส้นวัตถุประสงค์ โดยการเลือกตัวแปรที่ไม่เป็นมาตรฐาน (non basic variable) มาเพิ่มค่าของตัวมันเองขึ้นให้มากกว่าศูนย์ โดยมีเงื่อนไขว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเส้นวัตถุประสงค์

สามารถที่จะเพิ่มค่าของ x_0 ได้ แต่จุดมุมต้องมีตัวแปรค่าที่ไม่เป็นมาตรฐาน 2 ตัวที่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นชุดหนึ่งของตัวแปรมาตรฐาน ต้องถูกทำให้เป็นตัวแปรไม่มาตรฐานที่มีค่าเป็นศูนย์ โดยมีเงื่อนไขว่า ค่าใหม่นี้จะต้องเป็นค่าที่เป็นไปได้ (feasible) เช่น เป็นค่าบวกมีค่าต่ำสุดอยู่ในพื้นที่แสดงผลลัพธ์ ตัวแปรค่าไม่มาตรฐานที่ทำเป็นมาตรฐานปกติแล้วเรียกว่า ตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา (entering variable) จะถูกคำนวณหามาได้โดยสภาวะที่ให้ผลดีที่สุด (optimality condition) ส่วนตัวแปรค่ามาตรฐานที่ถูกทำเป็นตัวแปรค่าไม่มาตรฐาน ถูกเรียกว่า ตัวแปรค่าที่กำลังจากไป (leaving variable) และถูกคำนวณหามาได้โดยสภาวะที่เป็นไปได้ (feasibility condition) ของพื้นที่ที่แสดงผลลัพธ์

สภาวะที่ให้ผลเป็นที่น่าพอใจที่สุด ก็คือ การเลือกตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา ในขณะที่ตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานมีค่าสัมประสิทธิ์เป็นลบในสมการ x_0 ของตาราง หรือ เท่ากับ การเลือกสัมประสิทธิ์ที่เป็นบวกในสมการวัตถุประสงค์แรกเริ่ม (หาค่ามากที่สุด) จากในตารางข้างบนนี้ ทั้ง x_1 และ x_2 มีสัมประสิทธิ์เป็นลบ ดังนั้น จึงมีคุณสมบัติที่จะเป็นตัวแปรที่กำลังจะเข้ามา อย่างไรก็ตาม ปกติแล้วให้เลือกตัวแปรค่าที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบมากที่สุด เพื่อที่จะได้มีค่าของเส้นวัตถุประสงค์มากที่สุด ดังนั้น x_1 จึงเป็นตัวแปรที่กำลังจะเข้ามา

จากนั้นก็ให้ปรับปรุงสภาวะของพื้นที่ที่เป็นไปได้นี้รูปที่ 2 แสดงว่า ถ้า x_1 ตัวแปรที่กำลังจะเข้ามามีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของสมการต้องเคลื่อนจากจุด ก ไปยังจุด ข จุด ข จะเป็นจุดมุมที่เป็นไปได้ ถัดจากจุด ก หลังจากที่ได้เพิ่มค่า x_1 แล้ว หรืออีกนัยหนึ่ง จุด ข เป็นผลลัพธ์ของจุดมุมที่เป็นไปได้จุดใหม่ ตัวแปรค่าที่ไม่เป็นมาตรฐานที่จุด ข คือ $x_2 = 0$ และ $s_4 = 0$ เมื่อเปรียบเทียบกับจุด ก ที่มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรที่ไม่เป็นมาตรฐาน จะพบว่า s_4 เข้ามาแทนที่ของ x_1 ดังนั้น s_4 จึงเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป

ก่อนที่จะแสดงว่าตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป s_4 จะถูกหาค่าโดยตรงจากตารางได้อย่างไร การอธิบายดังต่อไปนี้ จะเป็นการอธิบายแบบเรขาคณิต คือให้หาค่าจุดตัดของเส้นขีดจำกัด (constraints) ทั้งหมดที่ตัดเส้นแกน x_1 ในทิศทางบวก เส้นขีดจำกัดที่ตัดกันมีค่าเป็นบวกและมีค่าน้อยที่สุด จัดเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป

ในรูปที่ 2 จะมีเส้นขีดจำกัด (1) และ (4) เท่านั้นที่ตัดแกน x_1 ที่มีทิศทางบวก เส้นขีดจำกัด (2) ตัดเส้นแกน x_1 ที่มีทิศทางลบ และเส้นขีดจำกัด (3) ขนานกับแกน x_1 ผลเช่นนี้ดูได้โดยตรงจากตาราง เพราะว่าทั้งเส้นขีดจำกัด (1) และ (4) มีสัมประสิทธิ์ของ x_1 เป็นบวก

ทั้งคู่ (คือ 4 และ 4) ในขณะที่ (2) และ (3) มีสัมประสิทธิ์เป็นลบและศูนย์ (คือ -6 และ 0) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาของเส้นขีดจำกัดเป็นลบหรือศูนย์ เส้นขีดจำกัดนั้นจะไม่ตัดเส้นแกนในทิศทางบวก ดังนั้นจึงไม่มีผลสะเทือนต่อพื้นที่ที่ใช้หาค่าสูงสุด

รูป 2 แสดงให้เห็นว่าจุดตัดของเส้นขีดจำกัด (1) และ (4) กับเส้นแกน x_1 ในทิศทางบวกจะเป็นดังนี้ กข = 8/4 = 2 และ กฉ = 12/4 = 3 จะเห็นว่าค่า กข ต่ำกว่าค่า กฉ ดังนั้นค่า x_1 คือ กข = 2 และที่จุด ข นี้ ตัวแปรค่ามาตรฐาน s_4 จะกลายเป็นศูนย์ ฉะนั้น s_4 จึงเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป

ข้อมูลทำนองเดียวกันนี้จะหาได้โดยตรงจากตาราง โดยการหาอัตราส่วนของค่าในคอลัมน์ผลลัพธ์ ให้มีค่าของสัมประสิทธิ์ของ x_1 ของเส้นขีดจำกัดเป็นบวก ตัวแปรค่ามาตรฐานที่เกี่ยวข้องกับอัตราส่วนต่ำสุด (นั่นก็คือจุดตัดที่น้อยที่สุด) จะกลายเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป ให้ดูจากการคำนวณดังนี้

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
x_0	0	1	-8	-6	0	0	0	0	0
	I	-	4	6	1	0	0		12 → 12/4 = 3
s_2	2	-	6	4	0	1	0	0	6
s_3	3	-	0	4	0	0	1	0	10
s_4	4	-	$\boxed{4}$	2	0	0	0	1	8 → 8/4 = 2
x_0	0	1							
s_1	1	-							
s_2	2	-							
s_3	3	-							
x_1	4	-	1	1/2	0	0	0	1/4	2

หลังจากที่ได้หาค่าของตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาและตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปแล้ว ขั้นต่อไปก็คือ การเปลี่ยนแปลงค่าในตารางเพื่อที่จะให้ค่าของคอลัมน์ผลลัพธ์ แจ้งค่าโดยตรงของ x_0 ใหม่ และค่าของตัวแปรค่ามาตรฐาน (ใหม่) คือ s_1, s_2, s_3 และ x_1 วิธีการทำก็คือการใช้กฎเกณฑ์ของ Guass-Jordan method :- นั่นก็คือการขจัดตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาออกจากสมการทั้งหมด ยกเว้นตัวที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป เพื่อที่จะอธิบายวิธีการนี้ ให้ดูจากตารางข้างบนนี้

สัมประสิทธิ์ 4 ได้ตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา (แทนด้วย □) อยู่แถวนอนเดียวกันกับอัตราส่วนที่ต่ำสุด ถูกเรียกว่าตัวประกอบหลัก (pivot element) สมการ s_4 **เกี่ยวข้องกับตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไป ถูกเรียกว่าสมการหลัก** (pivot equation) ขั้นแรกให้หารสมการหลักด้วยตัวประกอบหลัก และแทนค่า s_4 ด้วยตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาคือ x_1

การขจัด x_1 ออกจากสมการทั้งหมดยกเว้นจากสมการหลัก จะกระทำได้โดยการหาตัวคูณที่เหมาะสม คูณสมการหลัก (ซึ่งมีตัวประกอบหลักเท่ากับ 1) แล้วเพิ่มเข้าแก่ทุกสมการรายละเอียดของการคำนวณในแถวแนวนอนเป็นดังนี้

1. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย + 8 แล้วบวกเข้ากับสมการ x_0 เดิม จะได้สมการใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ x_0 ใหม่ :	0	−2	0	0	0	2	16

2. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย − 4 แล้วบวกเข้ากับสมการ s_1 จะได้สมการใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ s_1 ใหม่ :	0	4	1	0	0	−1	4

3. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย 6 แล้วบวกเข้ากับสมการ s_2 จะได้สมการใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ s_2 ใหม่ :	0	7	0	1	0	3/2	18

4. สมการ s_3 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง เพราะสัมประสิทธิ์ภายใต้ x_1 เป็นศูนย์อยู่แล้ว

ผลของการคำนวณจะเป็นในตารางดังนี้

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
									16
s_1	1	–	0	$\boxed{4}$	1	0	0	-1	4 → 1
s_2	2	–	0	7	0	1	0	3/2	18 → 18/7
s_3	3	–	0	4	0	0	1	0	10 → 2.5
x_1	4	–	1	1/2	0	0	0	1/4	2 → 4

ตารางนี้แสดงค่ามาตรฐานใหม่เป็นดังนี้ $x_1 = 2$, $s_1 = 4$, $s_2 = 18$ และ $s_3 = 10$ โดยมี $x_2 = s_4 = 0$ และ $x_0 = 16$ นี่เป็นจุด ข ตามรูปที่ 2

จากสภาวะที่ให้ผลดีที่สุด แสดงว่า x_2 เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา เพราะว่ามีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบเพียงตัวเดียวเท่านั้นในสมการ x_0 การหาตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปทำได้โดยการ หาอัตราส่วนดังที่แสดงในตารางข้างบนนี้ จะเห็นว่า s_1 เป็นค่าที่ต้องการ

เมื่อได้ x_2 เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา และ s_1 เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปแล้ว จะเห็นว่าสมการหลักก็คือ สมการ s_1 ซึ่งมีตัวประกอบหลักเท่ากับ 4 ตารางใหม่จะคำนวณออกมาได้ดังนี้

1. หารสมการ s_1 ด้วย 4 เพื่อที่จะให้ได้สมการหลัก

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการหลักตัวใหม่	0	1	1/4	0	0	−1/4	1

2. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย 2 แล้วบวกเข้ากับสมการ x_0 เดิม จะได้สมการ x_0 ใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ x_0 ใหม่	0	0	1/2	0	0	3/2	18

3. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย −7 แล้วบวกเข้ากับสมการ s_2 เดิม จะได้สมการ s_2 ใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ s_2 ใหม่	0	0	-7/4	1	0	13/4	11

4. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย -4 แล้วบวกเข้ากับสมการ s_3 เดิมจะได้สมการ s_3 ใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ s_3 ใหม่	0	0	-1	0	1	1	6

5. คูณสมการหลักตัวใหม่ด้วย $-1/2$ แล้วบวกเข้ากับสมการ x_1 เดิม จะได้สมการ x_1 ใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
สมการ x_1 ใหม่	1	0	-1/8	0	0	3/8	3/2

เมื่อได้ทำตามขั้นตอนดังกล่าวแล้ว จะได้ตารางใหม่ดังต่อไปนี้

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ผลลัพธ์
x_0	0	1	0	0	1/2	0	0	3/2	18
x_2	1	–	0	1	1/4	0	0	–1/4	1
s_2	2	–	0	0	–7/4	1	0	13/4	11
s_3	3	–	0	0	–1	0	1	1	6
x_1	4	–	1	0	–1/8	0	0	3/8	3/2

จากตารางจะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ทั้งหมดทางด้านซ้ายมือของสมการ x_0 เป็นบวก จึงไม่มีความจำเป็นที่จะต้องปรับปรุงค่าอีกต่อไป และผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่าที่ให้ผลดีที่สุด คือ $x_1 = 1.5, x_2 = 1$ และ $x_0 = 18$ $(s_2 = 11, s_3 = 6, s_1 = s_4 = 0)$ นั่นก็คือจุด ค ในรูปที่ 2

จากตัวอย่างข้างบนนี้แสดงว่า จุดมุมที่เป็นไปได้เพียง 3 จุดเท่านั้นที่ได้ทำผ่านมาก่อนที่จะคำนวณจุดที่ให้ผลดีที่สุดออกมาได้ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นที่จะต้องทำจุดที่เป็นไปได้ทั้งหมด 5 จุด (ก, ข, ค, ง และ จ)

ที่คำนวณมามากแล้วนี้ เป็นการแสดงที่จำกัดอยู่ที่ปัญหาของการหาค่าสูงสุด ความแตกต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเกิดขึ้นเพียงในสภาวะที่ให้ค่าที่ให้ผลดีที่สุดเท่านั้น

เช่นในการหาค่าต่ำสุด ตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาจะเป็นตัวที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นบวกมากที่สุดในสมการของเส้นวัตถุประสงค์ ส่วนสภาวะที่เป็นไปได้ก็ยังคงเหมือนเดิม เพราะว่ามันขึ้นอยู่กับเส้นขีดจำกัดต่าง ๆ ซึ่งไม่ใช่สมการเส้นวัตถุประสงค์

ต่อไปเป็นการสรุปสภาวะที่ให้ผลดีที่สุด และสภาวะที่เป็นไปได้

สภาวะที่ให้ผลดีที่สุด (Optimality Condition)

กำหนดให้สมการ x_0 แสดงค่าในรูปของตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานอย่างเดียวเท่านั้น หลักการนั้นให้เลือกตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาที่จะให้ค่ามากที่สุด (น้อยที่สุด) หรือเป็นตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐาน ที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบมากที่สุด (หรือสัมประสิทธิ์ที่เป็นบวกมากที่สุด) ในสมการ x_0 เมื่อสัมประสิทธิ์ด้านซ้ายมือของสมการ x_0 เป็นบวก (ลบ) ก็จะบรรลุถึงขีดที่ให้ผลดีที่สุด

สภาวะที่เป็นไปได้ (Feasibility Condition)

เป็นสภาวะที่จะเคลื่อนย้ายจุดมุมใหม่ ซึ่งก็จะเป็นจุดที่อยู่ในพื้นที่แสดงผลลัพธ์นั่นเอง ณ ที่จุดมุมใหม่ ตัวแปรค่ามาตรฐานเดิมจะเปลี่ยนเป็นตัวแปรค่าไม่มาตรฐาน ในการหาตัวแปรค่าที่กำลังจะจากไปนี้ ก็ดูได้จากอัตราส่วนที่ต่ำที่สุดของตัวแปรค่ามาตรฐานกับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่กำลังจะเข้ามา ที่มีค่าเป็นบวก

ตัวอย่าง

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 4x_1 + 4x_2$

เงื่อนไข

$$2x_1 + 7x_2 \leqslant 21$$

$$7x_1 + 2x_2 \leqslant 49$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

วิธีทำ $x_0 = 4x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$

เงื่อนไข

$$2x_1 + 7x_2 + s_1 = 21$$

$$7x_1 - 2x_2 + s_2 = 49$$

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	ผลลัพธ์
x_0	0	1	-4	-4	0	0	0
s_1	1	-	2	7	1	0	21
s_2	2	-	7	2	0	1	49
x_0	0	1	0	-2017	0	4/7	28
s_1	1	-	0	45/7	1	-2/7	7
x_1	2	-	1	2/7	0	1/7	7
x_0	0	1	0	0	4/9	28/63	280/9
x_2	1	-	0	1	7/45	-2/45	49/45
x_1	2	-	1	0	-2/45	49/315	301/45

ได้ $x_1 = 301/45$, $x_2 = 49/45$ และ $x_0 = 280/9$ **ตอบ**

ตัวอย่าง

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 2x, + x_2 - 3x, + 5x_4$

เงื่อนไข

$x_1 + 7x_2 + 3x, + 7x_4 \leqslant 46$

$3x, - x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 8$

$2x, + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

วิธีทำ

$x_0 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 0s_1 + 0s_2 + OS,$

เงื่อนไข

$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 + s_1 = 46$

$3x, - x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 8$

$2x, + 3x_2 - x_3 + x_4 + s_3 = 10$

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	ผลลัพธ์
x_0	0	1	-2	-1	3	-5	0	0	0	0
s_1	1		1	7	3	7	1	0	0	46
s_2	2		3	-1	1	2	O	- 1	0	8
s_3	3		2	3	-1	1	0	0	1	10
x_0	0	1	11/2	-7/2	11/2	0	0	5/2	0	20
s_1	1		-19/2	21/2	-1/2	0	1	-7/2	0	18
x_4	2		3/2	-1/2	1/2	1	0	1/2	0	4
s_3	3		1/2	7/2	-3/2	0	0	-1/2	1	6
x_0	0	1	6	0	4	0	0	2	1	26
s_1	1		-11	0	4	0	1	-2	-3	0
x_4	2		11/7	0	2/7	1	0	3/7	1/7	34/7
x_2	3		1/7	1	-3/7	0	0	-1/7	2/7	12/7

$x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 12/7$

$x_4 = 34/7$, $x_0 = 26$

ตอบ

เทคนิคการใช้ M

ขั้นที่ 1 แสดงสมการเป็นแบบฟอร์มมาตรฐาน

ขั้นที่ 2 เพิ่มตัวแปรค่าที่เป็นบวกทางด้านซ้ายมือของแต่ละสมการที่มีเครื่องหมายขีดจำกัดเป็น ($\geqslant$) และ (=) ตัวแปรค่าเหล่านี้เรียกว่า ตัวแปรค่าเทียม (artifical variables) การเพิ่มตัวแปรค่าเทียมนี้ทำให้ไม่เป็นไปตามกฎของเส้นขีดจำกัด ความยากลำบากเช่นนี้ แก้ไขได้โดยการทำให้ตัวแปรค่าเทียมมีค่าเป็นศูนย์ (= 0) ในขั้นสุดท้ายของการแก้สมการ การกระทำเช่นนี้จะทำสำเร็จได้ก็โดยการกำหนดตัวลงโทษที่มีค่าต่อหน่วยสูงมาก (a very large per-unit penalty) ให้แก่ตัวแปรค่าเทียมนี้ในสมการของเส้นวัตถุประสงค์ ตัวลงโทษดังกล่าวนี้จะถูกแทนด้วย $-M$ ในปัญหาของการหาค่าสูงสุด และ $+M$ ในปัญหาของการหาค่าต่ำสุด $M > 0$

ขั้นที่ 3 ใช้ตัวแปรค่าเทียมนี้สำหรับการเริ่มต้นแก้หาตัวแปรค่ามาตรฐานอย่างไรก็ตามสำหรับตารางเริ่มต้นที่จะถูกตระเตรียมขึ้นมาอย่างเหมาะสม สมการเส้นวัตถุประสงค์จะต้องแสดงในรูปของตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานเท่านั้น หมายความว่า สัมประสิทธิ์ของเส้นวัตถุประสงค์ของตัวแปรค่าเทียมต้องเท่ากับศูนย์ หรือผลที่ออกมาซึ่งจะทำให้สำเร็จก็โดยการบวกตัวคูณที่เหมาะสมของสมการเส้นขีดจำกัดแก่สมการวัตถุประสงค์

ขั้นที่ 4 ดำเนินการต่อไปตามวิธีปกติของซิมเพล็กซ์

ตัวแปรค่าเทียมจัดเป็นกลไกทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยให้การเริ่มต้นแก้สมการเป็นไปได้ด้วยดี ถ้าหากไม่ใช้ตัวแปรค่าเทียมแล้วก็มิอาจแก้สมการได้ เช่น ในสมการเงื่อนไข $x_1 + 3x_2 = 12$ ในสมการเงื่อนไขนี้ไม่มีตัวแปรค่ามาตรฐาน ฉะนั้นจึงต้องใส่ตัวแปรมาตรฐานลงไปเป็นดังนี้ $X_1 + 3X_2 + A_1 = 12$ หรือในสมการเงื่อนไข $X_1 + 3X_2 \geqslant 12$ เขียนใหม่ได้เป็น $X_1 + 3X_2 - S_1 = 12$ ตัวแปรค่ามาตรฐานจะติดลบซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปไม่ได้และไม่อยู่ในพื้นที่ที่แสดงผลลัพธ์ ฉะนั้นจึงต้องใส่ตัวแปรค่าเทียมเพิ่มเข้าไปเพื่อจะได้ตัวแปรค่ามาตรฐานเป็นบวกดังนี้ $x_1 + 3x_2 - s_1 + A_1 = 12$ จะได้ตัวแปรค่ามาตรฐานเป็นบวกซึ่งเป็นตัวแปรค่าที่เป็นไปได้และอยู่ในพื้นที่แสดงผลลัพธ์ให้ดูจากตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 2x_1 + 6x_2$

เงื่อนไข

$$2x_1 < 40$$

$2x_2 \leqslant 20$

$2x_2 \leqslant 2 + 4/3x_1$

$2x_1 + 2x_2 \leqslant 56$

$2x_1 \geqslant 10$

วิธีทำ สร้างเป็นแบบฟอร์มาตรฐานจะได้ดังนี้

$x_0 = 2x_1 + 6x_2$

เงื่อนไข

$2x_1 + s_1 = 40$ ....(1)

$2x_2 + s_2 = 20$ ....(2)

$-4/3x_1 + 2x_2 + s_3 = 2$ ....(3)

$2x_1 + 2x_2 + s_4 = 56$ ....(4)

$2x_1 - s_5 = 10$ ....(5)

สมการที่ห้าไม่ได้ให้ตัวแปรค่ามาตรฐานของการเริ่มแก้สมการ ส่วนสมการอื่นนอกนั้นให้ตัวแปรค่ามาตรฐานเป็น s_1, s_2, s_3 และ s_4 ซึ่งถือเป็นตัวแปรค่ามาตรฐานแรกเริ่มของการเริ่มแก้สมการ ส่วนสมการที่ห้านั้นต้องเพิ่มตัวแปรค่าเทียมและเปลี่ยนแปลงสมการเส้นวัตถุประสงค์ จะได้แบบฟอร์มสมการใหม่เป็นดังนี้

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - MA_1$

เงื่อนไข

$2x_1 + s_1 = 40$ ....(1)

$2x_2 + s_2 = 20$ ....(2)

$-4/3x_1 + 2x_2 + s_3 = 2$ ....(3)

$2x_1 + 2x_2 + s_4 = 56$ ....(4)

$2x_1 - s_5 + A_1 = 10$ ....(5)

ให้ M เป็นค่าบวกที่มีค่าจำนวนมาก ค่า M นี้จะมีมากจนกระทั่งทำให้มั่นใจได้ว่าค่า A_1 จะเป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์เพราะว่า ถ้า A_1 ไม่มีค่าเป็นศูนย์แล้ว สมการเส้นวัตถุประสงค์จะมีค่าน้อยมากจนไม่ให้ค่าที่ดีที่สุด

เมื่อจัดเป็นแบบตารางแล้วจะได้ดังนี้

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการ A	X_0	X_1	X_2	S_5	A_1	S_1	S_2	S_3	S_4	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-2	-6	0	M	0	0	0	0	**0**
S_1	1	–	2	0	0	0	1	0	0	0	**40**
S_2	2	–	0.20		0		0	10		0	**20**
S_3	3	–	-4/3	2	0	0	0	0	1	0	**2**
S_4	4	–	2	2	0	0	0	0	0	1	**56**
A_1	5	–	2	o-1		1	0	0	0	0	**10**

สมการเส้นวัตถุประสงค์จะต้องแสดงในรูปของตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานเท่านั้น และตัวแปรค่ามาตรฐานทุกตัวจะต้องมีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ ดังนั้นสัมประสิทธิ์แต่ละตัวของตัวแปรค่ามาตรฐานแรกเริ่มในสมการ X_0 จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ในตารางข้างบนจะต้องแทนค่า A_1 ในสมการ X_0 ดังนี้

สมการ X_0 ใหม่ = สมการ X_0 เดิม + (– M) สมการ A_1

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_5	A_1	S_1	S_2	S_3	S_4	ผลลัพธ์
X_0	**0**	1	-2-2M	–6	M	0	0	0	0	0	**-10M**
S_1	1		2	0	0	0	1	0	0	0	40
S_2	2		0	2	0	0	0	1	0	0	20
S_3	3		–4/3	2	0	0	0	0	1	0	2
S_4	4		2	2	0	0	0	0	0	1	56
A_1	5		2	0	-1	**1**	0	0	0	0	**10**
X_0	0	1	0	-6	- 1	1 + M	0	0	0	0	10
S_1	1		0	0	1	- 1	1	0	0	0	30
S_2	2		0	2	0	0	0	1	0	0	20
S_3	3		0	2	**-2/3**	**2/3**	0	0	1	0	**26/3**
S_4	4		0	2	**1**	-1	0	0	0	1	46
X_1	5		1	0	**–1/2**	**1/2**	0	0	0	0	5

X_0	0	1	0	0	-3	3+M	0	0	3	0	36
S_1	1	-	0	0	1	-1	1	0	0	0	30
S_2	2	-	0	0	2/3	-2/3	0	1	-1	0	34/3
X_2	3	-	0	1	-1/3	1/3	0	0	1/2	0	13/3
S_4	4	-	0	0	5/3	-5/3	0	0	-1	1	112/3
X_1	5	-	1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0	5
X_0	0	1	0	0	0	M	0	9/2	-3/2	0	87
S_1	1	-	0	0	0	0	1	-3/2	3/2	0	13
S_5	2	-	0	0	1	-1	0	3/2	-3/2	0	17
X_2	3	-	0	1	0	0	0	1/2	0	0	10
S_4	4	-	0	0	0	0	0	-5/2	3/2	1	9
X_1	5	-	1	0	0	0	0	3/4	-3/4	0	27/2

$X_0 = 87,\ X_1 = 27/2,\ X_2 = 10$ **Ans.**

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $X_0 = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3$

เงื่อนไข

$X_1 + X_2 + X_3 = 17$

$2X_1 - 5X_2 + X_3 \geqslant 10$

$X_1,\ X_2,\ X_3 \geqslant 0$

วิธีทำ สร้างเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานได้ดังนี้

$X_0 = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 - MA_1 - MA_2$

เงื่อนไข

$X_1 + X_2 + X_3 \quad + A_1 = 17$ ....(1)

$2X_1 - 5X_2 + X_3 - S_1 \quad + A_2 = 10$ ....(2)

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	A_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-2	-3	5	0	M	M	0
A_1	1		1	1	1	0	1	0	
A_2	2		2	-5	1	-1	0	1	10
X_0	0	1	-2-3M	-3+4M	S-2M	M	0	0	-27M
A_1	1		1	1	1	0	1	0	17
A_2	2		2	-5	1	-1	0	1	10
X_0	0	1	0	-8-7/2M	6-1/2M	-1-1/2M	0	1+3/2M	10-12M
A_1	1		0	7/2	1/2	1/2	1	-1/2	12
X_1	2		1	-5/2	1/2	-1/2	0	1/2	5
X_0	0	1	0	0	50/7	1/7	16/7+M	-1/7+M	262/7
X_2	1		0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7	24/7
X_1	2		1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7	95/7

$x_0 = 262/7,\ x_1 = 95/7,\ x_2 = 24/7$ **Ans.**

ตัวอย่าง จงหาค่าต่ำสุดของ $x_0 = 10x_1 - 12x_2 - 14x_3$

เงื่อนไข

$$2x_1 + 10x_2 - 6x_3 \geq 30$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

วิธีทำ เปลี่ยนเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานจะได้ดังนี้

$$x_0 = 10x_1 - 12x_2 - 14x_3 + MA_1 + MA_2$$

เงื่อนไข

$2x_1 + 10x_2 - 6x_3 - s_1 + A_1 = 30$ ....(1)

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + s_2 = 20$ ....(2)

$x_1 + x_2 + x_3 + A_2 = 5$ ....(3)

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	A_2	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-10	12	14	0	-M	-M	0	0
A_1	1		2	10	-6	-1	1	0	0	30
S_2	2	-	5	-6	10	0	0	0	1	20
A_2	3	-	1	1	1	0	0	1	0	5
X_0	0	1	-10 + 3M	12 + 11M	14-5M	--M	0	0	0	35M
A_1	1	-	2	10	-6	-i	1	0	0	30
S_2	2	-	5	-6	10	0	0	0	1	20
A_2	3	-	1	I	1	0	0	I	0	5
X_0	0	1	$-\frac{62}{5} + \frac{4M}{5}$	0	$\frac{[illegible]}{5}$ $\frac{[illegible]}{5}$	$\frac{[illegible]}{5} + \frac{[illegible]}{10}$	$\frac{6}{5} - \frac{[illegible]}{10}M$	0	0	-36 + 2M
X_2	I		1/5	I	-3/5	-1/10	1/10	0	0	3
S_2	2	-	31/5	0	32/5	-6/10	6/10	0	1	38
A_2	3	-	4/5	0	8/5	1/10	-1/10	1	0	2
X_0	0	1	-23	0	0	-1/8	1/8-M	-53/4-M	0	-125/2
X_2	1	-	1/2	1	0	-1/6	1/16	3/8	0	15/4
S_2	2		3	0	0	-1	I	-4	1	30
X_3	3	-	1/2	0	1	1/16	-1/16	S / 8	0	5/4

$x_0 = -125/2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 15/4,\ x_3 = 5/4$ Ans.

การใช้ซิมเพล็กซ์ในรูปแบบต่าง ๆ กัน

มีกรณีต่าง ๆ ที่มักพบเสมอในการใช้ซิมเพล็กซ์ การอธิบายนั้นจะมีกราฟประกอบเพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจน

กรณีต่าง ๆ ที่พบมีดังนี้

1. มีตัวแปรมาตรฐานน้อยกว่าที่ควรจะมี (Degeneracy) ปัญหานี้เกิดขึ้นเมื่อการกระทำครั้งต่อไปตามวิธีซิมเพล็กซ์ ค่าของตัวแปรมาตรฐานหนึ่งตัวหรือมากกว่ามีค่าเท่ากับศูนย์ ในกรณีเช่นนี้ผลลัพธ์ที่ได้เรียกว่าเป็น degenerate ที่จุดนี้ไม่มีความแน่นอนว่าค่าของสมการวัตถุประสงค์จะได้รับการปรับปรุงให้ดีขึ้น (เพราะว่าผลลัพธ์ใหม่อาจจะยังคงเป็น degenerate) อาจเป็นไปได้ว่าการกระทำซ้ำตามวิธีของซิมเพล็กซ์อาจจะโคจรเป็นวงกลมซึ่งการกระทำซ้ำครั้งต่อไปตามวิธีของซิมเพล็กซ์จะได้ผลออกมาซ้ำ ๆ กันโดยไม่ให้ผลดีที่สุด (optimal solution) ปัญหาเช่นนี้จะถูกเรียกว่า "วงจร" (cycling หรือ circling) ในทางปฏิบัติแล้วปัญหาแบบนี้มักไม่ค่อยพบเห็น

นอกจากปัญหาด้านวงจรแล้ว degeneracy ยังทำให้เกิดปัญหาเกี่ยวกับการที่จะต้องเร่งกระทำซ้ำตามวิธีของซิมเพล็กซ์เมื่อปรากฏค่า degenerate ขึ้นมา (เพราะว่าค่าของสมการเส้นวัตถุประสงค์จะไม่เพิ่มขึ้น) ต่อไปจะเป็นตัวอย่างซึ่งแสดงการคำนวณการกระทำซ้ำตามวิธีซิมเพล็กซ์จนกว่าจะได้ค่าดีที่สุด

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 6x_1 + 13x_2$

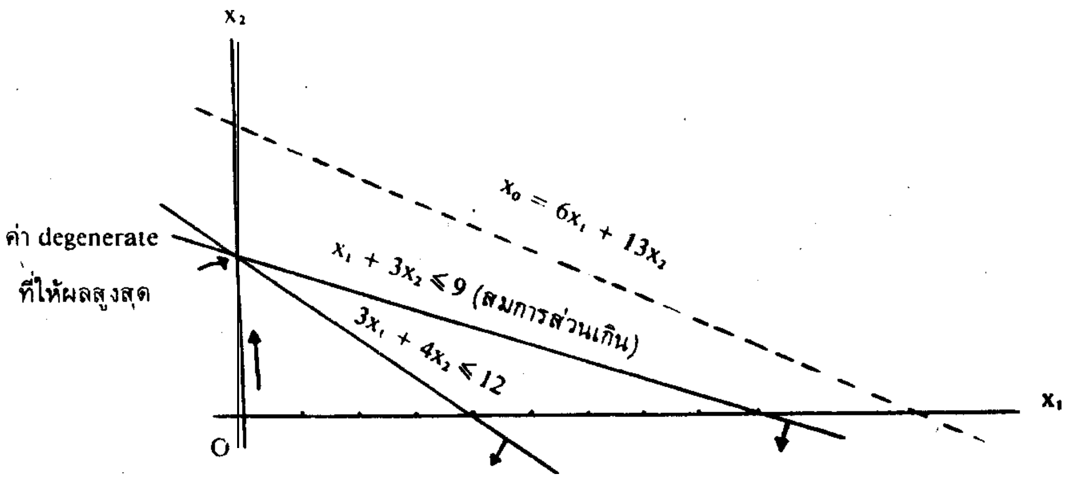
เงื่อนไข

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

วิธีทำ



แปลงเป็นสมการมาตรฐานได้ $x_0 = 6x_1 + 13x_2$

เงื่อนไข $x_1 + 3x_2 \quad + s_1 = 9$ ....(1)

$3x_1 + 4x_2 \quad + s_2 = 12$ ....(2)

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-6	-13	0	0	0
S_1	1		1	3	1	0	9
S_2	2		3	4	0	1	12
X_0	0	1	-5/3	0	13/3	0	39
X_2	1		1/3	1	1/3	0	3
S_2	2		5/3	0	-4/3	1	0
X_0	0	1	0	0	3	1	39
X_2	1		0	1	3/5	-1/5	3
X_1	2		1	0	-4/5	3/5	0

$x_0 = 39,\ x_1 = 0,\ x_2 = 3$ **Ans.**

จากตัวอย่างข้างบนนี้ในรูปกราฟจะเห็นลูกศรซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ในผลลัพธ์มาตรฐาน (basic solution) ในการกระทำซ้ำตามวิธีของซิมเพล็กซ์ครั้งต่อ ๆ ไป เป็นที่น่าสังเกตว่า ผลลัพธ์ที่เป็น degenerate เกิดขึ้นเมื่อมีเส้นขีดจำกัดมากกว่าที่ต้องการเป็นตัวกำหนดจุดมุมสูงสุด (extreme point) ในตัวอย่างนี้เส้นขีดจำกัด 3 เส้น $x_1 \geqslant 0$, $x_1 + 3x_2 \leqslant 9$ และ $3x_1 + 4x_2 \leqslant 12$ ผ่านจุดผลลัพธ์ที่เป็น degenerate ที่ให้ผลสูงสุด ซึ่งตามความจริงแล้วจุดนี้สามารถกำหนดขึ้นมาได้โดยเส้นขีดจำกัดเพียง 2 เส้นเท่านั้น

ให้สังเกตดูว่า ค่าของตัวแปรค่าในการกระทำซ้ำตามวิธีของซิมเพล็กซ์ในครั้งที่หนึ่งและที่สองมีค่าเหมือนกัน ผลลัพธ์นี้เรียกว่า degenerate solution เพราะว่าการกระทำทั้งสองครั้งมีตัวแปรค่ามาตรฐานตัวหนึ่งเป็นศูนย์ อาจมีคำถามว่าทำไมถึงไม่หยุดการกระทำซ้ำเมื่อผลลัพธ์ที่ได้เป็น degenerate ตั้งแต่ครั้งแรก คำตอบก็คือยังไม่มีความมั่นใจว่า ผลลัพธ์ที่เป็น degenerate ในครั้งแรกจะเป็นค่าเดียวกับค่าที่ให้ผลดีที่สุด นั่นคือปัญหานี้อาจจะเป็น degenerate ชั่วคราวก็ได้ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 6x_1 + 3x_2$

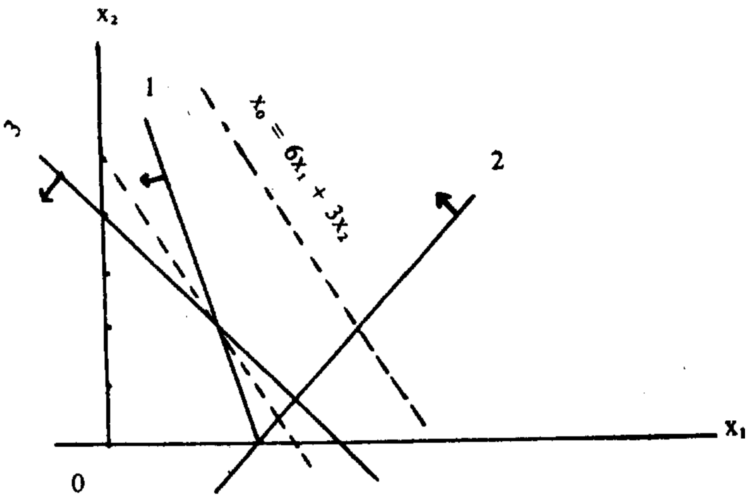
$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$5x_1 - 3x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3/2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

วิธีทำ



เปลี่ยนเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานได้ดังนี้

Max $x_0 = 6x_1 + 3x_2$

เงื่อนไข

$4x_1 + x_2 + s_1 = 8$ ....(1)

$5x_1 - 3x_2 + s_2 = 10$ ....(2)

$2x_1 + 3/2x_2 + s_3 = 6$ ....(3)

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการ	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-6	-3	0	0	0	0
S_1	1	-	4	1	1	0	0	8
S_2	2	-	5	-3	0	1	0	10
S_3	3	-	2	3/2	0	0	1	6
X_0	0	1	0	-6/4	6/4	0	0	12
X_1	1	-	1	1/4	1/4	0	0	2
S_2	2	-	0	-17/4	-5/4	1	0	0
S_3	3	-	0	1	-2/4	0	1	2
X_0	0	1	0	0	3/4	0	6/4	15
X_1	1	-	1	0	3/8	0	-1/4	3/2
S_2	2	-	0	0	-27/8	1	17/4	17/2
X_2	3	-	0	1	-2/4	0	1	2

$x_0 = 15,\ x_1 = 3/2,\ x_2 = 2$ **Ans.**

ผลลัพธ์ของการทำครั้งที่ 1 เป็น degenerate ในขณะที่ผลลัพธ์ที่ให้ค่าสูงสุดที่ได้จากการทำครั้งที่ 2 เป็น non degenerate ปัญหานี้จึงเป็น degenerate ชั่วคราว degenercy สิ้นสุดลงในกรณีนี้ เพราะว่า x_2 ได้ถูกนำเข้ามาในการทำครั้งที่ 2

จากรูปที่แสดงข้างบนนี้จะเห็นว่า การทำครั้งแรกตามวิธีซิมเพล็กซ์เกิดขึ้นที่จุด degenerate ($x_1 = 2,\ x_2 = 0$) แต่การทำครั้งที่ 2 ได้เคลื่อนย้ายผลลัพธ์ไปยังจุด non degenerate ที่ให้ผลดีที่สุด ($x_1 = 3/2,\ x_2 = 2$)

2. ผลลัพธ์ที่ไม่ขอบเขต (Unbounded Solution) กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อพื้นที่ของผลลัพธ์ไม่ได้ถูกล้อมรอบเพื่อว่า ค่าของสมการวัตถุประสงค์สามารถเพิ่มขึ้นได้อย่างไม่จำกัด อย่างไรก็ตามไม่จำเป็นที่ว่า พื้นที่แก้ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต จะให้ค่าที่ไม่มีขอบเขตสำหรับสมการของเส้นวัตถุประสงค์ ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างทั้งสองดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ผลลัพธ์ที่ให้ผลดีที่สุดที่ไม่มีขอบเขต

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 3x_1 + 2x_2$

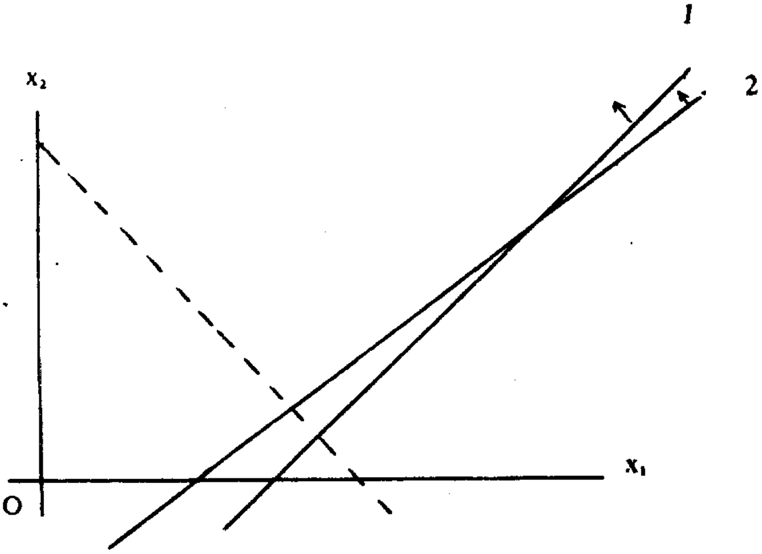
เงื่อนไข

$4x_1 - 3x_2 \leqslant 12$

$x_1 - x_2 \leqslant 2$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

วิธีทำ



ตารางแรกเริ่ม

ตัวแปร มาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-3	-2	0	0	0
S_1	1	-	4	-3	1	0	12
S_2	2	-	1	-1	0	1	2

จะเห็นว่า x_1 มีสัมประสิทธิ์เป็นลบมากที่สุดจะถูกเลือกเป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา อย่างไรก็ตามให้สังเกตดูว่า ถ้า x_2 เป็นตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามา x_0 จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุดโดยไม่ละเทือนต่อพื้นที่ที่เป็นไปได้ (เพราะว่ามีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบทั้งหมดในเส้นขีดจำกัดทุกเส้น) ดังนั้นจึงสรุปว่าปัญหานี้ได้คำตอบที่ไม่มีขอบเขตจะเห็นได้จากรูปข้างบน โดยทั่วไปแล้วผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขตนี้สามารถหามาได้ในการกระทำครั้งใด ๆ ก็ตาม ตามวิธีของซิมเพล็กซ์โดยตัวแปรค่าที่กำลังจะเข้ามาตัวใดตัวหนึ่งจะมีสัมประสิทธิ์ที่เป็นศูนย์หรือลบทั้งหมดในทุกเส้นขีดจำกัด

ตัวอย่างที่ 2 ผลลัพธ์ที่ได้มีขอบเขตแต่พื้นที่แสดงผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 3x_1 - x_2$

เงื่อนไข

$3x_1 - 2x_2 \leqslant 6$

$x_1 \leqslant 6$

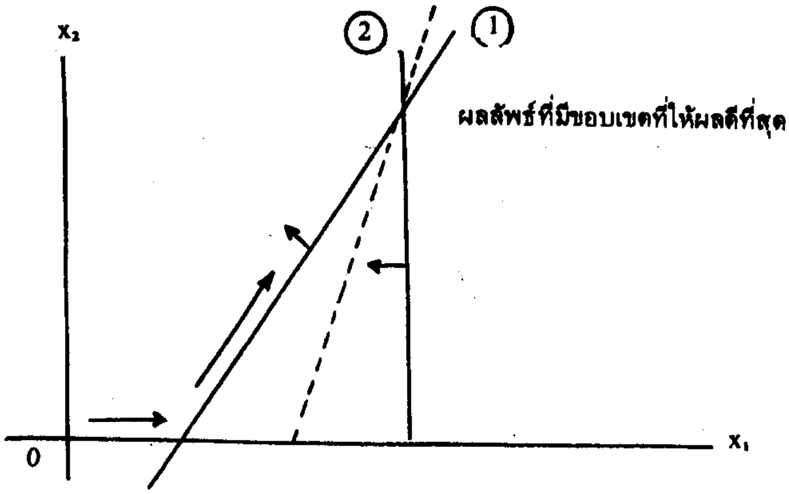
$x_1, x_2 \geqslant 0$

เปลี่ยนเป็นสมการมาตรฐานได้ดังนี้

$x_0 = 3x_1 - x_2$

$3x_1 - 2x_2 + s_1 = 6$ ....(1)

$x_1 + s_2 = 6$ ....(2)



ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-3	1	0	0	0
S_1	1	-	3	-2	1	0	6
S_2	2	-	1	0	0	1	6
X_2							
X_0	0	1	0	-1	1	0	6
X_1	1	-	1	-2/3	1/3	0	2
S_2	2	-	0	2/3	-1/3	1	4
X_0	0	1	0	0	1/2	3/2	12
X_1	1	-	1	0	0	1	6
X_2	2	-	0	1	-1/2	3/2	6

ตารางแรกเริ่มแสดงว่าสัมประสิทธิ์เส้นขีดจำกัดของ x_2 เป็นศูนย์หรือลบแสดงว่าพื้นที่ที่แสดงผลลัพธ์ไม่มีขอบเขตจำกัด แต่อย่างไรก็ตามค่าที่ให้ผลดีที่สุดมีขอบเขตจำกัด ($x_0 = 12$) ดังนั้นปัญหานี้พื้นที่แสดงผลลัพธ์ไม่มีขอบเขตจำกัด แต่ผลลัพธ์ที่ให้ผลดีที่สุดมีขอบเขตจำกัด

3. ผลลัพธ์หลายค่า (Multiple Solutions) กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อเส้นวัตถุประสงค์ขนานกับเส้นขีดจำกัดเส้นใดเส้นหนึ่งที่ล้อมรอบพื้นที่แสดงผลลัพธ์ ทำให้จุดมุม 2 จุดที่อยู่ปลายเส้นของด้านนั้นมีค่าของสมการเส้นวัตถุประสงค์เท่ากัน และทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นที่เชื่อมระหว่างมุมทั้งสองก็จะมีค่าของสมการเส้นวัตถุประสงค์เท่ากัน ผลลัพธ์มาตรฐานของเส้นวัตถุประสงค์จะมีหลายค่าดูจากตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ

$$x_0 = 9x_1 + 24x_2$$

เงื่อนไข

$$3x_1 + 8x_2 \leq 25$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 22$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

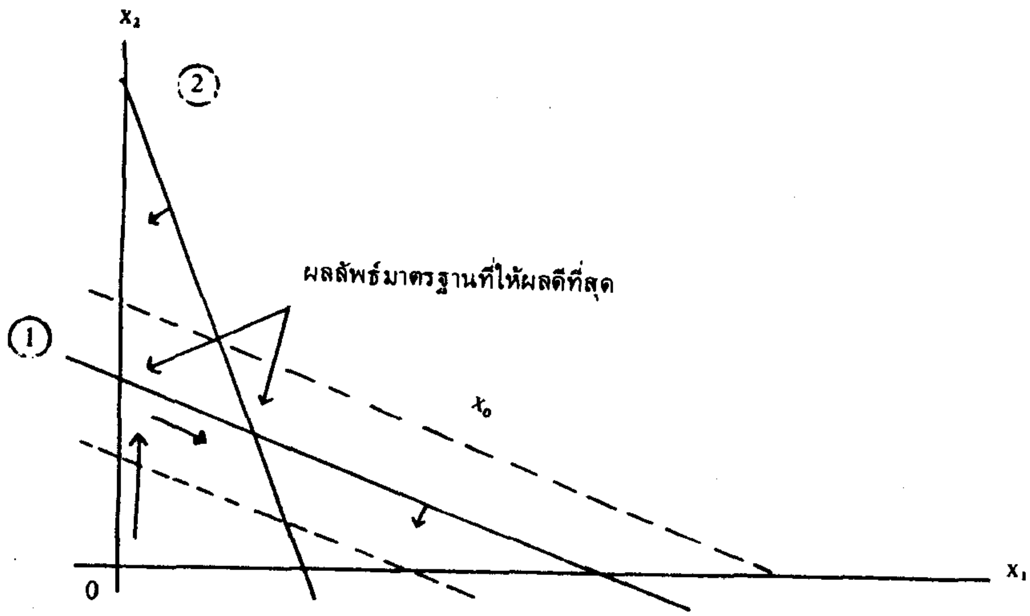
วิธีทำ เปลี่ยนเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานได้ดังนี้

จงหาค่าสูงสุด $x_0 = 9x_1 + 24x_2$

เงื่อนไข

$3x_1 + 8x_2 + s_1 = 25$ ....(1)

$8x_1 + 3x_2 + s_2 = 25$ ....(2)



จากรูปจะเห็นว่า x_0 ขนานกับเส้นสมการ (1) ซึ่งเป็นเส้นขีดจำกัดที่ล้อมรอบพื้นที่แสดงผลลัพธ์ ผลลัพธ์ที่ให้ผลดีที่สุดจะเป็นค่าใดค่าหนึ่งในสองค่าดังแสดงในกราฟ จุดใด ๆ บนเส้นที่เชื่อมผลลัพธ์มาตรฐานทั้งสองจุดนี้จะให้ค่าผลลัพธ์ไม่มาตรฐานหลายค่าที่ให้ค่าอย่างเดียวกับ x_0

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-9	-24	0	0	0
S_1	1	-	3	8	1	0	25
S_2	2	-	8	3	0	1	25
X_0	0	1	0	0	3	0	75
X_2	1	-	3/8	1	1/8	0	25/8
S_2	2	-	55/8	0	-3/8	1	125/8
X_0	0	1	0	0	3	0	75
X_2	1	-	0	1	64/440	-3/55	1,000/440
x_1	2	-	1	0	-3/55	8/55	125/55

จะเห็นว่าในการกระทำครั้งที่ 1 ตามวิธีของซิมเพล็กซ์จะได้ค่า $x_0 = 75$, $x_1 = 0$, $x_2 = 25/8$ ค่าที่ไม่มาตรฐาน x_1 มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ในสมการ x_0 แสดงว่าผลลัพธ์หลายค่าได้เกิดขึ้นแล้ว x_1 สามารถทำให้เป็นค่ามาตรฐานได้ดังที่แสดงในการกระทำครั้งที่ 2 ตามวิธีซิมเพล็กซ์ค่าที่ให้ผลดีที่สุดชุดใหม่จะเป็น $x_0 = 75$, $x_1 = 25/11$ และ $x_2 = 25/11$ ค่าของ x_0 ไม่เปลี่ยนแปลงเพราะว่า x_1 มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ในสมการ x_0 ของการกระทำครั้งแรก ผลลัพธ์มาตรฐานจึงมีสองค่าคือ $x_1 = 0$, $x_2 = 25/8$ และ $x_1 = x_2 = 25/11$

4. ไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Nonexisting Feasible Solution) กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อเส้นขีดจำกัดทั้งหมดไม่ตัดกันเพื่อเกิดจุดที่ให้ผลดีที่สุด ทำให้พื้นที่แสดงผลลัพธ์ว่างเปล่าและไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ให้ดูจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงของ $x_0 = 5x_1 + 3x_2$

เงื่อนไข

$3x_1 + 4x_2 \leqslant 6$

$7x_1 + 5x_2 \geqslant 21$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

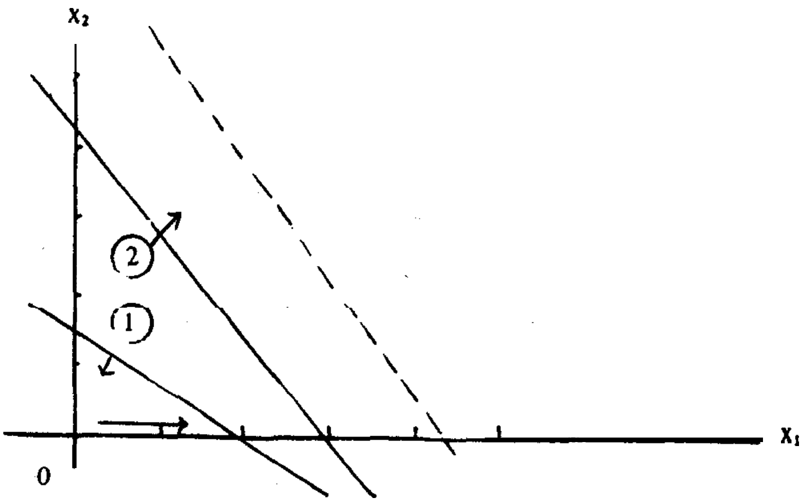
วิธีทำ เปลี่ยนเป็นแบบฟอร์มมาตรฐานได้ดังนี้

จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 5x_1 + 3x_2 - MA_1$

เงื่อนไข

$3x_1 + 4x_2 \quad + \ s_1 = 6$ ....(1)

$7x_1 + 5x_2 - s_2 + A_2 = 21$ ....*......... .(2)



ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	S_2	S_1	A_1	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-5	-3	0	0	M	0
S_1	1		3	4	0	1	0	6
A_1	2		7	5	-1	0	I	21
X_0	0	1	-5-7M	-3-5M	M	0	0	-21M
S_1	1		3	4	0	1	0	6
A_1	2		7	5	-1	0	1	21
X_0	0	1	0	$\frac{11}{3}+\frac{13M}{3}$	M	$\frac{5}{3}+\frac{7M}{3}$	0	10-7M
X_1	1		1	4/3	0	1/3	0	2
A_1	2		0	-13/3	-1	-7/3	1	7

ตามกฎสภาวะที่ให้ผลดีที่สุด ผลลัพธ์ที่ได้จะให้ผลดีที่สุดอย่างไรก็ตามให้สังเกตว่า ผลลัพธ์ที่ให้ผลดีที่สุดได้รวมเอาตัวแปรค่าเทียม A_1 ที่มีค่าเป็นบวก (= 7) ซึ่งแสดงว่า ปัญหานี้ไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพราะว่าค่าบวกของ A_1 หมายความว่า สมการ เงื่อนไขที่สองไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่น่าพอใจ แต่ถ้าตัวแปรค่าเทียมมีค่าเป็นศูนย์ในขั้นสุดท้ายของการปรากฏผลลัพธ์ที่ดีที่สุด เงื่อนไขของสมการดังกล่าวก็เป็นที่น่าพอใจ ปัญหานั้นก็จะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

การขจัดการใช้ The Big M

การขจัดการใช้ตัวคงที่ M โดยใช้วิธี 2 ขั้นตอน ซึ่งเป็นการแบ่งปัญหาออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ให้แทนสมการเส้นวัตถุประสงค์เดิมด้วยผลรวมของตัวแปรค่าเทียม สมการเส้นวัตถุประสงค์ใหม่จะถูกทำให้มีค่าน้อยที่สุด (หรือมากที่สุด) ขึ้นอยู่กับเส้นขีดจำกัดของปัญหาแรกเริ่ม ถ้าปัญหานี้มีพื้นที่ที่เป็นไปได้แล้ว ค่าต่ำสุดของเส้นวัตถุประสงค์ใหม่จะมีค่าเป็นศูนย์ซึ่งแสดงว่า ค่าเทียมทั้งหมดเป็นศูนย์พอถึงขั้นตอนที่สอง ถ้าค่าต่ำสุดมีค่ามากกว่าศูนย์ปัญหาก็จะยุติลง เพราะว่าไม่มีพื้นที่ที่เป็นไปได้ในปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 2 ให้ใช้ค่าที่ได้ผลดีที่สุดของขั้นตอนที่ 1 เป็นจุดเริ่มต้นของปัญหาเดิม ในกรณีนี้สมการเส้นวัตถุประสงค์เดิมจะแสดงในรูปของตัวแปรค่าที่ไม่มาตรฐานโดยการใช้หลักตามปกติของ Gauss Jordan ขจัดค่าที่ไม่ต้องการดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง

จงหาค่าต่ำสุดของ $x_0 = 10x_1 - 12x_2 - 14x_3$

เงื่อนไข

$$2x_1 + 10x_2 - 6x_3 \geqslant 30$$
$$5x_1 - 6x_2 - 10x_3 \leqslant 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

วิธีทำ สมการเส้นวัตถุประสงค์ใหม่เป็นดังนี้

$$A_0 = A_1 + A_2$$

ขั้นตอนที่ 1

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	Ao	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	A,	S_2	ผลลัพธ์
A_0	0	1	0	u	0	0	- 1	-1	0	0
A,	1	-	2	10	-6	-1.	1	0	0	30
S_2	2	-	5.	-6	10	0	0	0	1	20
A_2	3	-	1	1	1	0'	0	1	0	5
A,,	0	1	3	11	-5	-1	0	0	0	35
A,	1	-	2	10	-6	-1	1	0	0	30
S_2	2	-	-5	-6	10	0	0	0	1	20
A_2	3	-	1	1	1	0	0	1	0	5
A_0	0	1	4/5	0	8/5	1/10	0	0	0	2
X_2	1	-	1/5	1	-3/5	-1/10	1/10	0	0	3
s;	2	-	31/5		32/5	-6/10	6/10	0	1	38
A_2	3	-	4/5	0	8/5	1/10	-1/10	1	0	2
A_0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0
X_2	1	-	0	1	-1	-1/8	1/8	-1/4	0	5/2
S_2	2	-	0	0	-6	-11/8	11/8	-31/4	1	45/2
x,	3	-	1	0	2	1/8	-1/8	5/4	0	5/2

ขั้นตอนที่ 2

ตัวแปรมาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-10	12	14	0	0	0
X_2	1	-	0	1	-1	-1/8	0	5/2
S_2	2	-	0	0	-6	-11/8	1	45/2
X_1	3	-	1	0	2	1/8	0	5/2
X_0	0	1	0	0	46	11/4	0	-5
X_2	1	-	0	1	-1	-1/8	0	5/2
S_2	2	.-	0	0	-6	-11/8	1	45/2
X_1	3	-	1	0	2	1/8	0	5/2
X_0	0	1	-23	0	0	-1/8	0	-125/2
X_2	1	-	1/2	1	0	-1/16	0	15/4
S_2	2	-	3	0	0	-1	1	30
X_3	3	-	1/2	0	1	1/16	0	5/4

จะได้ $x_0 = -125/2, x_1 = 0, x_2 = 15/4, x_3 = 5/4$ **ตอบ**

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $x_0 = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

วิธีทำ ให้ $A_0 = -A_1 - A_2$

a ตอนที่ I

ตัวแปร มาตรฐาน	สมการที่	A,	X,	X_2	X_3	S_1	A,	A ,	ผลลัพธ์
A_0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
A\	1	-	1	1	1	0	1	0	17
A_2	2	-	2	-5	1	-1	0	1	10
A_0	0	1	-3	4	-2	1	0	0	-27
A,	1	-	1	1	1	0	1	0	17
A_2	2	-	2	-5	1	-1	0	1	10
A_0	0	1	0	-7/2	-1/2	-1/2	0	3/2	-12
A,	1	-	0	7/2	1/2	1/2	1	-1/2	12
X_1	2	-	1	-5/2	1/2	-1/2	0	1/2	5
A_0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
X_2	2	-	0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7	24/7
X_1			1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7	95/7

ขั้นตอนที่ 2

hulls มาตรฐาน	สมการที่	X_0	X_1	X_2	X_3	S_1	ผลลัพธ์
X_0	0	1	-2	-3	5	0	0
X_2	1	-	0	1	1/7	1/7	24/7
X_1	2	-	1	0	6/7	-1/7	95/7
X_0	0	1	0	0	50/7	1/7	262/7
X_2	1	-	0	1	1/7	1/7	24/7
X_1	2	-	1	0	6/7	-1/7	95/7

ได้ $x_0 = 262/7, x_1 = 95/7, x_2 = 24/7, x_3 = 0$ ตอบ

โจทย์แบบฝึกหัด

(1) จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหาต่อไปนี้

จงหาค่าต่ำสุดของ $5x_1 + 4x_2$

เงื่อนไข

$$4x_1 + x_2 \geqslant 80$$
$$2x_1 + 3x_2 \geqslant 90$$
$$\text{ทุก } x_j \geqslant 0$$

(2) จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหาต่อไปนี้

จงหาค่าสูงสุดของ $20x_1 + 2x_2$

เงื่อนไข

$$10x_1 + x_2 \leqslant 3$$
$$10x_1 \leqslant 2$$
$$x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 \geqslant 0 \text{ และ } x_2 \geqslant 0$$

(3) จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหาต่อไปนี้

จงหาค่าสูงสุดของ $4x_1 + 4x_2$

เงื่อนไข

$$x_1 - x_2 \leqslant 1$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 1$$
$$x_1 \geqslant 0 \text{ และ } x_2 \geqslant 0$$

(4) กำหนดเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้

$$-x_1 + 3x_2 \leqslant 1$$
$$6x_1 + 4x_2 \geqslant 24$$
$$x_1 \geqslant 0 \text{ และ } x_2 \geqslant 2$$

จงใช้วิธีการของซิมเพล็กซ์หาค่าที่ให้ผลดีที่สุด โดยสมมติว่าสมการเส้นวัตถุประสงค์เป็นดังนี้

(ก) จงหาค่าต่ำสุดของ $2x_1 + 2x_2$

(ข) จงหาค่าสูงสุดของ $3x_1 + 3x_2$

(ค) จงหาค่าสูงสุดของ $x_1 - 2x_2$

(5) จงหาค่าสูงสุดของ $2x_1 + 3x_2$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leqslant -1 \\ x_1 - x_2 &\leqslant -1 \\ x_1 \geqslant 0 \text{ และ } x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(6) จงหาค่าต่ำสุดของ $2x_1 + 3x_2$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 30 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(7) จงหาค่าต่ำสุดของ $5x_1 + 2x_2$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant 5 \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant 12 \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(8) จงหาค่าสูงสุดของ $x_1 + x_2 + 2x_3$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 20 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leqslant 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(9) จงหาค่าสูงสุดของ $x_1 + x_2 + 2x_3$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\geq 10 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

(10) จงหาค่าต่ำสุดของ $x_1 + x_2 + 2x_3$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq -10 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

(11) จงหาค่าสูงสุดของ $x_1 + 3x_2 + x_3$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 4x_3 &\leq 100 \\ 3x_2 + 2x_3 &\leq 90 \\ x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(12) จงหาค่าต่ำสุดของ $3x_1 + 2x_2$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq -2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 8 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(13) จงหาค่าสูงสุดของ $4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4$

เงื่อนไข

$2x, + 3x_2 + x_3 \leqslant 150$

$3x_1 + 2x_3 + 4x_4 \leqslant 120$

$x_1 +$ 2x2 $+ 2x_3 \geqslant 50$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

(14) จงหาค่าต่ำสุดของ $x_1 + 3x, + 4x_3$

เงื่อนไข

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geqslant 60$

3x2 $+ 2x_2 + x_3 \geqslant 60$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 90$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

(15) จงหาค่าสูงสุดของ $10x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 9x_4$

เงื่อนไข

$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leqslant 120$

$x_2 + 2x_3 \leqslant 80$

$2x_1 + 2x_2 + 3x, \leqslant 90$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

(16) จงหาค่าสูงสุดของ $2x, + 3x,$

เงื่อนไข

$3x_1 + 4x_2$ 4 120

2X‘ $+ x_2 \leqslant 60$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

(17) จงหาค่าต่ำสุดของ 12X‘ + $8x_2 + 4x_3$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
6x, + 2x, + 6x, &\geqslant 6 \\
6x, + 4x_2 &= 12 \\
2x_1 - 2x_2 &\leqslant 2 \\
\text{ทุก } x_j &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

(18) จงหาค่าสูงสุดของ $8x_1 - 4x_2$ + 4x, + Ox,

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leqslant 16 \\
4x_2 - 2x, &\leqslant 8 \\
4x, - 2x_2 - x_4 &\leqslant 4 \\
\text{ทุก } x_j &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

(19) จงหาค่าต่ำสุดของ $.5x_1 + 1.5x_2 - .5x_3$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
-.5X_/ - .5x_2 + x_3 &\leqslant 2.5 \\
x_1 - .5x_2 + .5x_3 &\leqslant 3 \\
.5x_1 - 1.5x_2 + 2.5x, &\geqslant 10 \\
\text{ทุก } x_j &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

(20) จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์แก้ปัญหาต่อไปนี้

n) จงหาค่าสูงสุดของ 4x, + $4x_2 - 8$

ข) จงหาค่าต่ำสุดของ $12x_1 - 4x_2 + 240$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &\leqslant 44 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 24 \\
-4x, + lox^* &\leqslant 20 \\
-x_1 + 2x_2 &\leqslant 16 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$